中学数理化复习丛书

立体几何

LITI JIHE

闻炘威编

5

ZHONGXUE
SHULIHUA
FUXI
CONG
SHU

上海科学技术出版社

责任编辑　周玉刚

中学数理化复习丛书
立　体　几　何
阃沂威　编
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 4.625　字数 101,000
1986 年 7 月第 1 版　1986 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—53,800

统一书号：13119·1314　　定价：0.64 元

出版说明

为了帮助具有初、高中文化程度的各类读者对数理化知识进行系统整理、巩固并加深理解.我们约请了一些有多年教学经验的教师编写了《中学数理化复习丛书》.本丛书一套十种:数学六种、物理两种、化学两种.

本书包括:直线和平面,多面体和旋转体,立体几何的综合问题等内容,比较全面、系统地对立体几何知识和技能串点成线,强调归纳总结,纵横联系;对其中的重点和难点进行了分析和讲解;精选例题和习题,例题着重介绍方法和揭示规律,习题在选取上注意知识的覆盖面;在编排上考虑到自学的需要,由浅入深,分清层次.最后还采取小专题的形式,编排一章综合运用题,以供选习.

本书在编写过程中,奚定华同志曾提了不少有益的意见,并对书稿作了认真的校订和修改,在这里我们表示感谢.

欢迎广大读者对本书提出批评意见.

引　　言

立体几何是一门研究空间图形性质的学科，中学阶段通过立体几何教学，使学员的逻辑思维能力，运算能力，特别是空间想象能力，得到进一步提高．但从以往高中毕业生的情况来看，学员的空间想象能力普遍比较薄弱，而且立体几何知识的遗忘率较高，针对这些情况，在复习立体几何时，要抓住以下几点：

一　加强基础知识

1．正确理解基本概念

在复习时要注意平面几何和立体几何概念的区别和联系，防止产生混淆，提高空间想象能力．例如平面几何中两条直线互相垂直必定相交，但立体几何中两条直线垂直不一定相交，也可能是异面直线．又如平面几何中如果两条直线同时垂直于第三条直线，则这两直线平行，这一结论在空间就不一定成立．

2．突出重点

在系统整理有关概念、定理和公式的基础上，重点复习直线和平面这一部分，这是复习好立体几何的关键．在每一部分内容复习时，同样也要突出重点，例如复习直线和平面，主要抓住以下三点：

(1) 线面的平行和垂直关系；

(2) 空间角和距离的概念和计算；

(3) 三垂线定理.

二　掌握转化的方法

这是解决立体几何问题的基本思想方法，常用的有以下几种：

1. 把立体几何问题转化为平面几何问题

(1) 将有关的数量关系集中在一个平面内

例如棱柱、棱锥和棱台中有关元素的计算可分别归结到相应的矩形、直角三角形和直角梯形中进行.

(2) 类比

将立体几何问题和对应的平面几何问题进行类比，例如，二面角的平分面上任一点到两个面的距离相等，可以和平面几何中角平分线的性质进行类比，然后将立体几何问题转化为平面几何问题，用与平面几何相应的方法来解.

(3) 展开

通过展开将空间一些曲面问题转化为平面的问题. 例如，求圆锥侧面上两点的最短距离问题，可以转化为求它的侧面展开图上两点间的距离.

(4) 射影

将空间图形射影到同一平面上，从而把空间图形的有关证明和计算转化为平面图形的证明和计算. 例如，一些多面体的截面面积的计算问题，常常转化为它在底面上的射影面积的计算问题.

2. 线线、线面和面面关系的相互转化

在讨论直线和平面位置关系时，常常将这三种位置关系相互转化. 例如，证明线面平行可以通过线面平行的判定定理转化为证明线线平行、证明面面平行可以通过面面平行的

判定定理转化为证明线面平行.

3. 平行和垂直关系的相互转化

直线和平面的平行和垂直关系的相互转化，也是解决有关直线和平面位置关系问题的常用方法之一。例如，证明两直线平行可以通过线面垂直的性质定理转化为证明两直线同时垂直于一个平面.

三　提高绘图和识图能力

这是提高空间想象能力的重要环节，也是解决立体几何问题的关键.通过复习要使学生能熟练地画出各种基本图形，如线线、线面和面面的各种位置关系，以及基本多面体和旋转体的图形，从而能进一步正确地画出某些较复杂的图形. 在此基础上能根据图形想象空间直线和平面的相对位置，通过分析找出它们之间的关系，解决有关的证明和计算问题.

目　录

第一章 直线和平面

本章是立体几何复习的重点，也是进一步复习多面体和旋转体的基础.复习的要求是：

(1) 掌握空间线线、线面和面面的位置关系，特别是有关平行和垂直的判定定理和性质定理以及它们的应用.

(2) 掌握三垂线定理和它的逆定理，并能应用它们解决有关的证明和计算问题.

(3) 掌握空间各种角和距离的概念，以及它们的计算方法.

(4) 能运用反证法证明一些空间线面关系的问题.

一 平面的基本性质

平面的基本性质是研究空间图形性质的基础，确定平面的条件是将空间图形问题转化为平面图形问题的关键．通过复习要使学生牢固掌握这些性质，并能应用它们证明直线在平面内，几条直线共面，几个点共线等问题.

例 1 相交于一点的一组直线与不过此公共点的一条直线都相交，则这一组直线都在同一个平面内.

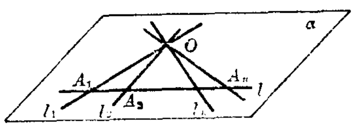


图 1-1

证明 如图 1-1 所示，直线 l_1、l_2、…、l_n 交于 O 点，且与不过 O 点的直线 l 分别交于

A_1、A_2、…、A_n. 过直线 l 和 l 外一点 O 确定平面 α. 因为直线 l_1 过 O 和 A_1 两点，而 A_1 在直线 l 上，必在平面 α 内，又 O 在平面 α 内，所以直线 l_1 在平面 α 内. 同理 l_2、l_3、…、l_n 都在平面 α 内. 即这一组直线都在同一个平面内.

说明 从这个例题可以看到，要证明几条直线共面，先确定一个平面，再证明每一条直线有两个点在这个平面内.

例 2 如果一组平行直线与同一条直线相交，则它们必共面.

证明 如图 1-2 所示，一组平行直线 l_1、l_2、…、l_n 分别和直线 l 交于 A_1、A_2、…、A_n，直线 l 和 l_1 确定一个平面 α，直线 l_1 和 l_2 确定一个平面 β，因为 A_1 在 l_1 上，A_2 在 l_2 上，所以 A_1、A_2 都在平面 β 内，则直线 l 在平面 β 内. 这样平面 α 和平面 β 都是相交直线 l 和 l_1 确定的平面，它们必定重合，所以直线 l_2 在平面 α 内，同理可证直线 l_3、…、l_n 都在平面 α 内. 由此可得这一组平行直线共面.

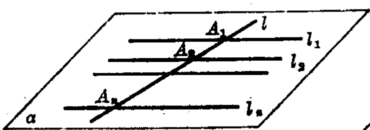


图 1-2

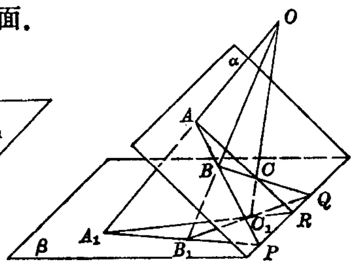


图 1-3

说明 这里证明几条直线共面采用的方法，是先将这些直线分别确定平面，然后证明这些平面重合.

例 3 如图 1-3 所示，三条不共面的直线 OA、OB、OC 分别与两个相交平面 α、β 交于 A、B、C 和 A_1、B_1、C_1，AB 与 A_1B_1、BC 和 B_1C_1、AC 和 A_1C_1 分别交于 P、Q、R. 求证：P、Q、R 三点共线.

分析 要证明P、Q、R三点共线，只要证明它们都是平面α和β的公共点，那么它们都在α和β的交线上.

证明 设平面α和β的交线为a,

$\because P\in AB$, $AB\subset\alpha$, $\therefore P\in\alpha$.

又$\because P\in A_1B_1$, $A_1B_1\subset\beta$, $\therefore P\in\beta$.

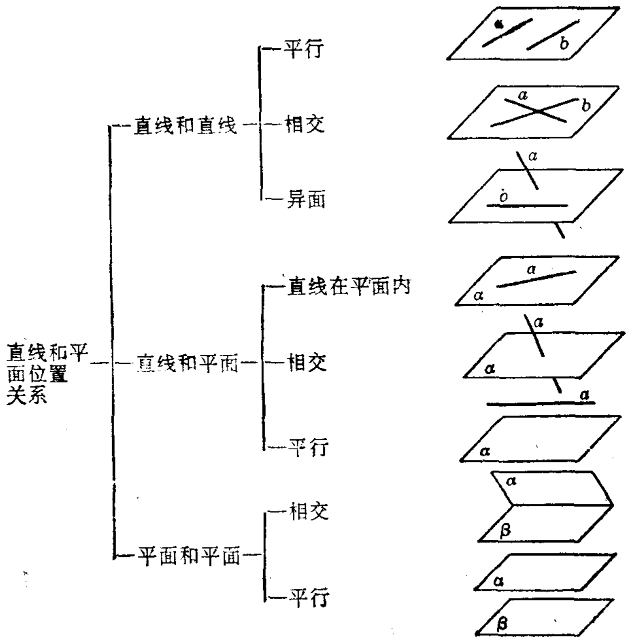
则P是平面α和β的公共点，$\therefore P\in a$.

同理，$Q\in a$, $R\in a$, $\therefore P$、Q、R三点共线.

二 直线和平面的位置关系

1. 直线和平面的位置关系

复习时可以将各种位置关系整理成下面的图表.



2. 异面直线

异面直线是本章的难点之一，复习时首先要使学生掌握它的概念，要明确"不同在任何一个平面内的两条直线"才是异面直线，"在两个平面内的直线"不一定是异面直线. 如图 1-4 中直线 a 和 b 分别在平面 α 和 β 内，但它们不是异面直线，并且进一步能运用这个概念判定两条直线是不是异面直线.

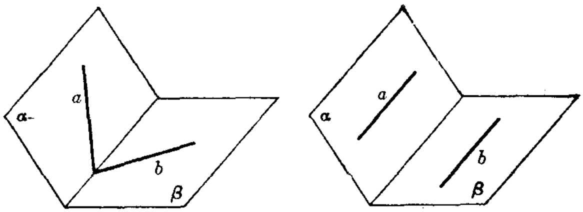


图 1-4

例 1 如图 1-5 所示，直线 a 和平面 α 交于 A 点，直线 b 在平面 α 内，且 A 点不在直线 b 上，求证：a 和 b 是异面直线.

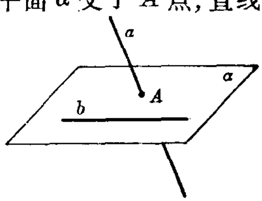


图 1-5

证明 假设直线 a 和 b 在同一个平面 β 内，则平面 β 过直线 b 和点 A，但平面 α 也过直线 b 和点 A.

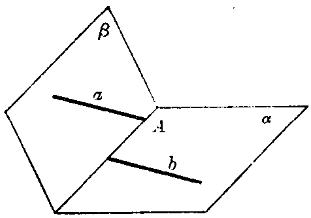
$\because A \notin b$，过直线 b 和点 A 只有一个平面，

$\therefore$ 平面 α 和 β 重合.

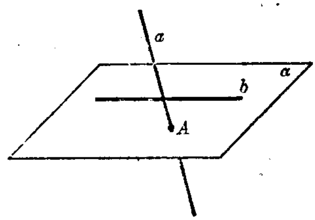
而 a 在平面 β 内，则 a 也在平面 α 内. 这与已知条件 a 和平面 α 相交产生矛盾.

∴ a 和 b 是异面直线.

这个结论常常可以用来判定异面直线. 如图 1-6(1) 中两条直线看来似乎平行, 图 1-6(2) 中两条直线看来好象相交, 但由于直线 a 和平面 α 的交点 A 不在直线 b 上, 由例 1 可知它们都是异面直线.



(1)



(2)

图 1-6

至于异面直线所成的角和异面直线的距离, 将放在"五、空间的角和距离"中进行复习.

3. 用反证法证明有关线面位置关系的问题

反证法在立体几何中应用比较多, 但学生往往感到比较困难, 在复习时首先要让学生明确反证法的实质, 当证明原命题有困难时, 证明它的逆否命题成立、掌握证明的基本步骤:

① 假设结论不成立(即结论的"反面"成立);

② 运用定义、公理和定理进行推理, 得到的结果与已知条件或定理、公理产生矛盾;

③ 假设不成立, 原来的结论成立.

然后可以举一些立体几何中常见的几种用反证法证明的问题.

(1) 证明异面直线

例 2 如图 1-7 所示，过两个相交平面 α 和 β 交线上两个点 A 和 B，分别在两个平面内作直线 AC 和 BD，则这两条直线必定是异面直线.

证明 假设 AC 和 BD 在同一个平面 γ 内.

$\because$ 平面 γ 和 α 都过不在一条直线上的三个点 A、B、C，

$\therefore$ 平面 γ 和 α 重合.

同理，平面 γ 和 β 重合，

$\therefore$ 平面 α 和 β 重合.

与平面 α 和 β 相交产生矛盾.

$\therefore$ AC 和 BD 是异面直线.

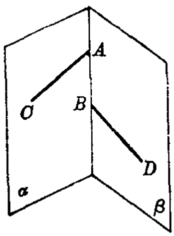


图 1-7

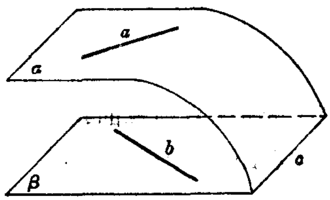


图 1-8

(2) 证明线线、线面和面面平行

例 3 a 和 b 是两条异面直线. 求证：过 a 且平行于 b 的平面 α 必平行于过 b 且平行于 a 的平面 β.

证明 假设平面 α 和 β 相交于直线 c(图 1-8).

$\because$ $a /\!/ \beta$, $a \subset \alpha$,

$\therefore$ $a /\!/ c$,

同理，$b /\!/ c$,

$\therefore$ $a /\!/ b$,

与 a 和 b 是异面直线产生矛盾，

$\therefore$ 平面 $\alpha /\!/$ 平面 β.

(3) 证明线线、线面和面面相交

例 4 求证：一直线与两平行平面中的一个平面相交，必与另一个平面也相交.

证明 如图 1-9 所示，直线 a 和平行平面 α、β 中的 α 相交于 A.

假设直线 a 和平面 β 不相交，则 a 在 β 内，或 $a /\!/ \beta$.

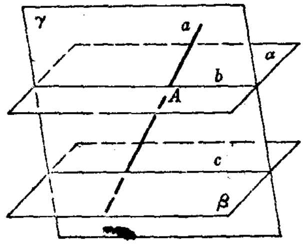


图 1-9

(1) 若 a 在 β 内，

$\because \alpha /\!/ \beta,\ a \subset \beta,$

$\therefore a /\!/ \alpha,$

与 a 和 α 相交产生矛盾.

(2) 若 $a /\!/ \beta$.

过 a 作平面 γ 与平面 α、β 相交于 b、c。

$\because a /\!/ \beta,\ c \subset \beta,\ \therefore a /\!/ c.$

$\because \alpha /\!/ \beta,\ \therefore b /\!/ c.$

$\therefore a /\!/ b,$

但 a 和 b 相交于 A，产生矛盾.

$\therefore$ 直线 a 和平面 β 相交.

说明 在这个例题中，结论"直线和平面相交"的反面有两个：(1) 直线在平面内；(2) 直线和平面平行. 学生往往认为直线和平面不相交，即平行，遗漏直线在平面内的情况，这一点必须引起他们的注意. 正确地找出结论的反面，这是应用反证法证明的重要前提.

4. 线面位置关系中容易混淆的问题

在研究空间图形性质时，往往与平面图形性质混淆，产生错误，在复习时可以举一些似是而非的问题让学生判断和鉴别，提高他们的空间想象能力.

例 5 判断下列结论是否正确(对的画“✓”，错的画“×”)：

(1) 若 $a /\!/ \alpha$，且 $b \subset \alpha$，则 $a /\!/ b$. ( )

(2) 若 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$，则 $a /\!/ c$. ( )

(3) 若 $a \perp c$，$b \perp c$，则 $a /\!/ b$. ( )

(4) 若 $a /\!/ b$，$a /\!/ \alpha$，则 $b /\!/ \alpha$. ( )

(5) 若 $a /\!/ b$，$a \perp \alpha$，则 $b \perp \alpha$. ( )

(6) 若 $\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$，则 $\alpha /\!/ \beta$. ( )

(7) 若 $\alpha \perp \gamma$，$\alpha /\!/ \beta$，则 $\beta \perp \gamma$. ( )

(8) 若 $a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$\alpha /\!/ \beta$，则 $a /\!/ b$. ( )

(9) 若 $a \perp b$，$a \perp c$，$b \subset \alpha$，$c \subset \alpha$，则 $a \perp \alpha$. ( )

(10) 若 $a /\!/ \alpha$，$b \perp \alpha$，则 $a \perp b$. ( )

答：(1) ×； (2) ✓； (3) ×； (4) ×； (5) ✓； (6) ×； (7) ✓； (8) ×； (9) ×； (10) ✓.

三 直线和平面的平行和垂直

直线和平面的平行和垂直是直线和平面位置关系中最常见，也是最重要的两种关系，有必要重点加以复习.

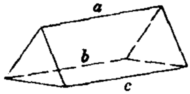
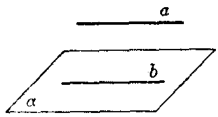
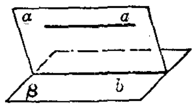
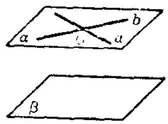
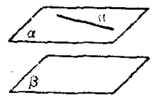
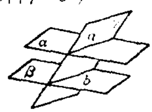
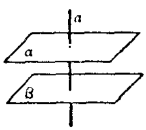
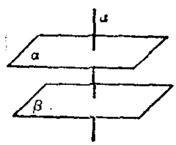
1. 直线和平面平行和垂直的判定定理和性质定理

这是复习好这两种关系的基础，可以通过列表加以系统整理.

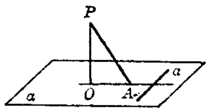
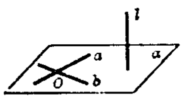
2. 证明线面平行和垂直常用的方法

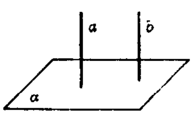
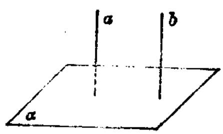
(1) 证明线线平行

① 应用公理 4;

线面关系		判定	性质
平行	线线	公理 4 $\left.\begin{array}{l}a \parallel c\\ b \parallel c\end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$ 	
	线面	线面平行的判定定理 $\left.\begin{array}{l}a \not\subset \alpha\\ b \subset \alpha\\ a \parallel b\end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$ 	线面平行的性质定理 $\left.\begin{array}{l}a \parallel \beta\\ a \subset \alpha\\ \alpha \cap \beta = b\end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$ 
	面面	面面平行的判定定理 $\left.\begin{array}{l}a \subset \alpha\\ b \subset \alpha\\ a \cap b = O\\ a \parallel \beta\\ b \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ 	$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta\\ a \subset \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \beta$  面面平行的性质定理 $\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta\\ \alpha \cap \gamma = a\\ \beta \cap \gamma = b\end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$ 
		$\left.\begin{array}{l}a \perp \alpha\\ a \perp \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ 	$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta\\ a \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \beta$ 

续表

<table>
<tr><th colspan="2">线面关系</th><th>判　　定</th><th>性　　质</th></tr>
<tr><td rowspan="2">垂
直</td><td>线
线</td><td colspan="2">三垂线定理和它的逆定理
$\left.\begin{array}{l}a\subset\alpha,\\ PO\perp\alpha,\\ PO\cap\alpha=O,\\ PA\cap\alpha=A,\\ a\perp AO\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp PA$　　$\left.\begin{array}{l}a\subset\alpha\\ PO\perp\alpha\\ PO\cap\alpha=O\\ PA\cap\alpha=A\\ a\perp PA\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp AO$

</td></tr>
<tr><td>线
面</td><td>线面垂直的判定定理
$\left.\begin{array}{l}a\subset\alpha\\ b\subset\alpha\\ a\cap b=O\\ l\perp a\\ l\perp b\end{array}\right\} l\perp\alpha$


$\left.\begin{array}{l}a\parallel b\\ a\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha$

</td><td>线面垂直的性质定理
$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$

</td></tr>
</table>