数学分析中的问题和反例

汪林 编

云南科技出版社

数学分析中的问题和反例

汪　林　编

云南科技出版社

责任编辑：王建民
封面设计：王玉辉

数学分析中的问题和反例

汪　林　编

云南科技出版社出版发行　（昆明市书林街100号）
云南新华印刷厂印装

开本：850×1168 1/32　印张：18.125　字数：448,000
1990年2月第一版　　1990年2月第一次印刷
印数：1—5,200

ISBN 7-5416-0255-8/O·8　　定价：5.60 元

前　言

本书汇集了“数学分析”方面的问题和反例500多个．全书共八章，内容有数列、函数、微分、积分、级数、一致收敛、多元函数、重积分与参变量积分．每一章分为三部分：第一部分提纲挈领地给出了该章的基本概念和主要结果；第二部分是问题，包括解法；第三部分是反例．

本书所选的问题和反例比较典型，难度适中，构思新颖，解法精巧，富有启发性．书中不少问题和反例直接选自国内外学者所做的工作．本书对正确理解“数学分析”的基本概念，掌握“数学分析”的基本理论和技巧很有好处．

本书可供大学、大专数学系师生、数学工作者参考．对那些即将参加理工科研究生考试的同志也有参考价值．

由于编者水平所限，因此一定有很多不当或错误之处，敬请读者批评指正．

编　者

1988年2月于云南大学

目 录

第一章　数　列

基本概念和主要结果

为了本章及后面各章的需要，我们把有关集论的一些基础知识陈述如下：

设A是某些对象的任一集合（简称集），若a是A的元素（简称元），则记为$a\in A$。若a不是A的元，则记为$a\notin A$。设$p(x)$是某一与x有关的条件，所有符合这个条件的事物x所组成之集，用$\{x:p(x)\}$来表示．不含任何元的集称为**空集**，，用ϕ来表示．若集A的一切元都是集B的元，则称A是B的**子集**，或称A**包含于**B，也叫做B**包含**A，记作$A\subset B$或$B\supset A$。若$A\subset B$并且$B\subset A$，则称A与B**相等**，记作$A=B$。

设A，B是两个集，由集A同集B的一切元所组成之集称为A与B的**并**（或**并集**），记作$A\cup B$。所有既属于A又属于B的元组成之集称为A与B**之交**（或**交集**），记作$A\cap B$。
即

$$A\cup B=\{x:x\in A或x\in B\},$$

$$A\cap B=\{x:x\in A且x\in B\}.$$

若$A\cap B=\phi$，则称A与B**不相交**。

自然，并与交的定义可以推广到一般的情形：

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:有\alpha\in I使x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x: 对一切 \alpha\in I 有 x\in A_\alpha\},$$

其中α是集的指标，它在某个固定的指标集I中变化。

由集A中不属于B的那些元的全体所组成之集称为A与B之**差**，记作$A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x: x\in A 且 x\notin B\}.$$

若$S\supset B$，则称差$S\setminus B$为**B关于S的补集**。若包含集S已经清楚地指明或由上下文能够理解时，就简称$S\setminus B$为**B的补集**。

设A与B都是非空集，一切可能的有序偶（a，b）（其中$a\in A$，$b\in B$）所组成之集称为A与B的**直积**，记为$A\times B$。类似于两个集的直积，可以定义任意多个集的直积。

设A，B是两个非空集。若依一定的法则f，对每个$x\in A$，在B中有一个确定的元y与之对应，则称f是定义在A上而在B中取值的**映射**（通常称数集到数集的映射为**函数**），记成f：$A\to B$，并将x与y的关系写成$y=f(x)$。我们称A为f的**定义域**，称$f(A)=\{f(x): x\in A\}$为f的**值域**。

设给定映射f：$A\to B$而$B=f(A)$，则称f是由A到B上的**满射**。如果对每个$y\in B$，仅有唯一的$x\in A$使得$f(x)=y$，则说f有**逆映射**f^{-1}（若A，B为数集，则通常称f^{-1}为f的**反函数**）。当映射f：$A\to B$有逆映射时，就称f是**一一映射**，并称A与B**成一一对应**。当集A与B成一一对应时，称它们**互相对等**。我们把互相对等的集归于同一类，不对等的集不属于同一类，对这样的每类集予以一个记号，称这个记号为这一类集中每个集的**势**或**基数**。集A的势记为$\overline{\overline{A}}$。于是，相互对等的集A，B，就具有相同的势，即$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$。

若集A与B不对等，但集B对等于集A的某个子集，则称A的势**大于**B的势，或B的势**小于**A的势，记为$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$，或$\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$。

我们用N代表正整数的全体，若集A对等于N，则称A为**可数集**或**可列集**．此时，记$\overline{\overline{A}}=\aleph_0$，读作“阿列夫零”．可以证明，任何区间中的一切有理数所成之集是可数集；任何区间中的一切代数数所成之集也是可数的．

若集A的势大于可数集的势，则称它为**不可数集**或**不可列集**．例如，区间〔0，1〕为不可数集．对等于区间〔0，1〕的任何集称为**具有连续统的势**的集．若集A具有连续统的势，则记为$\overline{\overline{A}}=\aleph$，读作“阿列夫”．

本书主要涉及n维欧氏空间R^n的子集，前六章主要涉及R^1的子集．

任取$a\in R^1$，称含有a的任一开区间为a的一个**开邻域**（简称**邻域**）．设$E\subset R^1$，$a\in E$，若存在a的某个邻域(α,β)，使得$(\alpha,\beta)\subset E$，则称a为E的**内点**．E的一切内点所成之集叫做E的**内域**，记为E°．若$E=E^\circ$，则称E为R^1中的**开集**．

设$E\subset R^1$，$a\in R^1$．若a的任一邻域均含有E的无穷多个点，则称a为E的**聚点**．E的一切聚点所成之集称为E的**导集**，记成E'．称$E\cup E'$为E的**闭包**，记为$\overline{E}$．E的导集E'的一切聚点所成之集称为E的**二阶导集**，并记为E''．高阶导集可以类似地定义．称$E\setminus E'$中的点为E的**孤立点**．若$E'\subset E$，则称E为**闭集**．若$E=E'$，则称E为**完备集**．

集E叫做**有上界**（**下界**）的，是指存在常数$M(m)$，使对一切$x\in E$有$x\leqslant M(x\geqslant m)$．$E$的最小上界（最大下界）称为$E$的**上确界**（**下确界**），记作

$$\sup E\ (\inf E).$$

既有上界又有下界的集称为**有界集**．

Weierstrass聚点原理　有界无穷集必有聚点．

若集E的闭包包含集A，则称E在A中**稠密**．特别，若集E在空间R^1中稠密，则称它在R^1中**处处稠密**．若集E的闭包不包

含任何非空开集，则称它在R^1中**无处稠密**或为**疏集**。

一个集叫做**第一纲集**，是指它可表成可数个疏集的并集；不是第一纲的集，就称它为**第二纲集**。

直线上的任何非空开集G可表成（并且是唯一的方法）有限个或可数个两两不相交的开区间的并。这些开区间称为G的**构成区间**。直线上的任何非空闭集F是由整个数轴去掉有限个或可数个两两不相交的开区间而得到，这些开区间称为F的**邻接区间**。

可表成可数个开集之交的任意集称为G_δ**集**；可表成可数个闭集之并的任意集称为$F\sigma$**集**。

所谓集E的一个**开覆盖**，是指这样的一组开集$\{G\alpha\}$，这组开集的并集包含E。这时，又称$\{G\alpha\}$覆盖E。

集E叫做**紧的**，是指E的每个开覆盖含有它的有限子覆盖。

Heiene-Borel **有限覆盖定理**　有界闭集的任何开覆盖必有有限子覆盖。

所谓实数集D的一个**Dedekind分割**，就是将D中的元素分成两个子集x和y，且满足下列条件：

（i）X与Y都不空；

（ii）$X\cap Y=\Phi$；

（iii）每一个属于X的元小于Y中的所有的元。称X为D的**前段**，Y为D的**后段**，且将D的分割记为（X，Y）。

Dedekind**分割原理**　全体实数R^1的任何一个分割(X，Y)，只能要么X有最大数，Y无最小数；要么X无最大数，Y有最小数。即对R^1的任何一个分割（X，Y），必存在唯一的实数$\alpha\in R^1$，使对任意的$x\in X$，$y\in Y$有

$$x\leqslant\alpha<y\quad 或\quad x<\alpha\leqslant y.$$

R^1的子集E称为**零测度集**，如果E能够包含于有限个或可数个开区间之内，而这些开区间的总长度可以任意小。由这个定义立即推知，零测度集的任何子集也是一个零测度集。有限个或

可数个零测度集的并也是一个零测度集；特别，R^1中任何有限集或可数集都是零测度集。

设有一个关于集E上的点x的命题$p(x)$。如果有E的零测度子集A，使$p(x)$在$E\setminus A$上恒成立，则称$p(x)$在E上**几乎处处成立**。

有关集和测度的进一步材料，读者可参看〔4〕，〔12〕或〔18〕。

我们再简要地介绍有关数列的一些基本概念和性质如下：

所谓**实数列**（简称**数列**），是指定义在正整数集N上的函数f。若对$n\in N$，有$f(n)=x_n$，习惯上以符号$\{x_n\}$表示数列f，有时也表示为x_1，x_2，…。f的值x_n叫做数列的**项**。

数列$\{x_n\}$称**以x为极限**，是指对任意$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，使当$n>n_0$时

$$|x_n-x|<\varepsilon.$$

这时称$\{x_n\}$**收敛**于x，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x \text{ 或 } x_n\to x\ (n\to\infty).$$

若$\{x_n\}$不是收敛的，则说它是**发散**的。

数列的极限运算满足算术运算法则。

极限的比较法则 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=c$，又

$$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n\ (n=1,2,\cdots),$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$。

数列$\{x_n\}$称为**Cauchy数列**，是指对任意$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，使m，$n>n_0$时

$$|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

Cauchy收敛准则 数列$\{x_n\}$收敛当且仅当它是Cauchy数列。

x 称为数列$\{x_n\}$的**极限点**，是指存在子列 $\{x_{n_k}\}$，使

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

值域有界的数列叫做有界数列。

Bolzano–Weierstrass**定理** 有界数列必有收敛子列。

数列$\{x_n\}$叫做**单调增加**（或**递增**）的，若对 $n=1, 2, \cdots$，有$x_n \leqslant x_{n+1}$；叫做**单调减少**（或**递减**）的，若对 $n=1, 2, \cdots$，有$x_n \geqslant x_{n+1}$。单调增加数列和单调减少数列统称为**单调数列**。

单调有界原理 递增（递减）有上界（下界）的数列必定收敛。

Cantor**区间套定理** 设$[a_n, b_n]$（$n=1, 2, \cdots$）是一列闭区间。又设

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$（$n=1, 2, \cdots$），

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，

则存在唯一数$x_0 \in [a_n, b_n]$（$n=1, 2, \cdots$）。

设$\{x_n\}$是一数列，$a_n = \sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$（$b_n = \inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$），于是

$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots$（$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots$，$a_n \geqslant b_n$）。称 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$（$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$）

为数列$\{x_n\}$的**上（下）极限**，记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$（$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$）。

显然，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在当且仅当$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$与$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$存在且相等；此时

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

问　　题

1. 设a_1，a_2，…，a_n是正数。证明

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \tag{1}$$

这是著名的n个正数的算术平均值不小于几何平均值。这个不等式有着广泛的应用，我们给出三种证明，它们分别属于Diananda[38]，Kong-Ming Chong[55]和Akerberg[21]。

证法 1　令 $A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,

$$G_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n},$$

其中a_i（$1\leqslant i\leqslant n$）全为正数。

对$n=2$，$A_2\geqslant G_2$显然成立。

设$n=m$成立，则$A_m\geqslant G_m$。于是，

$$A=\frac{a_{m+1}+(m-1)A_{m+1}}{m}\geqslant(a_{m+1}\ A_{m+1}^{m-1})^{1/m}$$

$$=G.$$

因此，

$$A_{m+1}=\frac{A_m+A}{2}\geqslant(A_mA)^{1/2}\geqslant(G_mG)^{1/2}$$

$$=(G_{m+1}^{m+1}\ A_{m+1}^{m-1})^{1/2m},$$

从而　$A_{m+1}\geqslant G_{m+1}$，故（1）成立。

证法 2 显然，（1）中等号成立，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。令

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 且 $a_1<a_n$，则显然有

$$a_1<A_n<a_n.$$

因而 $A_n(a_1+a_n-A_n)-a_1a_n=(a_1-A_n)(A_n-a_n)>0.$

（2）

$n=2$ 时不等式（1）显然成立。

设 $n-1$ 时（1）成立。

由于 a_2，a_3，…，a_{n-1} 和 $a_1+a_n-A_n$ 的算术平均值是 A_n，即

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_1+a_n-A_n}{n-1}=A_n,$$

故由归纳法假设得

$$A_n^{n-1}\geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A_n).$$

由（2）得

$$A_n^n\geqslant A_n(a_1+a_n-A_n)a_2a_3\cdots a_{n-1}$$

$$\geqslant a_1a_n\,a_2a_3\cdots a_{n-1},$$

即 $$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

证法 3 设 α 为一正数，n 是大于 1 的正整数。容易验证

$$(\alpha-1)[n-(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1})]\leqslant 0,$$

或 $$\alpha(n-\alpha^{n-1})\leqslant n-1, \tag{3}$$

且不等式除 $\alpha=1$ 外是严格的。令

$$\alpha=\left(\frac{a_1}{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

则由（3）得到

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n\geqslant a_1\left(\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}$$

逐次应用这一公式，得到

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n\geqslant a_1\left(\frac{a_2+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\geqslant a_1a_2\left(\frac{a_3+\cdots+a_n}{n-2}\right)^{n-2}\geqslant\cdots\geqslant$$

$$\geqslant a_1a_2\cdots a_n,$$

即 $$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

2.证明Cauchy-Schwarz不等式：

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

证 注意，对 $x\in R^1$ 皆有

$$\sum_{k=1}^n(a_kx+b_k)^2\geqslant 0.$$

令 $A=\sum_{k=1}^n a_k^2$，$B=\sum_{k=1}^n a_kb_k$，$C=\sum_{k=1}^n b_k^2$，于是

$$Ax^2+2Bx+C\geqslant 0.$$

不妨设 $A>0$，令 $x=-B/A$，则有

$$B^2 - AC \leqslant 0,$$

此即Cauchy－Schwarz不等式。

3.证明Minkowski不等式：

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证 注意

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k,$$

据Cauchy－Schwarz不等式

$$\sum_{k=1}^{n}a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

得到

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,$$

此即Minkowski不等式。

4.证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$。

证 因为

$$\frac{1+1+\cdots+1}{n} \leqslant \frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n},$$

所以

$$1 \leqslant \frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} \leqslant \sqrt[n]{n}.$$

容易证明，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。因此，由比较法则即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

5.设a_1，a_2，…，a_m为m个正数。证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}.$$

证 令$A=\max\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}$，则有不等式

$$A<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant A\cdot\sqrt[n]{m}.$$

因$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A=\max\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}.$$

6.设 $a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$。证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

证 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，故存在正整数$n_0$，当$n>n_0$时，$a_n/a_{n+1}>1$，因而$a_n>a_{n+1}$；又，$a_n>0$，故数列$\{a_n\}$单调递减且有下界，因而收敛。令

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

由于$a_n=(a_n/a_{n+1})\cdot a_{n+1}$，所以当$n\to\infty$时两边取极限，即得$a=0$。