

TN911.7
W55

现代信号

处理技术

—高阶谱、时频分析与小波变换

■ 吴正国 夏立 尹为民 编著



A1089150



全国优秀出版社
武汉大学出版社

HAK89/11

第一章 基础知识

阅读本书需具备“泛函分析”及“数字信号处理”的一些基础知识。考虑到一些工科专业
人员没有学习过这方面的内容,或者对知识有所遗忘,在本章中先简要叙述本书所需的一些
基础知识。对这两方面基础知识的详细了解,请参阅参考文献[1][2],或其它有关书籍。

§ 1.1 Hilbert 空间

1.1.1 线性空间

一、定义

定义 1.1 设 X 是一个非空集合, K 是数域(实数域 R 或复数域 C)。如果对于任意 $x, z, y \in X$ 和任意 $\mu, \lambda \in K$, 有元素 $u \in X$ 称为 x 和 y 的和, 记为 $u = x + y$; 有元素 $v \in X$ 称为 λ 与 x 的数积, 记为 $v = \lambda x$, 且满足如下条件:

- (1) $x + y = y + x$;
 - (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
 - (3) $1x = x$;
 - (4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
 - (5) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
 - (6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
 - (7) X 中存在零元 θ , 使得 $x + \theta = x$;
 - (8) 存在 $x' \in X$, 使得 $x + x' = \theta$; 通常称 x' 为 x 的负元, 且记为 $x' = -x$,
- 则称 X 为(数域 K 上的)线性空间或向量空间。

n 维实空间 R^n 、 n 维复空间 C^n 及 $(m \times n)$ 维矩阵空间 $K^{m \times n}$ 都是常见的线性空间。此外, 有
界数列空间 $l^p(Z) = \{x = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$ 及函数空间 $L^p[a, b] = \{x(t) \text{ 为}$
 $[a, b]$ 上的 Lebergue 可测函数 $\mid \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty\}$, 也是线性空间 ($1 \leq p < \infty$)。

线性子空间 设 X 为数域 K 上的线性空间, $M \subset X$ 为非空集合。如对于任意 $x, y \in M$ 及
任意 $\lambda \in K$, 有 $x + y \in M$ 及 $\lambda x \in M$ 成立, 则称 M 为 X 的线性子空间(简称子空间)。如果 $M \neq X$, 则称 M 为真子空间。

设 M 为 X 的非空子集, 记

$$\text{span}M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid x_i \in M, \lambda_i \in K, n \in N \right\}$$

为由子集 M 所张成的子空间。

二、线性无关

设 X 为数域 K 上的线性空间, 对于 $x_i \in X (i=1, 2, \dots, n)$, 若存在不全为零的数 $k_i \in K$, 使得 $\sum_{i=1}^n k_i x_i = \theta$, 则称子集 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 线性相关, 否则称此子集线性无关。

基与维数 设 X 为线性空间, 若任意 $x \in X$, 都可表示为 X 中的一个线性无关子集 $\{x_i\} (i=1, 2, \dots, n)$ 的线性组合, 即

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad (\lambda_i \in K)$$

则称此线性无关子集为 X 的一个基, 并称 n 为 X 的维数, 记为 $\dim X = n$ 。

三、线性算子

设 X, Y 为数域 K 上的两个线性空间, T 是从 X 到 Y 的一个映射。如果对任意的 $x, y \in X, \lambda, \mu \in K$ 都有下式成立

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T x + \mu T y$$

则称 T 为线性算子。

X 为 T 的定义域, 记为 $D(T) = X$; $R(T) = \{Tx | x \in X\}$ 称为 T 的值域; 若 $Y = K$, 则称 T 为线性泛函。对于线性泛函, 常用小写字母表示, 例如记为 $fx = f(x) \in K$ 。

对于有限维线性空间上的线性算子 T , 对于确定的基而言, 它与矩阵 $(a_{ij})_{n \times n}$ 是一一对应的, 有时就直接记为 $T = (a_{ij})_{n \times n}$ (假定 X, Y 皆为 n 维线性空间)。

1.1.2 赋范线性空间

一、赋范线性空间与 Banach 空间

定义 1.2 设 X 为数域 K 上的线性空间。若对任意的 $x \in X$ 都有确定的实数 $\|x\|$ 与之对应, 并满足如下条件(范数公理):

- (1) 正定性 对 $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| = 0$, 当且仅当 $x = \theta$;
- (2) 正齐次性 对 $\forall x, y \in X$ 及 $\lambda \in K, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- (3) 三角不等式 对 $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数, 并称 X 按范数 $\|x\|$ 成为赋范线性空间(简称赋范空间), 记为 $(X, \|\cdot\|)$, 或简记 X 。

定义 1.3 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 距离函数 $d(x, y) = \|x - y\| \quad (\forall x, y \in X)$, 如果 X 是完备的, 则称 X 为 Banach 空间。

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, L^p[a, b], I^p(x)$ 等都是常见的 Banach 空间。

二、有界线性算子

设 X, Y 皆为赋范线性空间, $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, 若存在常数 $A > 0$, 使得对 $\forall x \in X$,

$$\|Tx\| \leq A \|x\|$$

成立,则称 T 为 X 上的有界线性算子。

对于有界线性算子 T , 满足上式的正数 A 有无穷多个, 我们定义所有这些 A 的下确界为算子的范数, 即

$$\|T\| = \inf \{A > 0 \mid \|Tx\| \leq A\|x\|, \forall x \in X\}$$

由此范数定义必有 $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ 成立。

以 $B(X, Y)$ 表示从 X 到 Y 的全体有界线性算子构成的集合, 特别当 $X=Y$ 时, 记 $B(X, Y) = B(X)$ 。可以证明, $B(X, Y)$ 按算子的线性运算和范数, 也成为是一个赋范线性空间。

三、有界线性泛函与共轭空间

定义 1.4 设 X 为数域 K 上的赋范线性空间, $f: X \rightarrow K$ 为线性泛函。如存在常数 $A > 0$, 使得 $|f(x)| \leq A\|x\|$ ($\forall x \in X$) 成立, 则称 f 为 X 上的有界线性泛函。显然, 有界线性泛函是一种特殊的有界线性算子。

赋范线性空间 X 上的所有有界线性泛函构成的集合 $X^* = B(X, K)$, 称 X^* 为 X 的共轭空间(对偶空间)。可以证明, 共轭空间 X^* 为 Banach 空间。

1.1.3 Hilbert 空间

一、内积与 Hilbert 空间

定义 1.5 设 X 为数域 K 上的线性空间, 若对于任意的 $x, y \in X$, 都对应一个数 $\langle x, y \rangle \in K$, 且满足下列条件:

- (1) 共轭对称性 对 $\forall x, y \in X$, 有 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$;
- (2) 对第一变元的线性 对 $\forall x, y, z \in X, \forall \lambda, \mu \in K$, 有 $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$;
- (3) 正定性 对 $\forall x \in X$, 有 $\langle x, x \rangle \geq 0$, 且 $\langle x, x \rangle = 0$ 的充要条件是 $x = \theta$, 则称 $\langle x, y \rangle$ 为元素 x 与 y 的内积。定义了内积的线性空间 X 称为内积空间。

对于内积空间 X , 称 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ($\forall x \in X$) 为由 X 的内积诱导的范数。

定义 1.6 设 X 为内积空间, 如果 X 按内积诱导的范数成为 Banach 空间, 则称 X 为 Hilbert 空间。所以, Hilbert 空间是完备的内积空间, 也是特殊的 Banach 空间。

对于空间 $\mathbb{R}^n$, 可定义内积

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

则由此内积诱导的范数为

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

显然 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 是 Banach 空间, 所以 $\mathbb{R}^n$ 为 Hilbert 空间, 有时也称为欧氏空间。

类似地, 在 $\mathbb{C}^n$ 中定义内积

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^*$$

则 $\mathbb{C}^n$ 也是 Hilbert 空间。在 $l^2(\mathbb{Z})$ 中定义内积

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n^*$$

则 $L^2(z)$ 也是 Hilbert 空间。在 $L^2[a, b]$ 中定义内积

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y^*(t) dt$$

则 $L^2[a, b]$ 也是 Hilbert 空间。

二、正交分解与投影定理

定义 1.7 设 X 为内积空间, $x, y \in X$, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$ 。

设 M 为 X 的非空子集, 若 x 与 M 中所有元素正交, 则称 x 与 M 正交, 记为 $x \perp M$ 。

定义 1.8 设 X 为内积空间, M 为 X 的线性子空间, $x \in X$ 。如果存在 $x_0 \in M, x_1 \in M^\perp$ ($M^\perp$ 为 M 的正交补空间), 使得 $x = x_0 + x_1$, 则称 x_0 为 x 在 M 上的正交投影 (简称投影)。

可以证明: 对于 Hilbert 空间 H , 若 M 为 H 的闭线性子空间, 则对任意 $x \in H$, x 在 M 上的投影存在而且惟一。

三、Riesz 表示定理

设 Hilbert 空间 H , F 为 H 上的有界线性泛函, 则必有惟一的 $y \in H$, 使得对任意 $x \in H$, 有 $F(x) = \langle x, y \rangle$, 且 $\|F\| = \|y\|$ 成立。

Riesz 表示定理说明 Hilbert 空间上的有界线性泛函都可以看成是由该空间中的某向量 y 通过内积定义导出的有界线性泛函。

1.1.4 Hilbert 空间上的线性算子

一、伴随算子

定义 1.9 设 H, G 都为 Hilbert 空间, $T \in B(H, G)$, 称满足下式的惟一的有界线性算子 $S \in B(G, H)$ 为 T 的伴随算子 (或共轭算子)

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, sy \rangle \quad (\forall x \in H, \forall y \in G)$$

一般记 T 的共轭算子为 T^* , 所以有

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

伴随算子 T^* 的存在性和惟一性由 Riesz 定理所保证。伴随算子有如下性质:

$$(1) (T^*)^* = T;$$

$$(2) \|T^*\| = \|T\|;$$

$$(3) \|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2;$$

$$(4) \text{若 } T \in B(H, G), S \in B(G, L), \text{ 则 } (ST)^* = T^*S^*;$$

$$(5) \text{若 } T \in B(H, G) \text{ 且 } T \text{ 为双射, 则 } (T^*)^{-1} \text{ 存在, 且 } (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*, (T^*)^{-1} \in B(H, G).$$

若 $T^* = T$, 则称 T 为自伴算子 (自共轭算子)。

可以证明: T 为 Hilbert 空间 H 自伴算子的充要条件是对任意 $x \in H$, 有 $\langle Tx, x \rangle$ 为实数。

二、投影算子

设 H 为 Hilbert 空间, M 为 H 的闭线性子空间, 对任意 $x \in H$, 在 M 中有惟一正交投影 x_0 。定义映射 $P: H \rightarrow M$ 为: $Px = x_0$, 则称 P 为 H 到 M 的投影算子, 有时记为 P_M 。

可以证明: P 是 Hilbert 空间上投影算子的充要条件是:

- (1) P 是自伴算子;
- (2) P 是幂等算子, 即 $P^2 = P$ 。

三、酉算子

定义 1.10 设 H 为 Hilbert 空间, $U \in B(H)$, 若 $U^*U = UU^* = I$ (I 为 H 上的恒等算子), 则称 U 为酉算子。

可以证明: U 是 H 上的酉算子的充要条件是: (1) U 是满射; (2) U 是保范算子, 即对任意 $x \in H$, 有 $\|Ux\| = \|x\|$ 成立。

酉算子的概念可以看做线性代数中西变换在 Hilbert 空间的推广。

例如定义在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的仿射算子 $U(a, b)$ 就是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的酉算子。仿射算子的定义为^[8]: 对于任意 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ 有:

$$(U(a, b)f)(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \begin{cases} a \neq 0 \\ a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

自伴算子、投影算子、酉算子由于都满足 $T^*T = TT^*$ 条件, 所有它们都是 Hilbert 空间上的正常算子。对于空间 H 上的正常算子 T , 其充要条件是对任意 $x \in H$, 有 $\|T^*x\| = \|Tx\|$ 成立。

§ 1.2 Fourier 变换

1.2.1 $L^2(\mathbb{R})$ 中的 Fourier 变换

一、Fourier 变换的定义^[7]

定义 1.11 令 $f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, 则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$, 并且由下式定义

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.2.1)$$

当 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 时, 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ 不一定存在, 可令

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t) & |t| \leq N \\ 0 & |t| > N \end{cases}$$

使 $f_N(t) \in L^1(\mathbb{R})$, 则可由 $f_N(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}_N(\omega)$ 来定义 $\hat{f}(\omega)$, 即

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N(\omega)$$

此极限取二阶平均极限, 即满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{f}(\omega) - \hat{f}_N(\omega)\|_2 = 0$$

引用上述定义后, Fourier 变换算子 F , 可以看做是 $L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$ 映射的有界线性算子。并且可以证明, 这种映射是一一映射, 即对每一个 $g \in L^2(\mathbf{R})$, 有相应的一个且仅有一个 $f \in L^2(\mathbf{R})$, 使得 $\hat{f} = g$ 。

F 存在逆算子 F^{-1} , 即对某个 $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbf{R})$, 存在 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$, $f(t)$ 由下式规定

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.2.2)$$

二、Fourier 变换的性质

Fourier 变换的性质有许多, 这里主要叙述以下几点:

(1) 卷积定理, 若令

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = f(t) * h(t)$$

则

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{h}(\omega) \quad (1.2.3)$$

(2) Parseval 公式, 若令 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, 则

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}(\omega), \hat{g}(\omega) \rangle$$

$$\text{特别地, 有} \quad \|f(t)\|_2^2 = \langle f(t), f(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}(\omega)\|_2^2 \quad (1.2.4)$$

(3) δ 函数的 Fourier 变换

$\delta(t)$ 虽然不是一个通常意义上的函数, 而是一个广义函数, 因为它满足 $f(t) = f(t) * \delta(t)$, 所以我们一般指定 $\delta(t)$ 的 Fourier 变换为

$$\hat{\delta}(\omega) = 1 \quad (1.2.5)$$

由此, 我们按 Fourier 变换的求逆公式还有

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (1.2.6)$$

成立。

三、相关函数

定义 1.12 令 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 则其自相关函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) f^*(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t-x) dt$$

令

$$f^-(t) = f(-t)$$

则有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^{*-}(x-t) dt$$

$$= f(t) * f^{*-}(t)$$

因为

$$F[f^{*-}(t)] = \hat{f}^*(\omega)$$

所以

$$\hat{F}(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (1.2.7)$$

并有

$$|F(x)| \leq F(0) = \|f\|_2^2 \quad (1.2.8)$$

成立。

1.2.2 Poisson 求和公式

一、周期函数的 Fourier 变换

令函数 $f(t)$ 满足 $f(t+lT)=f(t)$ (l 为任意整数), 它可展开为 Fourier 级数, 即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1.2.9)$$

并且

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (1.2.10)$$

为导出周期函数的 Fourier 变换, 可借助广义函数 $\delta(\omega - n\omega_0)$, 即

$$F[e^{in\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) \quad (1.2.11)$$

从而得到

$$\begin{aligned} F[f(t)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n F[e^{in\omega_0 t}] \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

所以周期函数的傅里叶变换为频域的冲激串函数。其冲激强度由其傅里叶级数系数 c_n 所决定。

特别地, 对于 $T=2\pi, \omega_0=1$, 则有 $f(t) \in L^2(0, 2\pi), c_n \in l^2(\mathbf{Z})$, 故周期函数的 Fourier 变换, 可以看做是将 $L^2(0, 2\pi)$ 空间映射到 $l^2(\mathbf{Z})$ 空间的有界线性算子。

二、序列的 Fourier 变换

现考虑序列 $\{c_n\}, c_n \in l^2(\mathbf{Z})$, 可定义其 Fourier 变换如下:

$$\hat{f}_c(\omega_c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega_c} \quad (1.2.12)$$

其逆变换式为

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}_c(\omega_c) e^{in\omega_c} d\omega_c \quad (1.2.13)$$

因为 $\hat{f}_c(\omega_c) \in L^2(0, 2\pi)$, 即为以 2π 为周期的函数, 所以序列的 Fourier 变换是将 $l^2(\mathbf{Z})$ 映射为 $L^2(0, 2\pi)$ 的有界线性算子。

现考虑序列 $\{c_n\}$ 为连续时间函数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 通过取样而获得 (令取样周期为 T_s), 即

$$c_n = f(t)|_{t=nT_s} = f(nT_s)$$

令 $\hat{f}(\omega)$ 为 $f(t)$ 的 Fourier 变换, $\hat{f}_c(\omega)$ 为 c_n 的 Fourier 变换, 则据取样定理有

$$\hat{f}_c(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (1.2.14)$$

成立。即时域的取样将导致频谱的周期延拓, 其延拓周期为 $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$ 。

现在考虑时域连续函数 $F(t)$ 为某函数 $f(t)$ 的自相关函数, 令 $F(t)$ 的取样序列为 $F(n)$,

则由于 $\hat{F}(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$, 可得

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}\left(\omega + \frac{2k\pi}{T}\right) \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{-in\omega T}, \quad (1.2.15)$$

三、Poisson 求和公式^[7]

现考虑 $f(t) \in L^1(\mathbf{R})$ 的周期延拓式

$$\phi_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) \quad (1.2.16)$$

延拓周期为 T , 可以证明 $\phi_f(t)$ 是一个以 T 为周期的函数, 即 $\phi_f(t) \in L^1(0, T)$ 。现假定 $\phi_f(t)$ 的 Fourier 级数处处收敛, 即

$$\phi_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

那么有

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \phi_f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^T f(t + nT) e^{-ik\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \hat{f}(k\omega_0) \end{aligned}$$

$\hat{f}(k\omega_0)$ 即为 $\hat{f}(\omega)$ 的频域取样序列 (取样周期 ω_0)。

由此可得到著名的 Poisson 求和公式:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k\omega_0) e^{ik\omega_0 t} \quad (1.2.17)$$

特别当 $t=0$ 时, 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k\omega_0) \quad (1.2.18)$$

§ 1.3 信号的参数模型

1.3.1 最小相位系统

一、最小时延多项式

考虑一个 M 阶的 Z 域多项式 $A(z)$, 若其零点 z_i 全部位于单位圆内, 则称 $A(z)$ 为最小时延多项式。即

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_M z^{-M} \\ &= a_0 (1 - z_1 z^{-1}) (1 - z_2 z^{-1}) \cdots (1 - z_M z^{-1}) \end{aligned}$$

而

$$|z_i| < 1 \quad i=1, 2, \dots, M \quad (1.3.1)$$

二、最小时延性质

序列 $a=(a_0, a_1, \dots, a_M)$ 的总能量按 Parseval 公式有

$$P_A = \sum_{m=0}^M |a_m|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\omega)|^2 d\omega \quad (1.3.2)$$

若考虑其能量按时间的分布状况, 可定义部分能量为

$$P_A(n) = \sum_{m=0}^n |a_m|^2 \quad n=0, 1, \dots, M \quad (1.3.3)$$

现在若将最小时延多项式 $A(z)$ 的一个零点(不失一般性, 即 z_1)共轭映射到单位圆外, 变为 $(z_1^*)^{-1}$, 则得到一个新的多项式(非最小时延多项式):

$$B(z) = \frac{-z_1^* + z^{-1}}{1 - z_1 z^{-1}} A(z) \quad (1.3.4)$$

上式也可用一个 $(M-1)$ 阶最小时延多项式 $F(z)$ 记为

$$\begin{cases} A(z) = (1 - z_1 z^{-1})F(z) \\ B(z) = (-z_1^* + z^{-1})F(z) \end{cases} \quad (1.3.5)$$

由于

$$\left| \frac{-z_1^* + z^{-1}}{1 - z_1 z^{-1}} \right|_{z=e^{j\omega}}^2 = 1$$

所以有

$$|A(\omega)|^2 = |B(\omega)|^2 \quad (1.3.6)$$

因此, 用单位圆外的共轭镜像零点置换一个最小时延多项式的零点时, 其总振幅谱 $|A(\omega)|^2$ 保持不变, 当然总能量也保持不变。由于这种置换方法有 2^M 种, 因此可以断言, 一个 M 阶最小时延多项式的总能量(振幅谱)将会与 2^M 个非最小时延多项式的总能量相等。

虽然这种零点置换不改变总能量, 但却改变了能量随时间的分布, 即改变了部分能量。令 a_n, b_n, f_n 分别为多项式 $A(z), B(z), F(z)$ 的第 n 项系数。则由(1.3.5)式可知

$$\begin{aligned} a_n &= f_n - z_1 f_{n-1} \\ b_n &= -z_1^* f_n + f_{n-1} \end{aligned} \quad n=0, 1, \dots, M \quad (1.3.7)$$

所以有

$$|a_n|^2 - |b_n|^2 = (1 - |z_1|^2)(|f_n|^2 - |f_{n-1}|^2)$$

按(1.3.3)式求部分能量, 则有

$$P_A(n) - P_B(n) = (1 - |z_1|^2)|f_n|^2 \quad (1.3.8)$$

由于 $F(z)$ 为 $(M-1)$ 阶多项式, $|f_M|^2 = 0$

所以

$$P_A(M) = P_B(M)$$

总能量相等, 但当 $0 \leq n \leq (M-1)$ 时, 恒有

$$P_A(n) - P_B(n) \geq 0$$

即在 $0 \leq n \leq (M-1)$ 的任何时刻, $A(z)$ 的部分能量都将大于同时刻的 $B(z)$ 部分能量。也就是说, 最小时延多项式比之具有相同振幅的非最小时延多项式具有能量分布的最小延时。

三、最小相位系统

设离散时间系统的传递函数为

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{A \prod_{i=1}^N (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{p=1}^M (1 - z_p z^{-1})} \quad N < M \quad (1.3.9)$$

若 $H(z)$ 的分子、分母多项式 $N(z)$ 、 $D(z)$ 皆为最小时延多项式, 即 $H(z)$ 的零、极点皆在单位圆内, 即

$$\begin{aligned} |z_i| < 1 \quad 1 \leq i \leq N \\ |z_p| < 1 \quad 1 \leq p \leq M \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

则称 $H(z)$ 所描述的系统为最小相位系统。

显然, 通过零极点共轭映射的方法, 该最小相位系统将与许多非最小相位系统具有相同的 $|H(e^{j\omega})|^2$ 。换句话说, $|H(e^{j\omega})|^2$ 仅对最小相位系统具有惟一对应关系, 而对于非最小相位系统不具有惟一对应关系。

1.3.2 谱分解定理

一、随机信号的功率谱

离散时间实平稳随机信号 x_n 的功率谱 $P_{xx}(z)$ 定义为 x_n 的自相关函数 $R_{xx}(k)$ 的 z 变换, 即

$$P_{xx}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k) z^{-k} \quad (1.3.11)$$

式中: $R_{xx}(k)$ 定义为

$$R_{xx}(k) = E[x_{n+k} x_n] \quad (1.3.12)$$

若 $R_{xx}(k)$ 是稳定的, 则 $P_{xx}(z)$ 的收敛域包含单位圆, 所以令 $z = e^{j\omega}$, 有

$$P_{xx}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k) e^{-j\omega k} \quad (1.3.13)$$

$P_{xx}(\omega)$ 描述了信号功率随频率的分布密度, 即信号的平均功率

$$P_x = E[x_n^2] = R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\omega) d\omega \quad (1.3.14)$$

对于实平稳随机信号, 由于 $R_{xx}(k) = R_{xx}(-k)$, 所以有

$$P_{xx}(\omega) = P_{xx}(-\omega) \quad (1.3.15)$$

及 $P_{xx}(\omega)$ 为非负的实函数成立。

对于方差为 A 的白噪声信号, 由于

$$R_{xx}(k) = A \delta(k) \quad (1.3.16)$$

成立, 所以有

$$P_{xx}(\omega) = A \quad (\text{常数}) \quad (1.3.17)$$

对于实际中常遇到的带限白噪声, 它定义为:

$$P_{xx}(\omega) = A \quad |\omega| \leq \omega_0$$

所以有

$$\begin{aligned} R_{xx}(k) &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega k} d\omega \\ &= \frac{A\omega_0}{\pi} \frac{\sin\omega_0 k}{\omega_0 k} \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

两实平稳随机信号 x_n 和 y_n 的互相关函数和互功率谱分别定义为

$$R_{xy}(k) = E[x_{n+k}y_n] \quad (1.3.19)$$

$$P_{xy}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xy}(k) z^{-k} \quad (1.3.20)$$

$$P_{xy}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xy}(k) e^{-i\omega k} \quad (1.3.21)$$

在实际应用中,通常检测到的只是 x_n 的一段样本序列(例如长度为 N 的一段样本),记为 $x_N(n)$,若用 $\omega(n)$ 表示长度为 N 的数据窗,则有

$$x_N(n) = x_n \cdot \omega(n)$$

传统的功率谱估计方法是:先从 $x_N(n)$ 中近似计算自相关函数,然后,再取 Fourier 变换。即先计算取样自相关函数 $\hat{R}_{xx}(k)$ 作为 $R_{xx}(k)$ 的估计值

$$\begin{aligned} \hat{R}_{xx}(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} x_{n+k} x_n \quad |k| < N-1 \\ &= \frac{1}{N} [x_N(n) * x_N(-n)] \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

所以有功率谱的估计值

$$\begin{aligned} \hat{P}_{xx}(\omega) &= \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2 \\ &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_N(n) e^{-i\omega n} \right|^2 \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

上述方法也称周期图法。周期图法是非一致估计,并且有较大的泄漏。后来又提出许多改进方法,例如:修正周期图法,平均周期图法、Welch 法等。尽管这些改进方法在一定程度上改进了周期图法的估计性能,但仍存在频率分辨率与估计稳定性之间的矛盾,因此后来又产生了基于信号模型的现代谱估计方法。

二、随机信号通过离散线性系统

对于随机序列 x_n ,当它通过一个用 h_n 或 $H(e^{i\omega})$ 所描述的离散线性系统时,由于随机信号不存在 Fourier 变换,因此 x_n 通过离散线性系统的性状是由相关函数或功率谱来描述的。

(1) 输出信号 y_n 及其功率谱 $P_{yy}(\omega)$

如图 1.3.1 所示,随机序列 x_n (其功率谱为 $P_{xx}(\omega)$),当它通过线性系统 $H(e^{i\omega})$ 时,其输出序列 y_n 也应为随机序列,其功率谱 $P_{yy}(\omega)$ 由下式决定:

$$P_{yy}(\omega) = P_{xx}(\omega) |H(e^{i\omega})|^2 \quad (1.3.24)$$

其对应的时域形式为

$$R_{yy}(m) = R_{xx}(m) * h(m) * h(-m) \quad (1.3.25)$$

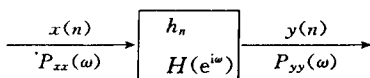


图 1.3.1 随机信号通过线性系统

(2) 输入与输出之间的互功率谱

$$P_{xy}(\omega) = P_{xx}(\omega) \cdot H(e^{j\omega}) \quad (1.3.26)$$

其对应的时域形式为

$$R_{xy}(m) = R_{xx}(m) * h(m) \quad (1.3.27)$$

三、谱分解定理

任何实平稳随机信号 y_n 的有理函数功率谱 $P_{yy}(z)$ 都可惟一地表示成下列最小相位形式

$$P_{yy}(z) = \sigma_e^2 B(z) B(z^{-1}) \quad (1.3.28)$$

式中: σ_e^2 为常数, $B(z)$ 可表示为两个最小时延多项式 $N(z)$ 与 $D(z)$ 之比, 即

$$B(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (1.3.29)$$

谱分解定理实质上保证了实平稳随机信号模型的存在性。首先, 由于 $B(z)$ 为两个最小时延多项式之比, 因此它可以看做为一个最小相位的离散时间系统的传递函数, 该系统的频率响应为 $B(e^{j\omega})$; 其次, (1.3.28) 的频域形式为

$$\begin{aligned} P_{yy}(\omega) &= \sigma_e^2 B(e^{j\omega}) B^*(e^{j\omega}) \\ &= \sigma_e^2 |B(e^{j\omega})|^2 \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

那么, 由 (1.3.24) 式及 (1.3.17) 式, y_n 可以看成是由方差为 σ_e^2 的白噪声信号 e_n 作用于最小相位系统 $B(e^{j\omega})$ 后产生的输出序列, 如图 1.3.2 所示。由于此最小相位系统完全由实平稳随机信号 y_n 所惟一地决定, 因此, 称此最小相位系统为 y_n 的信号模型。

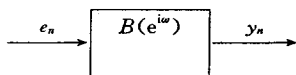


图 1.3.2 信号模型

由 (1.3.30) 可知, 实平稳随机信号 y_n 的功率谱 $P_{yy}(\omega)$ 的估计, 完全可以由对 σ_e^2 及 $B(e^{j\omega})$ 的参数估计等效地代替。这正是参数法功率谱估计的理论基础。

1.3.3 信号模型

由有理函数 $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ 所描述的信号模型, 主要有以下三种:

一、ARMA 模型

若 $H(z)$ 中 $N(z)$ 、 $D(z)$ 皆为不等于 1 的非零 z 域多项式, 即

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{1 + \sum_{i=1}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad (1.3.31)$$

式中: $\{a_i\} (1 \leq i \leq p)$ 、 $\{b_i\} (1 \leq i \leq q)$ 皆为非零常数序列, 则称信号模型 $H(z)$ 为自回归—滑动平均模型 (Autoregressive Moving Average Model), 简记为 ARMA(p, q) 模型。称序列 $\{a_i\}$ 为 AR 参数, $\{b_i\}$ 为 MA 参数。

由于 $H(z)$ 是线性时不变系统, 因此该系统还可用以下常系数差分方程描述:

$$y_n + \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} = e_n + \sum_{i=1}^q b_i e_{n-i} \quad (1.3.32)$$

式中: e_n 为零均值, 方差为 σ_e^2 的白噪声, y_n 即为 e_n 激励于 $H(z)$ 后输出的实平稳随机信号。

若用系统的单位取样响应 $h(n)$ 来描述, 还有下式成立:

$$y_n = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e(n-m) \quad (1.3.33)$$

又因为 $H(z)$ 是最小相位系统, 其逆系统 $I(z) = H^{-1}(z)$ 也必为最小相位系统。若记此逆系统的单位取样响应为 $l(n)$, 则有

$$e_n = \sum_{m=0}^{\infty} l(m) y(n-m) \quad (1.3.34)$$

成立。

二、AR 模型

若 $H(z)$ 中的 $N(z)=1$, 则有

$$H(z) = \frac{1}{D(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad (1.3.35)$$

成立。称 $H(z)$ 为自回归模型 (Autoregressive Model), 简记为 AR(p) 模型。

AR(p) 模型可用差分方程

$$y_n + \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} = e_n \quad (1.3.36)$$

描述。若令 $l(0)=1, l(n)=a_n (1 \leq n \leq p)$, 则由 (1.3.36) 式可得

$$e_n = \sum_{m=0}^p l(m) y(n-m) \quad (1.3.37)$$

与 (1.3.34) 式对比可知, AR 模型逆系统的单位取样响应 $l(n)$ 具有截尾性质, 即 $l(n)$ 为有限长度的因果序列。另外, 对于 $l(m)$ 为无限序列的 ARMA 模型, 显然可以用具有充分大的 p 阶 AR 模型来逼近。即用具有充分大 p 的 (1.3.37) 式近似逼近 (1.3.34) 式。这一结论在实际中具有重要意义, 即只要 AR(p) 模型的阶数 p 充分大, 则此 AR 模型可以近似替代任何 ARMA 模型。

三、MA 模型

若 $H(z)$ 中 $D(z)=1$, 则有

$$H(z) = N(z) = 1 + \sum_{i=1}^q b_i z^{-1} \quad (1.3.38)$$

成立。称 $H(z)$ 为滑动平均模型 (Moving Average Model), 简记为 $MA(q)$ 模型。

$MA(q)$ 模型可用差分方程

$$y_n = e_n + \sum_{i=1}^q b_i e_{n-i} \quad (1.3.39)$$

描述。若令 $h(0)=1, h(n)=b_n (1 \leq n \leq q)$, 则由 (1.3.39) 式有

$$y_n = \sum_{m=0}^q h(m) e(n-m) \quad (1.3.40)$$

将此式与 (1.3.33) 式对比可知, MA 模型的单位取样响应 $h(n)$ 具有截尾性质, 即 $h(n)$ 为有限长度的因果序列。显然, 只要 MA 模型的阶数 q 充分大, 则可用 (1.3.40) 式逼近 $ARMA$ 模型的 (1.3.33) 式。因此, 在实际中, 可以用阶数 q 充分大的 MA 模型近似代替任何 $ARMA$ 模型。

第二章 高阶谱估计

长期以来,人们常常习惯于假设信号或噪声服从高斯分布。这样,仅用二阶统计量或基于二阶统计量的功率谱分析便可提取信息,进行各种处理。但在许多实际过程中产生的信号往往是非高斯分布的信号,非高斯信号是一种更为普遍的信号。过去由于缺乏必要的分析工具,人们也只能将这些信号近似假定为高斯信号进行处理。随着信息科学的迅猛发展,研究和处理非高斯信号的主要数学分析工具——高阶统计量及基于高阶统计量的高阶谱估计技术在 20 世纪 80 年代后期得到迅速发展。高阶谱估计技术不仅可以自动抑制高斯有色噪声对非高斯信号的影响,而且有时也能抑制非高斯有色噪声的影响,还可以辨识非因果、非最小相位系统或重构非最小相位信号,检测和表征系统的非线性等。高阶谱估计技术已在雷达、声纳、通信、医学、旋转机械故障诊断、振动分析等众多领域内获得广泛应用,已成为现代信号处理的一个蓬勃发展的重要分支。

本章的目的是对高阶谱估计技术的基本概念、主要算法及其应用的主要方面进行系统介绍,以使读者对该研究领域有一个整体的了解和认识。

§ 2.1 累量及高阶谱

2.1.1 累量的定义

一、随机变量的特征函数与矩函数

(1) 特征函数

对于概率密度为 $f(x)$ 的随机变量 x , 其第一特征函数定义为

$$\Phi(v) = E[e^{ivx}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ivx}dx \quad (2.1.1)$$

若令 $\omega = -v$, 则 $\Phi(-\omega)$ 即为 $f(x)$ 的 Fourier 变换。因为 $f(x) \geq 0$, 所以 $\Phi(v)$ 在原点有最大值, 即

$$|\Phi(v)| \leq \Phi(0) = 1 \quad (2.1.2)$$

$\Phi(v)$ 的对数称之第二特征函数, 即

$$\Psi(v) = \ln \Phi(v) \quad (2.1.3)$$

例 2.1.1 若 ξ 是一高斯分布的随机变量, 即 $\xi \sim N(0, \sigma^2)$, 求其特征函数 $\Phi(v)$ 与 $\Psi(v)$ 。

解 由题意知 ξ 的概率密度函数为

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2/(2\sigma^2)} \quad (2.1.4)$$

据定义则有

$$\begin{aligned}\Phi(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{iv\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + ivx\right) dx\end{aligned}$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ax^2 \pm 2Bx - C) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-\frac{AC - B^2}{A}\right)$$

则得

$$\Phi(v) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 v^2}{2}\right) \quad (2.1.5)$$

而

$$\Psi(v) = \ln \Phi(v) = -\frac{\sigma^2 v^2}{2} \quad (2.1.6)$$

(2) 矩函数

随机变量 x 的 k 阶原点矩函数(简称矩函数) m_k 定义为

$$m_k = E[x^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (2.1.7)$$

式中: $f(x)$ 为 x 的概率密度分布函数。若 $k=1$, 则称 m 为 x 的均值, 即

$$m_1 = E[x] \quad (2.1.8)$$

$k=2$, 则称 m_2 为 x 的方差函数, 即

$$m_2 = E[x^2] \quad (2.1.9)$$

当 $m_1 \neq 0$ 时, 还可定义 x 的各阶中心矩函数

$$\mu_k = E[(x - m_1)^k] \quad (2.1.10)$$

我们今后主要研究零均值信号, 若实际信号的均值不为零, 则在预处理时, 可做去均值处理, 变为零均值信号。

随机变量 x 的矩函数与第一特征函数有什么关系呢? 若对 $\Phi(v)$ 取 k 阶导数, 则得

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^k \Phi(v)}{dv^k} \right|_{v=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (ix)^k e^{ivx} dx \Big|_{v=0} \\ &= (i)^k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^k dx \\ &= i^k m_k\end{aligned}$$

所以

$$m_k = (-i)^k \Phi^{(k)}(0) \quad (2.1.11)$$

因此 $\Phi(v)$ 又称之为 x 的矩生成函数。

(3) 随机向量的矩

对于随机向量 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 其第一联合特征函数 $\Phi(V)$ 可定义为

$$\Phi(V) = E\left[e^{i \sum_{k=1}^n v_k x_k}\right] \quad (2.1.12)$$

式中: $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ 。

第二联合特征函数可类似定义为