高等学校基础课配套辅导丛书

高等数学

（同济第五版）

同步精讲

上册

组编：恩　波

主编：陈兰祥（同济大学应用数学系）

ENBOEDUCATION

恩波教育

学苑出版社

D13-42

高等数学同步精讲

（上　册）

主编　同济大学陈兰祥教授

编委　（按姓氏笔画为序）

东　南　大　学　王海燕

同　济　大　学　刘庆生

上海交通大学　李　铮

同　济　大　学　陈兰祥

解放军理工大学　陈桂东

建筑学

学苑出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步精讲.上册/陈兰祥主编.—北京:学苑出版社，2002.9

ISBN 7-5077-1938-3

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 013276 号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街 11 号　100036
北京市通县长凌营印刷厂印刷　新华书店经销
850×1168　32 开本　12.625 印张　416 千字
2002 年 9 月北京第 1 版　2002 年 9 月北京第 1 次印刷
印数:0001-10000 册　上下册总定价:27.00 元(本册:13.50 元)

前　　言

高等数学课程对于大学生的重要性是不言而喻的，已出版的多种高等数学复习参考书和习题解答曾给予了广大学生众多的帮助。然而，一方面近年来由于教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响；另一方面后续课程以及研究生入学考试对高等数学的要求在教学大纲范围内有深化的趋势。

为解决这一新的矛盾，我们根据在同济大学、交通大学、东南大学、中国人民解放军理工大学多年的教学实践以及研究生高等数学入学考试辅导的经验，听取了广大学员的意见，决定编写一本与新近出版的《高等数学》(同济第五版)配套的同步辅导读物。

全书分上、下两册出版，其章节次序、术语、符号均参照前述《高等数学》(同济第五版)。全书以讲清讲透基本概念为主线，同时介绍与其相关的各种典型例题，并通过综合例题的讲解和综合练习的训练提高学生分析解决问题的能力。

在使用该书时我们有以下建议：

1. “基本概念”是以框图形式列出，是全书的精髓，要求逐字逐句深刻理解，并在理解基础上随时都能正确表达。

2. 各章的“知识网络图”指出了各知识点的有机联系，应该予以充分理解。

3. 在阅读“概念的内涵，重点和难点”时应深入理解基本概念，抓住事物的主要矛盾，理清思路。

4. “典型例题解析”中介绍了与基本概念有关的各种题型。在学习时应带着三个问题去思考：

① 这种题型是怎样提出的？

② 它反映了基本概念的什么内涵?

③ 用什么途径解决的。

5. "综合例题"是涉及多个知识点的题目,其中包括了同济五版教科书中的大部分难题和部分研究生入学试题。在学习时应着重考虑该题目究竟与那些知识点相关连,是如何解决的,这对于基本理论的融会贯通,解题方法的举一反三,分析、解决问题的能力的提高会起到十分重要的作用。

6. "综合练习"是供学员自我考核的。"参考答案及其提示"应该在独立思考、解题以后再予以核对检查。

全书由同济大学应用数学系陈兰祥教授主编。上册由同济大学陈兰祥、刘庆生、上海交通大学李铮、东南大学王海燕、中国人民解放军理工大学陈桂东执笔共同编写。

由于是多位编者合作撰写,各自章节安排和风格可能略有不同,虽经协调,仍存在一定差异在所难免。另外由于编者的水平所限,难免有错误与不妥之处。欢迎来信批评指正。

本书的出版,如果能对广大学生在高等数学的学习和复习过程中达到节约复习时间,加深理解基本概念,拓宽解题思路和提高分析解决问题的能力有所帮助,就是对我们工作的最大安慰。

编者

目　录

第一章　函数与极限

本章主题词

函数、极限、无穷小、连续

本章大纲要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解函数的单调性、周期性和奇偶性.

3. 了解反函数和复合函数的概念.

4. 熟悉基本初等函数的性质及其图形.

5. 能列出简单实际问题中的函数关系.

6. 了解极限的ε-N、ε-δ定义(对于给出ε求N或δ不作过高要求),并能在学习过程中逐步加深对极限思想的理解.

7. 掌握极限四则运算法则.

8. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限求极限.

9. 了解无穷小、无穷大的概念.掌握无穷小的比较.

10. 理解函数在一点连续的概念,会判断间断点的类型.

11. 了解初等函数的连续性.知道在闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大值最小值定理).

本章知识网络图

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义（定义域、对应规律）
    - 性质（有界性、单调性、奇偶性、周期性）
    - 复合函数（中间变量、复合函数的分解）
    - 反函数
    - 初等函数（基本初等函数的图形）
    - 分段函数
  - 极限
    - 定义
      - 数列的极限
        - ε-N 定义
        - 收敛数列的性质
      - 函数的极限
        - $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$　ε-X 定义
        - $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$　ε-δ 定义
        - 左、右极限
          - $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
          - $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$
    - 极限存在准则
      - 单调有界必有极限
      - 夹逼定理
    - 无穷小与无穷大
      - 定义
      - 性质
        - 有限个无穷小的和，积仍是无穷小
        - 无穷小与有界量的积仍是无穷小
      - 比较（高阶、低阶、同阶、等价、k 阶）
    - 连续与间断
      - 定义
      - 间断点的分类
      - 闭区间连续函数的性质

第一节 映射与函数

【基本概念】

表 1.1 函数及相关的定义

名 称	定 义
函 数	设 X,Y 是两个非空实数集合，若存在对应法则 f，使得对于任给的 $x\in X$，存在惟一点 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 是 X 到 Y 的函数，记作 $y=f(x)$，X 称为定义域，$W=\{y\mid y=f(x),x\in X\}\subset Y$，称为函数 f 的值域.
反函数	设 $f(x)$ 的定义域为 X，值域为 W，若对于任给 $y\in W$，在 X 中只有一个数 x 与之对应，使得 $f(x)=y$，把 y 看作自变量，x 看作函数，得到的一个新函数，称为函数 f 的反函数，记作 f^{-1}，$f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$.
复合函数	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，值域为 U^*，且 $U^*\subset U$，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 或 $f\circ\varphi$ 为定义在 X 上的复合函数，u 为中间变量.

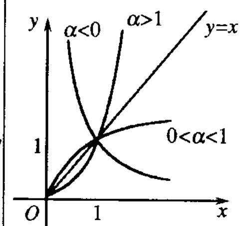
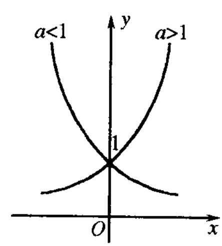
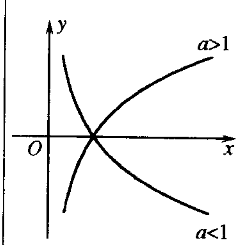
表 1.2 函数的几种特性

性 质	定 义
有界性	设 $f(x)$ 的定义域为 X，若存在 k_1，使得对于任给 $x\in X$，有 $f(x)<k_1$，则称 k_1 为 $f(x)$ 的上界. 若存在 k_2，使得对于任给 $x\in X$，$f(x)>k_2$，则称 k_2 为 $f(x)$ 的下界. 若存在 $M>0$，使得对于任给 $x\in X$，有 $\|f(x)\|<M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界，或称 $f(x)$ 为 X 上的有界函数. 反之称 $f(x)$ 无界.
单调性	设 $f(x)$ 的定义域为 X，若对于任意 $x_1,x_2\in X$，当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调增；若 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 严格单调增. 当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调减；若 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 严格单调减.
奇偶性	设 $f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称， 若对于任给 $x\in X$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 若对于任给 $x\in X$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

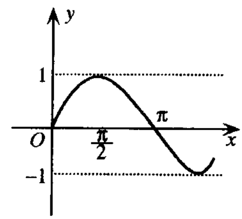
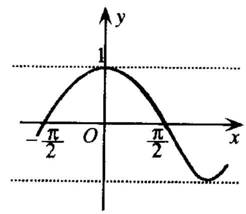
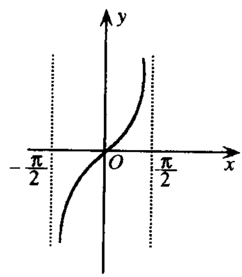
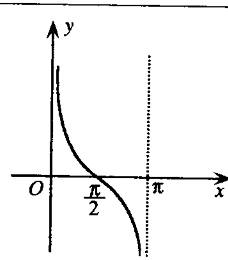
（续表）

性　质	定　　义
周期性	设 $f(x)$ 的定义域为 X，若存在 $T\neq 0$，使得对于任给 $x\in X$，有 $x+T\in X$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 通常把 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期.

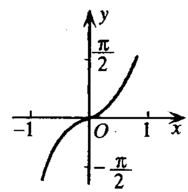
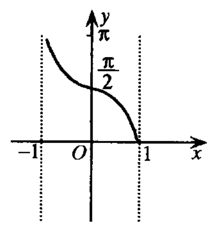
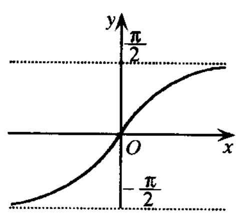
表 1.3　基本初等函数与初等函数

名　称		定义式	性　质	要　点	图　形
基本初等函数	幂函数	$y=x^{\alpha}$ （α 为常数） 定义域一般为 $(0,+\infty)$	$\alpha>0$ 时 函数单调增 $\alpha<0$ 时 函数单调减	定义域可为 $(-\infty,+\infty)$ 如 $y=x^2$，也可为 $[0,+\infty)$，如 $y=x^{\frac{1}{2}}$.	
	指数函数	$y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	$a>1$ 时，函数单调增 $a<1$ 时，函数单调减		
	对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$ 定义域为 $(0,+\infty)$	$a>1$ 时， 函数单调增 $a<1$ 时， 函数单调减	$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数 $\log_e x=\ln x$	

（续表）

名　称		定义式	性　质	要　点	图　形
基本初等函数	三角函数	正弦函数 $y=\sin x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	奇函数，周期函数 $T=2\pi$，有界函数 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$	值域为 $[-1,1]$	
		余弦函数 $y=\cos x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	偶函数，周期函数 $T=2\pi$，有界函数 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$	值域为 $[-1,1]$	
		正切函数 $y=\tan x$ 定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$	奇函数，周期函数，$T=\pi$，一个周期内为单调增函数		
		余切函数 $y=\cot x$ 定义域为 $x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$	周期函数 $T=\pi$， 在一个周期内为单调减函数		

（续表）

名　称		定义式	性　质	要　点	图　形
基本初等函数	三角函数	正割函数 $y=\sec x$ $=\dfrac{1}{\cos x}$	周期函数 $T=2\pi$，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无界		
		余割函数 $y=\csc x$ $=\dfrac{1}{\sin x}$	周期函数 $T=2\pi$，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无界		
	反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$ 定义域为 $[-1,1]$	奇函数， 单调增函数	值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	
		反余弦函数 $y=\arccos x$ 定义域为 $[-1,1]$	单调减函数	值域为$[0,\pi]$	
		反正切函数 $y=\arctan x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	奇函数，有界函数 $\lvert\arctan x\rvert<\dfrac{\pi}{2}$ 单调增函数	值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	

（续表）

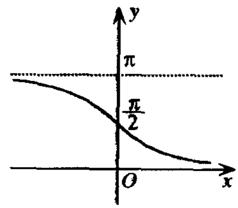
名 称		定义式	性 质	要 点	图 形
基本初等函数	反三角函数	反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$	有界函数 $0<\operatorname{arccot}x<\pi$ 单调减函数	值域为$(0,\pi)$	
初等函数		凡是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合后能用一个公式表示的函数称为初等函数			

表 1.4 双曲函数

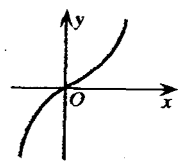
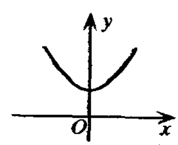
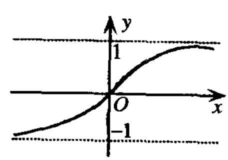
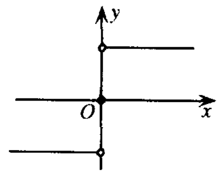
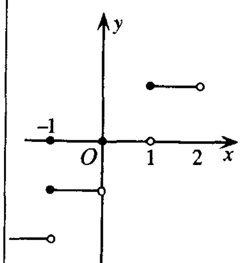
名 称	定义式	性 质	要 点	图 形
双曲函数	双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	奇函数，单调增函数		
	双曲余弦 $\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	偶函数		
	双曲正切 $\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$	奇函数，单调增函数，有界函数		

表 1.5　分段函数

名　称	定　义	要　点	图　形
分段函数	用两个或两个以上公式表示的函数	分段函数的复合	
	符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$		
	取整函数 $[x]$，不超过 x 的最大整数. 当 $x\in[n,n+1)$ 时，$[x]=n$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$		

分段函数一般来说不是初等函数.

【概念的内涵、重点及难点】

1. 函数的定义的两个要素：定义域 X 及对应法则 f

(1) 当两个函数的定义域及对应法则均相同时，表示两个函数相同.

(2) 函数表示法与变量用什么字母无关，即 $y=f(x)$，$u=f(v)$，$s=f(t)$ 等均表示同一函数，这一性质又称为函数表示法的“无关特性”.

2. $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线，若用 x 表示自变量，y 表示因变量，则 $y=f^{-1}(x)$ 及 $y=f(x)$ 图像关于直线 $y=x$ 对称，f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.

3. 复合函数 $y=f(\varphi(x))$. 若存在 $X^*\subset X$，使得 $\varphi(x)$ 在 X^* 上的值域 $W^*\subset U$，而 U 为 $y=f(u)$ 的定义域，则 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域为 X^*. 若 $\varphi(x)$ 的值域不含在 $f(u)$ 的定义域内则不能复合. 例如 $y=\sqrt{u^2-2}$，$u=\sin x$ 就不能复合成 y

$=\sqrt{\sin^2 x-2}$.

4. 若$f(x)$有界，则$f(x)$必有下界$(-M)$和上界(M)；反之若$f(x)$既有上界k_1，又有下界k_2. 则$f(x)$必有界$(M=\max\{|k_1|,|k_2|\})$.

$f(x)$无界的严格定义：对于任给$M>0$，总存在$x_M\in X$，使得$|f(x_M)|\geqslant M$. 即任何一个正数M都不可能是$f(x)$的界.

5. 一般将$f(x)$的最小正周期简称为$f(x)$的周期，如$y=\sin x$的周期为2π，$y=\tan x$的周期为π等，但周期函数不一定存在最小正周期，如常数函数$f(x)=C$，狄利克雷函数$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$等均为周期函数，但均不存在最小正周数.

6. 熟记基本初等函数的图形、性质

7. 重点掌握分段函数的表示法、定义域

8. 本节难点：分段函数的复合

【典型例题解析】

例1.1　下列各题中$f(x)$、$g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$　不同. 定义域.

(2) $f(x)=x$，　$g(x)=\sqrt{x^2}$　不同　值域.

(3) $f(x)=x+1$，　$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$　不同　定义域

解　(1) 不相同，因为定义域不同，$f(x)$的定义域为$x\neq0$，而$g(x)$的定义域为$x>0$.

(2) 不相同，因为对应法则不同，$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|\geqslant0$. $g(x)=\sqrt{x^2}$与$y=|x|$为相同的函数.

(3) 不相同. 因为定义域不相同. $g(x)$的定义域为$x\neq1$，但若补充定义$g(1)=2$，则$f(x)$与$g(x)$相同.

例1.2　求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$　　(3) $y=\dfrac{1}{\ln|x-1|}$

(2) $y=\ln(x+1)+2^{\frac{1}{x-1}}$　　(4) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$

解　求函数的定义域一般主要针对一些基本形式来确定期定义，然后综

合考虑.基本形式可分为 $\sqrt{A}$, $\frac{1}{A}$, $\ln A$, $\arcsin A$, $\arccos A$ 等,其相应的定义域为 $A\geqslant 0$, $A\neq 0$, $A>0$, $|A|\leqslant 1$, $|A|\geqslant 2$ 等.

(1) $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\x\neq 0\end{cases}$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$

(2) $\begin{cases}x+1>0\\x-1\neq 0\end{cases}$ 定义域为 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(3) $\begin{cases}\ln|x-1|\neq 0\\|x-1|>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1\neq 1\\x-1\neq -1\\x-1\neq 0\end{cases}$

∴ 定义域为 $x\in\mathbf{R}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$, $x\neq 2$ 或 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(4) $\begin{cases}\left|\frac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1\\1+x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|2x|\leqslant|1+x|\\x\neq -1.\end{cases}$ 定义域为 $\left[-\frac{1}{3},1\right]$

例1.3 求下列函数的反函数

(1) $y=1+\ln(x+2)$ (2) $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ (3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解 (1) $x+2=e^{y-1}$ ∴ $x=e^{y-1}-2$ 反函数为 $y=e^{x-1}-2$

(2) $2^x=\frac{1+y}{1-y}$ $x=\log_2\frac{1+y}{1-y}$ 反函数为 $y=\log_2\frac{1+x}{1-x}$

(3) $x+\sqrt{1+x^2}=e^y$, $e^{-y}=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-x+\sqrt{1+x^2}$

∴ $x=(e^y-e^{-y})\div 2$ ∴ 反函数为 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

例 1.4 下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些是非奇非偶函数?

(1) $y=e^{x^2}\sin x$ (2) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$

(3) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$ (4) $y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$ $(a>0,a\neq 1)$

解 (1) 因为 $\sin x$ 为奇函数, x^2 为偶函数 所以 $y=e^{x^2}\sin x$ 为奇函数

(2) $f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数

(3) $f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$ 所以 $f(x)$ 为奇函数