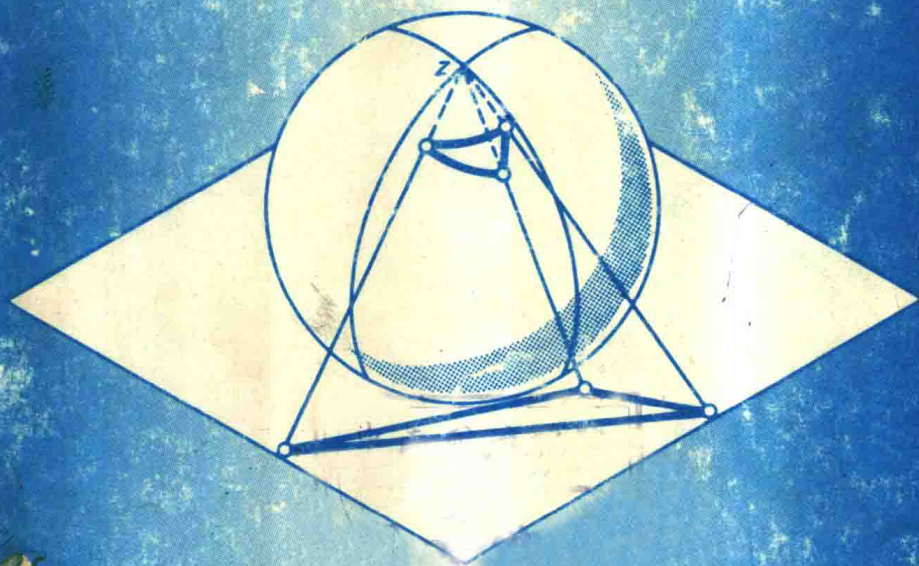


大專用書

圖形論及其應用

吳森原譯



國立編譯館出版

大 專 用 書

圖形論及其應用

吳 森 原 譯

江苏工业学院图书馆
藏 书 章

國 立 編 譯 館 出 版

中華民國七十一年十一月一日台初版

圖形論及其應用

版權所有
翻印必究

定價：精裝新台幣貳佰壹拾元
平裝壹佰柒拾元

譯著者：吳 森 原

出版者：國立編譯館

印行者：國立編譯館

館址：台北市舟山路二四七號

電話：三二一六一七一

序

本書的目的是在介紹圖形理論。我們的目的是將圖形學的基本知識，配合它在其他數學分支與實際生活所碰到的問題，加以融合介紹。在本書中，我們包括了Brooks, Chvátal, Tutte 與 Vizing 等定理的最新證明方法。應用方面的取材相當謹慎與深入，若是只有圖形學的術語而無理論的應用，本書均不列入。應用部分附在每章的最後一節，以便應用本章前節中所討論的理論。我們也注意到解決問題有效方法的重要性。我們包括了一些好的算法並且也分析它的有效性，然而，我們並沒有將這些算法，改換成電子計算機的語言。

在每節後面的習題，有些問題是相當難的，這些難題都加上星號(*)表示，在本書附錄Ⅰ中，可以找到提示。在某些習題中，我們並介紹一些新的定義，我們建議讀者應熟悉這些定義。在習題中，以粗體字標出者，表示將在後面的章節中用到，這些問題都應該加以演算。

附錄Ⅱ是一個表，其中表明了四個圖形的基本性質。當書中有新的定義時，讀者應當核對這一個表，以增加了解定義之意義。附錄Ⅲ是經過挑選，具有某些特別性質的有趣圖形，這些圖形對於證明新的推測，將會有用的。附錄Ⅳ我們收集了許多目前仍未解決的問題，有些是相當難的，有些則是很有希望被解決的。讀者進一步閱讀的資料則放在附錄Ⅴ。

在本書的寫作過程中，有很多人直接或間接的惠予協助。我們特別感謝教導我們圖形學的 C. Berge 與 D. J. A. Welsh；我們也感謝

G. A. Dirac, J. Edmonds, L. Lovász 與 W. T. Tutte, 因為他們的著作啟發了我們撰寫本書的動機；我們也感謝曾仔細閱讀本書初稿與提出很有價值之建議的 V. Chungphaisan 與 C. St. J. A. Nash-Williams, 並感謝到處受人尊敬的長者 W. E. Gladstone 仁慈而又經常不斷的鼓勵。

我們也希望讓此機會向滑鐵盧大學的 S. B. Maurer, P. J. O'Halloran, C. Thomassen, B. Toft 及各同事們致謝，因為他們曾給我們許多的建議；我們也感謝加拿大國家研究委員會在財政方面的支持。最後，我們僅向幫助我們打字的 Joan Selwood 及繪圖的 Diana Rajnovich 致謝。

J. A. Bondy

U. S. R. Murty

目 錄

序.....	iii
--------	-----

1 圖形與部分圖形

1.1 圖形與簡單圖形.....	1
1.2 圖形同構.....	5
1.3 接合與相隣矩陣.....	10
1.4 部分圖形.....	11
1.5 頂點價數.....	14
1.6 路線與連通.....	16
1.7 循環.....	20
應用.....	22
1.8 最短路線問題.....	22
1.9 Sperner 引理.....	30

2 樹

2.1 樹.....	34
2.2 割邊與鍵.....	37
2.3 割頂點.....	42
2.4 Cayley 公式.....	44
應用.....	49

2.5	連通管問題.....	49
3	連通數	
3.1	連通數.....	57
3.2	塊形.....	60
	應用.....	65
3.3	建造實用的通信網路.....	65
4	<i>Euler</i>環遊與<i>Hamilton</i>循環	
4.1	<i>Euler</i> 環遊.....	69
4.2	<i>Hamilton</i> 循環.....	72
	應用.....	84
4.3	中國郵差問題.....	84
4.4	旅行推銷員問題.....	88
5	配對	
5.1	配對.....	93
5.2	二裂圖形的配對與覆蓋.....	96
5.3	完備配對.....	102
	應用.....	107
5.4	人員分派問題.....	107
5.5	最佳分派問題.....	113
6	邊着色	
6.1	邊色彩數.....	120

6.2	Vizing 定理	124
	應用	128
6.3	時刻表問題	128
7	獨立集合與結塊	
7.1	獨立集合	134
7.2	Ramsey 定理	137
7.3	Tur'an 定理	145
	應用	149
7.4	Schur 定理	149
7.5	一個幾何問題	151
8	頂點着色	
8.1	色彩數	156
8.2	Brooks 定理	163
8.3	Hajós 推測	165
8.4	色彩多項式	167
8.5	腰長與色彩數	173
	應用	175
8.6	一個倉庫問題	175
9	可平面化圖形	
9.1	平面與可平面化圖形	180
9.2	對偶圖形	185
9.3	Euler 公式	190

viii 圖形論及其應用

9.4	橋	194
9.5	Kuratowski 定理	201
9.6	五色定理與四色推測	207
9.7	非 Hamilton 可平面化圖形	213
	應用	216
9.8	一種平面化的算法	217

10 有向圖形

10.1	有向圖形	225
10.2	有向路線	229
10.3	有向循環	233
	應用	238
10.4	一個工作序列問題	238
10.5	設計一個有效的電算鼓	240
10.6	建造一個單行道的道路系統	243
10.7	評審參加比賽者的等級	245

11 網路

11.1	流程	252
11.2	割	256
11.3	極大流程極小割定理	259
	應用	267
11.4	Menger 定理	267
11.5	可行流程	272

12 循環空間與鍵空間

12.1	環流與位差	279
12.2	張成樹的個數	287
	應用	290
12.3	完備正方形	290
附錄 I	星號習題提示	298
附錄 II	四個圖形及其各種性質表	306
附錄 III	有趣的圖形	308
附錄 IV	未解決的問題	321
附錄 V	進一步閱讀的資料	336
	符號總彙	338
	索引	343

1 圖形與部分圖形

1.1 圖形與簡單圖形

世界上有許多事物，都可用點與線所形成的圖來表示。例如，以點來表示人，以線來表示某二人是朋友；或是以點表示通信中心，而以線表示通信線路。在這種表示的圖中，最主要的是已知二點之間，是否有一條線連接起來；至於如何連接，則無關緊要。將此種情況加以數學抽象化，因而產生了圖形的概念。

一個圖形(graph) G 是由有序的三元素 $(V(G), E(G), \phi_G)$ 所組成，其中 $V(G)$ 是一個非空集合，其中元素稱為頂點(vertices)， $E(G)$ 是一個與 $V(G)$ 相異的集合，其中元素稱為邊(edges)， ϕ_G 是一個接合函數(incidence function) 表示 G 中無序的二頂點所對應 G 中的邊。若 e 是一條邊且 u 與 v 是頂點，使得 $\phi_G(e) = uv$ ，則 e 稱為連結 u 與 v ；而頂點 u 與 v 稱為 e 的端點。

下面二個圖形的例子，可使上面的定義清楚明白。

例1 $G = (V(G), E(G), \phi_G)$

其中

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

2 圖形論及其應用

且 ϕ_G 定義如下

$$\begin{aligned}\phi_G(e_1) &= v_1v_2, \phi_G(e_2) = v_2v_3, \phi_G(e_3) = v_3v_3, \\ \phi_G(e_4) &= v_3v_4, \phi_G(e_5) = v_2v_4, \phi_G(e_6) = v_4v_5, \\ \phi_G(e_7) &= v_2v_5, \phi_G(e_8) = v_2v_5\end{aligned}$$

例 2 $H = (V(H), E(H), \phi_H)$

其中

$$\begin{aligned}V(H) &= \{u, v, w, x, y\} \\ E(H) &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}\end{aligned}$$

且 ϕ_H 定義如下

$$\begin{aligned}\phi_H(a) &= uv, \phi_H(b) = uu, \phi_H(c) = vw, \phi_H(d) = wx, \\ \phi_H(e) &= vx, \phi_H(f) = wx, \phi_H(g) = ux, \phi_H(h) = xy,\end{aligned}$$

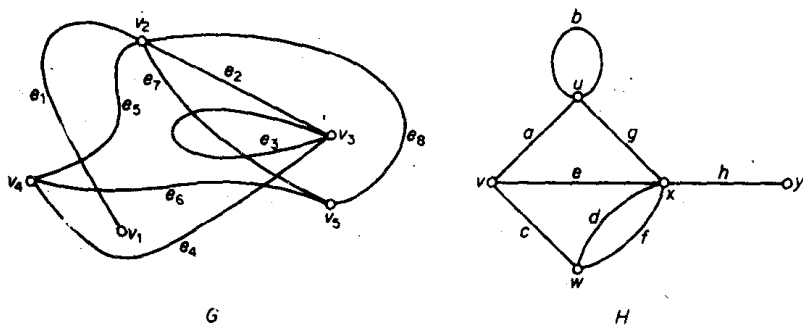


圖 1.1 圖形 G 與 H 的表示法

因為這些代數式子可用圖來表示，故稱為圖形，而且藉用這種圖，我們可以得到很多的性質。圖形的頂點，在平面上以一個點來表示，圖形的邊則以連接二個端點的線來表示。圖形 G 與 H 的表示方法如圖 1.1 所示。（為清楚起見，頂點以小圓圈表示之。）

圖形的畫法並不只一種；在平面上畫出的點與線的位置，並不重要。例如，圖 1.2 即表示圖形 G 的另一種畫法。一個圖形的畫法，只

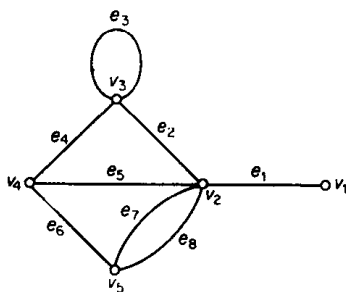


圖 1.2 圖形 G 的另一種表示法

是表示圖形的頂點與邊有接合關係而已，因此，我們經常以一個圖直接表示圖形本身，圖中的點即表示圖形的頂點，圖中的線即表示圖形的邊。

一個圖形用圖來表示時，它的二個邊可能會相交於一點，但此點並非圖形的頂點（例如，在圖 1.1 中圖形 G 的二條邊 e_1 與 e_6 ）。若一個圖形可用圖來表示，使圖中各邊只相交於端點，則這種圖形稱為可平面化 (planar)，因為這種圖形可在平面上簡單的表示出來，圖 1.3a 的圖形即是一個可平面化的圖形，雖然乍看之下並不太顯然（參見習題 1.1.2）圖 1.3b 的圖形則是不可平面化（將於第 9 章證明）

圖形理論中的大部份定義與觀念都是由圖的表示法而產生。一個邊的端點稱為接合 (incident) 於邊，反之亦然。接合於一個共同邊的二個頂點稱為相鄰 (adjacent)，二個邊接合於一個共同的頂點也稱為相隣。只有一個端點的邊稱為迴路 (loop)，有二個相異端點的邊稱為連邊 (link)。例如，在圖 1.2 的圖形 G 中，邊 e_3 是一個迴路，其他的邊都是連邊。

4 圖形論及其應用

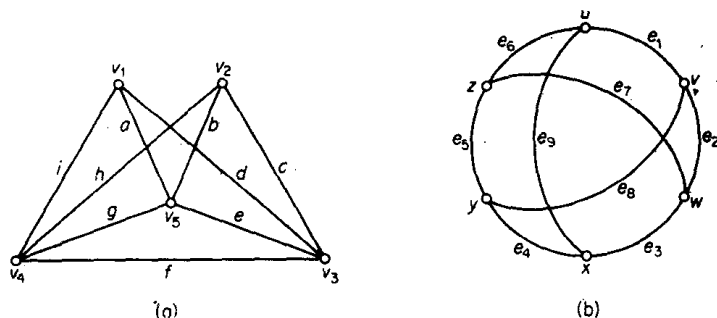


圖 1.3 可平面化與不可平面化圖形

若一個圖形的頂點集合與邊集合都是有限集合，則此圖形稱為**有限 (finite)**。在本書中我們只討論有限圖形，因此當我們提到“圖形”時，其意即為“有限圖形”。只有一個頂點所成的圖形稱為**顯明的 (trivial)**，其他圖形稱為**非顯明的 (nontrivial)**。

若一個圖形沒有迴路且沒有二個連環連接相同的二個頂點，則此圖形稱為**簡單的 (simple)**。圖 1.1 的圖形並不是簡單圖形，但圖 1.3 的圖形則是簡單圖形。圖形論的大部分內容都是只研究簡單圖形。

我們以符號 $\nu(G)$ 與 $\epsilon(G)$ 分別表示圖形 G 中頂點的個數與邊的個數。在本書中，我們均以存母 G 表示圖形。同時，若僅討論到一個圖形時，則我們通常以 G 表示此圖形。我們也在圖形理論的符號中將 G 省略，例如，以 V, E, ν 和 ϵ 分別代表 $V(G), E(G), \nu(G)$ 與 $\epsilon(G)$ 。

習題

1.1.1 在日常生活中，舉出五種情況可用圖形來表示者。

1.1.2 將圖 1.3 a 的圖形另外畫出一個圖，用來表示它是可平面化。

1.1.3 證明若 G 是簡單圖形，則 $\varepsilon \leq \binom{v}{2}$ 。

1.2 圖形同構

二個圖形 G 與 H 中，若 $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ 且 $\phi_G = \phi_H$ ，則稱此二圖形是**相同的** (identical), (以 $G=H$ 表示)。若二個圖形是相同的，則顯然可用相同的圖來表示。例如，圖 1.2 中圖形 G 與圖 1.1 中的 H 看起來是相同的，只是它們的頂點與邊的標號不同而已。這二個圖形 G 與 H 是不相同的，但它們是同構的。一般而言，設 G 與 H 是二個圖形，若存在二個一對一且映成的函數 $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ 與 $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ 使得 $\phi_G(e) = uv$ 若且唯若 $\phi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$ ，則稱 G 與 H 是**同構的** (isomorphic) (以 $G \cong H$ 表示)；這種寫像的序對 (θ, ϕ) 稱為 G 與 H 的**同構** (isomorphism)。

欲證明二個圖形是同構的，我們必須找出它們的同構。在例 1 與例 2 中，寫像序對 (θ, ϕ) 定義如下：

$\theta(v_1) = y$, $\theta(v_2) = x$, $\theta(v_3) = u$, $\theta(v_4) = v$, $\theta(v_5) = w$
且

$$\phi(e_1) = h$$
 , $\phi(e_2) = g$, $\phi(e_3) = b$, $\phi(e_4) = a$,

$$\phi(e_5) = e$$
 , $\phi(e_6) = c$, $\phi(e_7) = d$, $\phi(e_8) = f$,

則此序對 (θ, ϕ) 即是圖形 G 與 H 的一個同構；圖形 G 與 H 的結構顯然相同，只是頂點與邊的名稱不同而已。既然我們主要研究的是圖形的結構，所以通常我們畫圖形時，都把它標號省略；一個沒有標號的圖形，可視為代表同構圖形的一個同義類。我們對於一個圖形的頂點與邊加以標號，其主要目的是為了敘述方便。例如，當討論到簡單圖形時，把由端點 u 與 v 所形成的邊，稱為“邊 uv ” 自然比較方便

6 圖形論及其應用

。(在簡單圖形中，這種簡便的稱呼，並不會引起混淆，因為至多只有一個邊連結頂點的序對)。

在本節將結束時，我們再介紹一些特殊的圖形。若一個簡單圖形中任意二個相異頂點都有一個邊連結之，則稱為一個**完全圖形** (complete graph)。按照同構視之，具有 n 個頂點的完全圖形恰有一個，以 K_n 表示。圖 1.4a 表示 K_5 。另一方面，沒有任何邊的圖形，稱為**空圖形** (empty graph)。若一個圖形的頂點集合可以分割成二個彼此互斥的非空部分集合 X 與 Y ，使得圖形的每一邊各有一個端點在 X 中，另外一個端點在 Y 中時，則此圖形稱為一個**二裂圖形** (bipartite graph)；這種分割 (X, Y) 稱為圖形的一種**双割** (bipartition)。一個**完全二裂圖形** (Complete bipartite graph)

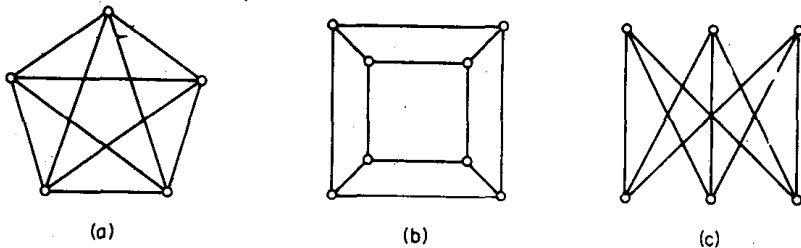


圖 1.4 (a) K_5 ; (b) 立方體; (c) $K_{3,3}$

一個簡單的二裂圖形，其双割為 (X, Y) 且 X 中的每一頂點均與 Y 中的每一頂點相隣；若 $|X| = m$ 且 $|Y| = n$ ，則這樣圖形以 $K_{m,n}$ 表示。由立方體的點與線表示圖形的頂點與邊的圖形，就是一個二裂圖形 (圖 1.4 b)；圖 1.4 c 表示一個完全二裂圖形 $K_{3,3}$ 。

此外還有許多圖形，其結構很特殊，且很有趣味。在附錄 III 中，我們選輯了一些這種圖形。

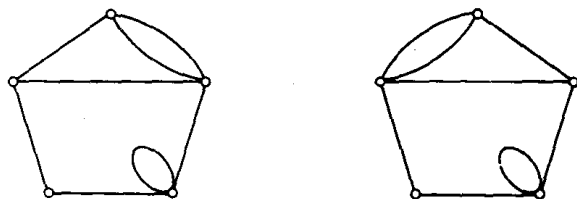
習題

1.2.1 在例題 1 與例題 2 中，求出圖形 G 與 H 的另一個同構函數。

1.2.2 (a) 證明若 $G \cong H$ ，則 $\nu(G) = \nu(H)$ 且 $\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$ 。

(b) 舉一個例子以證明(a)的逆命題不成立。

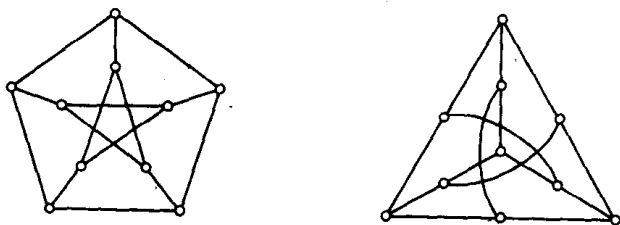
1.2.3 證明下面二個圖形並非同構。



1.2.4 證明由 4 個頂點所形成的圖形，共有十一種非同構的簡單圖形。

1.2.5 證明二個簡單圖形 G 與 H 同構若且唯若存在一個一對一且映成之函數 $\theta: V(G) \rightarrow V(H)$ 使得 $uv \in E(G)$ 。若且唯若 $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$ 。

1.2.6 證明下面二個圖形是同構。



1.2.7 設 G 是簡單圖形。證明 $\varepsilon = \binom{\nu}{2}$ 若且唯若 G 是完全圖形。