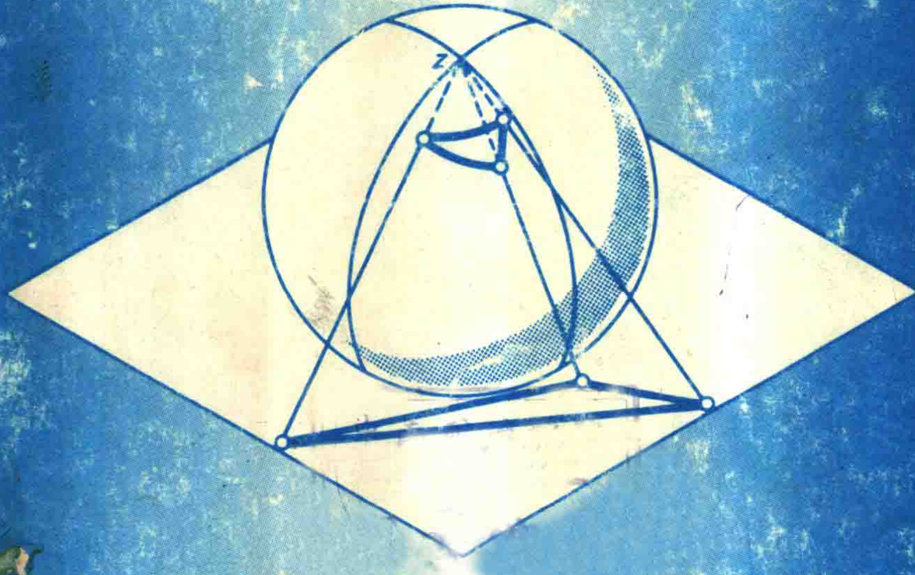
大專用書

圖形論及其應用

吳森原譯



國立編譯館出版

大專用書

圖形論及其應用

吳森原譯

國立編譯館出版

中華民國七十一年十一月一日台初版

圖形論及其應用

定價：精裝新台幣貳佰壹拾元；平裝新台幣壹佰柒拾元

譯著者：吳　森　原

出版者：國立編譯館

印行者：國立編譯館

館　址：台北市舟山路二四七號

電　話：三二一六一七一

序

本書的目的是在介紹圖形理論。我們的目的是將圖形學的基本知識，配合它在其他數學分支與實際生活所碰到的問題，加以融合介紹。在本書中，我們包括了Brooks,Chvátal,Tutte與Vizing等定理的最新證明方法。應用方面的取材相當謹愼與深入，若是只有圖形學的術語而無理論的應用，本書均不列入。應用部分附在每章的最後一節，以便應用本章前節中所討論的理論。我們也注意到解決問題有效方法的重要性。我們包括了一些好的算法並且也分析它的有效性，然而，我們並沒有將這些算法，改換成電子計算機的語言。

在每節後面的習題，有些問題是相當難的，這些難題都加上星號(*)表示，在本書附錄工中，可以找到提示。在某些習題中，我們並介紹一些新的定義，我們建議讀者應熟悉這些定義。在習題中，以粗體字標出者，表示將在後面的章節中用到，這些問題都應該加以演算。

附錄Ⅱ是一個表，其中表明了四個圖形的基本性質。當書中有新的定義時，讀者應當核對這一個表，以增加了解定義之意義。附錄Ⅲ是經過挑選，具有某些特別性質的有趣圖形，這些圖形對於證明新的推測，將會有用的。附錄Ⅳ我們收集了許多目前仍未解決的問題，有些是相當難的，有些則是很有希望被解決的。讀者進一步閱讀的資料則放在附錄Ⅴ。

在本書的寫作過程中，有很多人直接或間接的惠予協助。我們特別感謝教導我們圖形學的C. Berge與D. J. A. Welsh；我們也感謝

G. A. Dirac, J. Edmonds, L. Lovász 與 W. T. Tutte,因爲他們的著作啟發了我們撰寫本書的動機；我們也感謝曾仔細閱讀本書初稿與提出很有價值之建議的 V. Chungphaisan 與 C. St. J. A. Nash-Williams，並感謝到處受人尊敬的長者 W. E. Gladstone仁慈而又經常不斷的鼓勵。

我們也希望讓此機會向滑鐵盧大學的 S. B. Maurer, P. J. O'Halloran, C. Thomassen, B. Toft 及各同事們致謝，因爲他們曾給我們許多的建議；我們也感謝加拿大國家研究委員會在財政方面的支持。最後，我們僅向幫助我們打字的 Joan Selwood 及繪圖的 Diana Rajnovich 致謝。

J. A. Bondy

U. S. R. Murty

目　　錄

1 圖形與部分圖形

1.1 圖形與簡單圖形

世界上有許多事物，都可用點與線所形成的圖來表示。例如，以點來表示人，以線來表示某二人是朋友；或是以點表示通信中心，而以線表示通信線路。在這種表示的圖中，最主要的是已知二點之間，是否有一條線連接起來；至於如何連接，則無關緊要。將此種情況加以數學抽象化，因而產生了圖形的概念。

一個**圖形**(graph) G 是由有序的三元素 (V(G) , E(G) , ϕ_G) 所組成，其中 V (G) 是一個非空集合，其中元素稱爲**頂點**(vertices), E(G) 是一個與 V(G) 相異的集合，其中元素稱爲**邊**(edges), ϕ_G 是一個**接合函數**(incidence function) 表示 G 中無序的二頂點所對應 G 中的邊。若 e 是一條邊且 u 與 v 是頂點，使得 $\phi_G(e)=uv$ ，則 e 稱爲連結 u 與 v ；而頂點 u 與 v 稱爲 e 的端點。

下面二個圖形的例子，可使上面的定義清楚明白。

例 1 $G=(V(G),E(G),\phi_G)$

其中

$$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$$

$$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$$

且ψ_G 定義如下

$\psi_G(e_1)=v_1v_2$ ，$\psi_G(e_2)=v_2v_3$ ，$\psi_G(e_3)=v_3v_3$ ，

$\psi_G(e_4)=v_3v_4$ ，$\psi_G(e_5)=v_2v_4$ ，$\psi_G(e_6)=v_4v_5$ ，

$\psi_G(e_7)=v_2v_5$ ，$\psi_G(e_8)=v_2v_5$

例2 $H=(V(H),E(H),\psi_H)$

其中

$$V(H)=\{u,v,w,x,y\}$$

$$E(H)=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

且ψ_H 定義如下

$\psi_H(a)=uv$ ，$\psi_H(b)=u\mu$ ，$\psi_H(c)=vw$ ，$\psi_H(d)=wx$ ，

$\psi_H(e)=vx$ ，$\psi_H(f)=wx$ ，$\psi_H(g)=ux$ ，$\psi_H(h)=xy$ ，

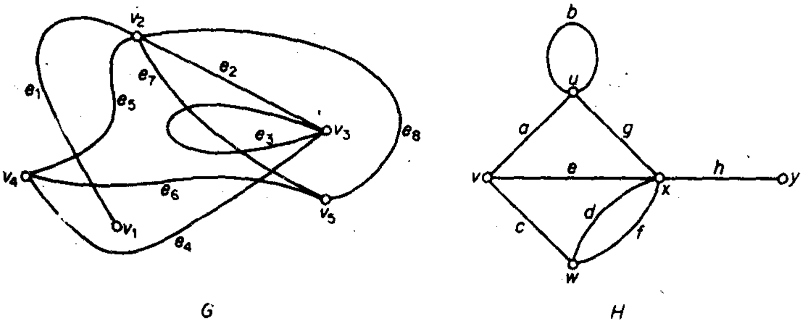


圖 1.1 圖形 G 與 H 的表示法

因爲這些代數式子可用圖來表示，故稱爲圖形，而且藉用這種圖，我們可以得到很多的性質。圖形的頂點，在平面上以一個點來表示，圖形的邊則以連接二個端點的線來表示。圖形G與H的表示方法如圖1.1所示。（爲清楚起見，頂點以小圓圈表示之。）

圖形的畫法並不只一種；在平面上畫出的點與線的位置，並不重要。例如，圖1.2即表示圖形G的另一種畫法。一個圖形的畫法，只

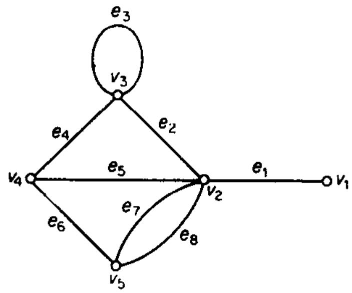


圖 1.2 圖形 G 的另一種表示法

是表示圖形的頂點與邊有接合關係而已，因此，我們經常以一個圖直接表示圖形本身，圖中的點即表示圖形的頂點，圖中的線即表示圖形的邊。

一個圖形用圖來表示時，它的二個邊可能會相交於一點，但此點並非圖形的頂點（例如，在圖 1.1 中圖形G的二條邊e_1 與 e_6）。若一個圖形可用圖來表示，使圖中各邊只相交於端點，則這種圖形稱爲**可平面化**(planar)，因爲這種圖形可在平面上簡單的表示出來，圖 1.3a 的圖形即是一個可平面化的圖形，雖然乍看之下並不太顯然（參見習題1.1.2）圖1.3 b 的圖形則是不可平面化（將於第9章證明）

圖形理論中的大部份定義與觀念都是由圖的表示法而產生。一個邊的端點稱爲**接合**(incident)於邊，反之亦然。接合於一個共同邊的二個頂點稱爲**相鄰**(adjacent)，二個邊接合於一個共同的頂點也稱爲相降。只有一個端點的邊稱爲**迴路**(loop)，有二個相異端點的邊稱爲**連邊**(link)。例如，在圖 1.2的圖形G中，邊e_3 是一個迴路，其他的邊都是連邊。

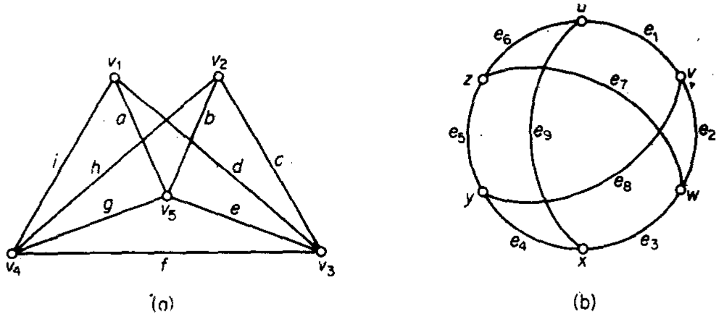


圖 1.3 可平面化與不可平面化圖形

若一個圖形的頂點集合與邊集合都是有限集合，則此圖形稱爲**有限**(finite)。在本書中我們只討論有限圖形，因此當我們提到"圖形"時，其意即爲"有限圖形"。只有一個頂點所成的圖形稱爲**顯明的**(trivial)，其他圖形稱爲**非顯明的**(nontrivial)。

若一個圖形沒有迴路且沒有二個連環連接相同的二個頂點，則此圖形稱爲**簡單的**(simple)。圖 1.1 的圖形並不是簡單圖形，但圖 1.3 的圖形則是簡單圖形。圖形論的大部分內容都是只研究簡單圖形。

我們以符號 $\nu(G)$ 與 $\varepsilon(G)$ 分別表示圖形 G 中頂點的個數與邊的個數。在本書中，我們均以存母 G 表示圖形。同時，若僅討論到一個圖形時，則我們通常以 G 表示此圖形。我們也在圖形理論的符號中將 G 省略，例如，以 V，E，ν 和 ε 分別代表 $V(G)$，$E(G)$，$\nu(G)$ 與 $\varepsilon(G)$。

習題

1.1.1 在日常生活中，舉出五種情況可用圖形來表示者。

1.1.2 將圖 1.3a 的圖形另外畫出一個圖，用來表示它是可平面化。

1.1.3 證明若G是簡單圖形，則 $\varepsilon \leqslant \binom{\nu}{2}$。

1.2 圖形同構

二個圖形G與H中，若$V(G)=V(H)$, $E(G)=E(H)$ 且$\psi_G=\psi_H$，則稱此二圖形是**相同的**（identical），(以$G=H$表示)。若二個圖形是相同的，則顯然可用相同的圖來表示。例如，圖1.2中圖形G與圖1.1中的H看起來是相同的，只是它們的頂點與邊的標號不同而已。這二個圖形G與H是不相同的，但它們是同構的。一般而言，設G與H是二個圖形，若存在二個一對一且映成的函數$\theta : V(G) \to V(H)$與$\phi : E(G) \to E(H)$使得$\psi_G(e)=uv$若且唯若$\psi_H(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$，則稱G與H是**同構的**（isomorphic）(以$G \cong H$表示)；這種寫像的序對(θ, ϕ)稱爲G與H的**同構**（isomorphism）。

欲證明二個圖形是同構的，我們必須找出它們的同構。在例1與例2中，寫像序對(θ, ϕ)定義如下：

$$\theta(v_1)=y \ , \ \theta(v_2)=x \ , \ \theta(v_3)=u \ , \ \theta(v_4)=v \ , \ \theta(v_5)=w$$

且

$$\phi(e_1)=h \ , \ \phi(e_2)=g \ , \ \phi(e_3)=b \ , \ \phi(e_4)=a \ ,$$

$$\phi(e_5)=e \ , \ \phi(e_6)=c \ , \ \phi(e_7)=d \ , \ \phi(e_8)=f \ ,$$

則此序對(θ, ϕ)即是圖形G與H的一個同構；圖形G與H的結構顯然相同，只是頂點與邊的名稱不同而已。既然我們主要研究的是圖形的結構，所以通常我們畫圖形時，都把它的標號省略；一個沒有標號的圖形，可視爲代表同構圖形的一個同義類。我們對於一個圖形的頂點與邊加以標號，其主要目的是爲了敍述方便。例如，當討論到簡單圖形時，把由端點u與v所形成的邊，稱爲“邊uv”自然比較方便

。（在簡單圖形中，這種簡便的稱呼，並不會引起混淆，因爲至多只有一個邊連結頂點的序對）。

在本節將結束時，我們再介紹一些特殊的圖形。若一個簡單圖形中任意二個相異頂點都有一個邊連結之，則稱爲一個**完全圖形**（complete graph）。按照同構觀之，具有 n 個頂點的完全圖形恰有一個，以 K_n 表示。圖 1.4a 表示 K_5 。另一方面，沒有任何邊的圖形，稱爲**空圖形**（empty graph）。若一個圖形的頂點集合可以分割成二個彼此互斥的非空部分集合 X 與 Y，使得圖形的每一邊各有一個端點在 X 中，另外一個端點在 Y 中時，則此圖形稱爲一個**二裂圖形**（bipartite graph）；這種分割（X，Y）稱爲圖形的一種**双割**（bipartition）。一個**完全二裂圖形**（Complete bipartite grap

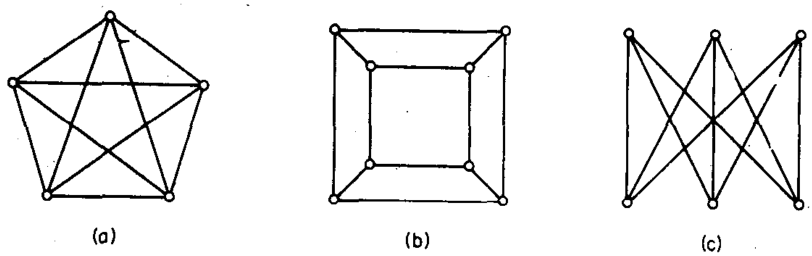


圖 1.4 (a) K_5；(b) 立方體；(c) $K_{3,3}$

一個簡單的二裂圖形，其双割爲（X，Y）且 X 中的每一頂點均與 Y 中的每一頂點相隣；若 $|X|=m$ 且 $|Y|=n$ ，則這樣圖形以 $K_{m,n}$ 表示。由立方體的點與線表示圖形的頂點與邊的圖形，就是一個二裂圖形（圖 1.4 b）；圖 1.4 c 表示一個完全二裂圖形 $K_{3,3}$ 。

此外還有許多圖形，其結構很特殊，且很有趣味。在附錄Ⅲ中，我們選輯了一些這種圖形。

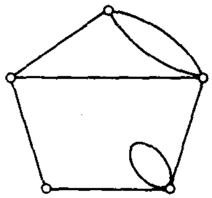
習題

1.2.1 在例題 1 與例題 2 中，求出圖形 G 與 H 的另一個同構函數。

1.2.2 (a)證明若 $G \cong H$，則 $\nu(G)=\nu(H)$ 且 $\varepsilon(G)=\varepsilon(H)$。

(b)舉一個例子以證明(a)的逆命題不成立。

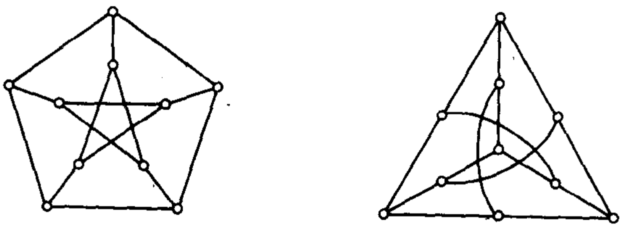
1.2.3 證明下面二個圖形並非同構。



1.2.4 證明由 4 個頂點所形成的圖形，共有十一種非同構的簡單圖形。

1.2.5 證明二個簡單圖形 G 與 H 同構若且唯若存在一個一對一且映成之函數 $\theta: V(G) \to V(H)$ 使得 $uv \in E(G)$。若且唯若 $\theta(u)\theta(\nu) \in E(H)$。

1.2.6 證明下面二個圖形是同構。



1.2.7 設 G 是簡單圖形。證明 $\varepsilon = \binom{\nu}{2}$ 若且唯若 G 是完全圖形。