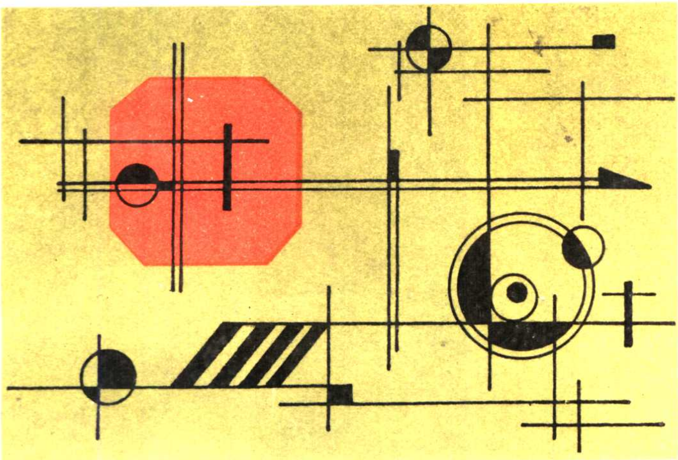
北京教育丛书



中学立体几何教学

李振纯 陈萃联 马成瑞 北京教育出版社

中学立体几何教学

zhōngxué lìtǐjǐhé jiàoxué

李振纯　陈萃联　马成瑞　著

*

北京教育出版社出版

（北京北三环中路6号）

邮政编码：100011

北京出版社总发行

新华书店北京发行所经销

北京市平谷县胶印厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　6.125印张　125000字

1991年11月第1版　1991年11月第1次印刷

印数：1～7000册

ISBN 7-5303-0240-x/G·218

定价：3.65元

《北京教育丛书》编辑委员会

序

徐　惟　诚

教育事业的重要，已经日益被愈来愈多的人认识了。

中国要振兴，归根到底要靠我们中国人自己努力奋斗，要靠我们的全体劳动者创造出数十倍于今日的劳动生产率。这是一个全体国民素质提高的过程，人们自然要寄希望于教育。

要搞好教育，需要做许多事情，其中最根本的还是要靠人，靠教师，尤其是担负着国民基础教育任务的中小学教师。

教师的重担，关系着祖国未来的命运，也关系着每一个教育对象未来的命运。他们所教的学生在未来的社会条件下，究竟怎样做人，怎样立身处事，能不能用自己的双手为社会做出贡献，从而也创造自己的幸福生活，在相当大的程度上取决于在青少年时代所受到的教育。

我们知道，人，是世上已知物质发展的最高形态。关于人的意识、观念、智力的形成和发展的规律，我们离知道得很清楚还有很大的距离。社会主义的教育科学需要有一个大发展，这是毫无疑义的。

在教书育人第一线工作的广大中小学教师，对社会主义

教育科学的发展应当有特殊的贡献。他们当中的许多人把一辈子的心血都用来为祖国培育后代，造就人才，积累了丰富的经验。这些经验理当成为整个教育战线的共同财富。可是由于种种原因，这件总结和传播经验的工作过去做得还很不够。为此，中共北京市委和北京市人民政府决定，拨出专款，指定专人组成编委会，编辑出版一套《北京教育丛书》。这个决定受到广大中小幼教师的欢迎和支持。在短短一年多时间内，已经报来几百部书稿。又有一批热心而有经验的同志担任编审工作，看来任务是可以完成的。

我们相信，《北京教育丛书》的编辑出版，对于鼓励广大教师钻研业务，积累经验，对于传播和交流这些经验，对于推动教育科学研究，对于提高普通教育的水平，都是有积极作用的。同时，这套丛书的出版，也将有助于人们认识教师所作的艰苦的、创造性的劳动。

改革和建设的大潮在祖国大地上汹涌澎湃，每天都有许多新问题提到我们面前来，也把许多新问题提到我们的教育工作者面前。这是一个需要有许多新创造的时代。教育战线上的同志们为祖国的振兴所建立的功绩，是不会被人们忘记的。

前　言

在数学教学实践中，我们有两点感触较深。一是怎样让学生爱学、乐此不疲；一是怎样让学生会学，其中大有学问。我们接触到一些学生，常常为记不住公式、法则和不会解题而苦恼。有的学生说“数学这门学科就像抽象派绘画一样令人费解”，有的说“‘数学是上帝用来书写宇宙的文字’（迦俐略），这是我最信仰的话，但是将来我绝不学数学”。我们有一个共同的心愿，希望学生通过数学课的学习变得更聪明，希望我们的学生对数学课也能爱学、乐学，甚至产生如醉如痴的兴趣。

在我们多年教学实践中，为了让学生爱学、会学，我们进行了一些探索，把我们认为正确的教学指导思想和行之有效的教学方法记录下来整理成书，奉献给青年教师，并希望与广大的数学教师们进行深一步的探讨。教育教学无止境，只顾攀登莫问高，愿与广大教师共同切磋。

本书由李振纯主编，参加编写的有陈萃联、马成瑞。全书由张振江审定。

不当之处，欢迎指正。

作者：1991年 4 月

目　录

第一章

立体几何教学中的几个问题

立体几何是研究空间图形的基本性质和数量关系的学科．按我国教学大纲规定，立体几何的教学要求有三条：(1) 掌握直线和平面在空间的位置关系、简单的多面体和旋转体的概念、性质，以及其表面积和体积的计算公式，能够运用这些知识解决有关问题。(2)掌握涉及直线和平面各种位置关系的图形画法，以及简单多面体和旋转体的直观图画法．(3) 通过空间图形的概念、性质和画法的学习，逐步发展学生的空间想象能力，进一步培养学生的逻辑思维能力．

统观整个中学数学，可总结为“六关”、“六法”、“六思想”。六关即用字母表示数，反映从算术到代数的飞跃；形式逻辑三段论，反映从代数到几何的飞跃；函数概念的形成与发展，反映从常量数学到变量数学的飞跃；空间观念的形成，反映从平面到空间的飞跃；坐标法研究曲线，反映推理几何到解析几何的飞跃；极限理论，反映从有限到无限的飞跃等。“六法”指的是配方法、换元法、待定系数法、判别式法、反证法、数学归纳法等六个数学通法．“六思想”指的是字母表示数的思想、逻辑推理的思想、方程与函数的思想、集合与对应的思想、分解与组合的思想、转化与交换的思想等．在立体几何

教学中，为了贯彻教学大纲要求，树立相应的数学思想，掌握相应的数学方法，完成从平面到空间这一飞跃，我们认为要解决好以下几个问题.

一　激发学生学习的兴趣

学习兴趣是学习动机中一个最活跃的因素. 对于青少年来说，没有兴趣的学习是消磨智慧的"苦役"。怎样让学生对中学数学中较难学的立体几何感兴趣呢？我们通过多年的教学实践，取得了一点经验：

（一）学生处于探索过程当中，对知识会表现出极大的兴趣

实践证明，思维处于探索过程中，会变得非常活跃. 因此在教学中努力揭示知识的发生过程，让学生以发现者的身份通过自己的探索获取知识，会激发起学生的学习兴趣.

例如：在学习新课"两个平面平行的性质"这一课的教学中，我们首先请学生回忆平面几何中两条直线平行的性质，然后启发学生类比这些性质进行联想，猜想出在立体几何中与两个平面平行类似的"性质"，并判断它们的真伪. 通过讨论，学生在课堂上列举出了如下八个性质，见图 1-1（1）至（8）.

性质一：一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面. （课本第38页例2）

性质二：一个平面垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面.

性质三：夹在两个平行平面间的平行线段相等. （课本

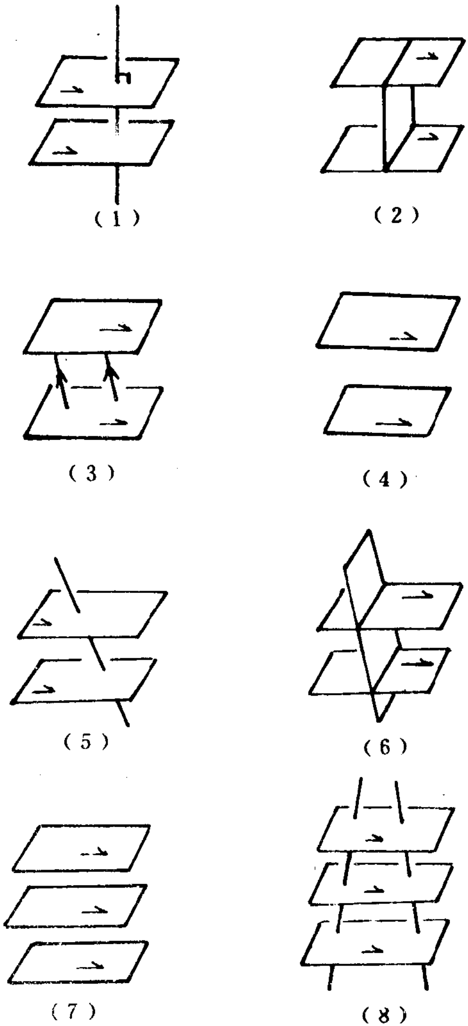


图 1-1

第39页练习第3题）

性质四：经过平面外一点只有一个平面和已知平面平行．（课本第39页习题五第4题）

性质五：一条直线和两个平行平面相交，则它和两个平面所成的角相等．（课本第40页习题五第6题）

性质六：一个平面和两个平行平面相交，则它和两个平面所成的同位角相等，同旁内角互补．（这时，还没学二面角的概念，此条“性质”是学生对比平面几何中类似性质得来的）

性质七：平行于同一平面的两个平面平行．（课本第40页习题五第5题第(3)小题）

性质八：两条直线被三个平行平面所截，截得的对应线段成比例．（课本第40页习题五第9题）

这些内容，虽然大多数在课本中都有，但因为是学生们“独立地”猜想出来的，课堂气氛活跃，学生兴趣盎然．

（二）学生作一题多解的练习题时，在寻求简化和优化的解法过程中，体验到了无穷的乐趣

我们在讲一题多解的例题时，很多解法是学生们自己想出来的．学生常常问“还有没有更好的解法？”学习要求极为强烈，因为他们体验到了获得知识的乐趣．（例题见本章四节定理教学概述）

（三）从事物之间的相互联系、运动变化中掌握知识，很多立体几何问题可以变得很有情趣

例如，正方形$ABCD$的边长为a，$EF\parallel AB$分别交AD、AC、CB于E、G、F，且$CF=\frac{3}{7}a$．以EF为棱，将正方

形所在平面折成直二面角，求$\angle AGC$的度数.

这个题目，先让学生独立思考一、两分钟，然后组织课堂讨论.

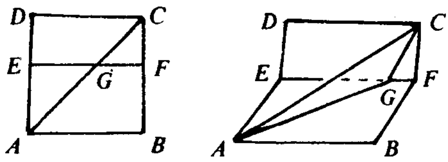


图 1 -2

思路一：利用余弦定理. 绝大多数学生，从解折叠问题的一般规律入手，画出了折叠前后平面与空间的对照图形(图1-2)，找出前后变与不变的位置与数量关系，然后解$\triangle AGC$，用余弦定理求$\angle AGC$. 在平面图形中算得$CG=\frac{3\sqrt{2}}{7}a$、$AG=\frac{4\sqrt{2}}{7}a$；利用直二面角条件知 $AC=\sqrt{a^2+\left(\frac{4}{7}a\right)^2+\left(\frac{3}{7}a\right)^2}$. 于是在$\triangle AGC$中，$\cos\angle AGC=\frac{AG^2+CG^2-AC^2}{2AG\cdot CG}=-\frac{1}{2}$，故$\angle AGC=120^\circ$.

思路二：利用邻补角的关系. 正当大家认为已经得到正确结果，可以松一口气时，从相互联系中去寻找关系的学生，画出了折叠前后拼在一起的图形(图1-3). $\because GF=FC=FC'$，$\therefore GC=C'C=GC'$，$\therefore \angle CGC'=60^\circ$，故$\angle AGC=120^\circ$. 这种解法，计算量很小，课堂活跃，兴趣盎然!

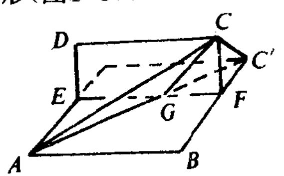


图 1 -3

思路三：利用立体几何课本中习题的结论. 第三部分学生把讨论推向新的高潮，提出了使全班为之一震的结论，"本题答案与已知条件$CF=\frac{3}{7}a$无

关!”这时，大家突然“发现”思路二的解法，确实没有用到$CF=\frac{3}{7}a$的已知条件．他们还另辟蹊径，给出了新的解法。由于$C-EF-A$为直二面角，故$\cos\angle CGA=\cos\angle CGF\cdot\cos\angle FGA=-\frac{1}{2}$，$\angle CGA=120^\circ$．这样的教法，能激发学生的学习兴趣，点燃学生创造性思维的火花，其功益远非考试分数所能说明．学生们的评论是，“一双双妙手，巧解心中疑窦．一番番有条不紊、错落有致的讲解，真是娓娓动听．同学们从迷惑不解到茅塞顿开的过程中，又一次汲取了博大精深的数学学科中，妙绝天下的解题思路”．

二　培养能力是立体几何教学的主要任务之一

关于数学能力的说法颇多，我们比较同意数学教学中培养学生七方面的能力，即数学观察能力、概括能力、记忆能力、运算能力、空间想象能力、逻辑思维能力、以及解决数学综合问题的能力．数学教学应着手双基、着眼能力，使学生的知识与能力同步增长．立体几何教学中，在培养学生的逻辑思维能力和空间想象能力方面具有得天独厚的优势．为此，我们应把培养和提高学生的逻辑思维能力、空间想象能力作为主要任务，并切实抓好．

（一）　思维能力的培养与提高

人类在实践中积累起来的一整套思考数学问题的科学的思维方式和方法，都凝聚在数学基础知识之中，构成数学知识的智力因素．教学中注意发掘这些内容，加强思维能力的

全面培养和训练，是发展智力，培养能力，提高教学质量的有效方法和重要途径．在本书概念教学，定理教学中结合教学过程介绍了一些培养学生思维能力的方法，此外下述的一些方法，应该在教学中反复训练，使学生能逐步掌握．

1．分析与综合

分析综合是最基本的思维方法，从已知推向未知是综合法．从未知探求需知而达已知是分析法．思考较复杂的数学问题常常是一边分析一边就综合，用分析法寻找思路，用综合法写出证明．教学中要画龙点睛地讲清思维过程，不能只靠潜移默化．

例1　正方形$ABCD$和$ABEF$不共面，其对角线AC和BF上有点M和N，且$AM=FN$．求证：$MN /\!/$平面BCE．

本题应该怎么分析呢？要证直线和平面平行，当然应想想线面平行的判定定理．前面已经总结过“有线线（面面）平行，则有线面平行”．按这个思路想下去当然是正确的．但是，有的学生却作出了如图1-4(1)的示意图，图中MN好像平行于EC．于是，努力设法去证$MN /\!/ EC$，结果是徒劳无功．在平面几何中，由于视觉的误差而得到的荒谬结论已为数不少，在立体几何中由于是把空间图形画在一个平面上，更容易造成视觉的误差，为此要特别注意。为避免这种错误的产生，必须努力提高空间想象能力、抽象思维能力与逻辑思维能力．

分析一：要证MN与BCE面平行，只需找出过MN的平面与BCE平面相交，且其交线与MN平行就可以了．由AC及N点确定的平面，既过MN又与BCE平面有一公共点C，可知必有过C点的交线．不妨试试看，此交线是否与MN平

行．为此在平面$ABEF$内延长AN交BE的延长线于P，连CP图1—4(3)，这时就要证明MN与CP是否平行。由已知条件可知$\frac{AM}{MC}=\frac{FN}{NB}=\frac{AN}{NP}$，于是$MN\parallel CP$.从而问题得证．

分析二：利用$ABCD$与$AFEB$都是正方形，那么过M在$ABCD$内作BC的垂线，垂足为M'，过N在$ABEF$内作BE的垂线，垂足为N'图1—4(2)．显然有$MM'\parallel AB\parallel NN'$．则$MNN'M'$确定一个平面．$M'N'$就是这个平面与平面$BCE$的交线．剩下的问题就是$MN$与$M'N'$是否平行？也就是$MNN'M'$是否为平行四边形？在已知条件中尚有$AM=FN$未用，这个条件起什么作用呢？它使$MC=BN$，从而$\triangle CMM'\cong\triangle BNN'$，于是$MM'=NN'$．这样就肯定了$MNN'M'$为平行四边形．

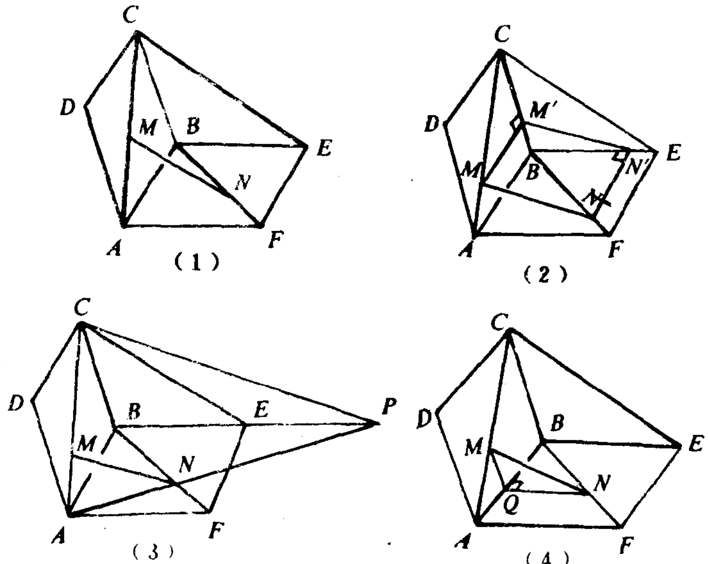


图 1-4

于是问题得证.

分析三：能否用面面平行则面内任一直线平行于另一平面呢？这就需要研究过MN的平面怎样形成，在这个平面内必须有相交二直线分别平行于平面CBE内的相交二直线CB与BE且都垂直于AB. 为此不妨在平面$ABEF$内过N作AB的垂线，垂足为Q，这就保证了$NQ \parallel EB$问题是连MQ见图1—4（4），它是否平行CB？由于$\frac{AM}{MC}=\frac{FN}{NB}=\frac{AQ}{QB}$可知$MQ \parallel BC$. 从而问题得证.

应向学生指出，不同证法有优劣之分，所画图形有好坏之分. 应努力作出最简明的图形，寻求最简捷、最漂亮的解题方法. 实践中我们体会到，能力强的学生自觉地从不同角度去寻求最好的解法，明显地体验到一种独特的数学美感. 能力一般的学生，对于一个已经作过的问题，再换一种新的解决办法相当困难，明显地表现出思维能力的局限性. 数学复习课中，更应加强分析方法的训练.

例 2 平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的体积为V，棱A_1B_1、CC_1、CD的中点分别是P、Q、R，求证四面体$PQRA$的体积为$\frac{1}{24}V$.

分析：在四面体$PQRA$中，要求体积，关键是求底面积和高. 在图1-5(1)中可以看出不易求出. 但是过A、P、R三点的截面正是平行四边形APC_1R，由于高相等，底面积为2倍关系. 即有$V_{PQRA}=\frac{1}{2}V_{锥Q\text{-}APC_1R}$. 如果这个锥体的体积能够用$V$表示，问题就解决了，如果不能，可否再找一个柱体，