分析中的现代计算方法

FENXI ZHONG DE XIANDAI JISUAN FANGFA

丁睿 著

四川科学技术出版社

丁 睿 著

分析中的现代计算方法

FENXI ZHONG DE
XIANDAI
JISUAN FANGFA

四川科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

分析中的现代计算方法/丁睿著．-成都:四川科学技术出版社,2003.12

ISBN 7-5364-5466-X

Ⅰ.分… Ⅱ.丁… Ⅲ.计算方法 Ⅳ.0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 007974 号

分析中的现代计算方法

编　　者　丁　睿
责任编辑　谢增桓　侯矶楠　李宗昌
封面设计　韩建勇
版面设计　杨璐璐
责任出版　邓一羽
出版发行　四川科学技术出版社
　　　　　成都盐道街3号　邮政编码 610012
开　　本　850mm×1168mm　1/32
　　　　　印张 13.25　字数 300 千字　插页 2
印　　刷　成都市蒲江新华彩印厂
版　　次　2003年12月成都第一版
印　　次　2003年12月成都第一次印刷
印　　数　1-1 000 册
定　　价　25.00 元
ISBN 7-5364-5466-X

地址：成都盐道街3号　邮政编码：610012
电话：86671039　86672823

前言

本书从分析的框架出发，内容涉及到当前广泛使用的多种现代计算方法。包括算子方程逼近解的基本理论、有限元方法、边界元方法、近似边界元方法,并系统地论述了这些现代计算方法及其理论分析等内容。

全书共分五章，第一、二章介绍了分析框架中算子方程的基本理论，算子方程广义解与抽象变分问题，投影方法以及分析中要用到的泛函分析的基本知识背景；第三章详细论述了分析框架下的有限元方法。着重介绍了协调有限元方法及误差估计。此外还介绍了有限元方法中混合元、杂交元及非协调元等常用方法；第四章讨论了边界单元方法的内容，主要包括直接边界元和间接边界元方法的分析框架，边界元方法的误差估计，拟微分算子方程的边界元方法等；第五章介绍了近似边界元方法的基本理论及误差估计，多重互易方法的理论及收敛性分析等。

希望通过阅读本书，读者能比较全面地了解有关常用现代计算方法的基本分析方法及技巧。本书可作为计算数学专业高年级本科生和研究生的教材，也可作为相关专业研究人员和教师的参考书。

本书的主要内容曾为苏州大学、兰州大学、西南交

通大学等高校研究生作过专题讲授。部分内容取材于作者的博士论文、博士后科研报告及一些最近的研究成果。由于作者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不少谬误，敬请专家和读者指正。

在本书的编写过程中，兰州大学数学系丁方允教授提供了大量资料及研究成果并认真仔细地审阅了全部书稿，提出了许多修改意见。谨此向他深表谢意！。本书的初稿是在香港理工大学访问期间完成的。感谢香港理工大学 K.T.Chau 教授提供这样的机会。另外上海大学程昌钧教授、朱正佑教授、厦门大学张颖教授也为部分研究工作提供了指导，在此一并表示深深谢意！

本书的部分内容分别得到了国家自然科学基金、甘肃省自然科学基金及苏州大学国家自然科学预研基金的资助，作者在此表示衷心的谢意！

丁　睿

2003 年 11 月 2 日于苏州

目　录

第一章 算子方程

在本书中常常会遇到代数方程、微分方程、积分方程、变分方程解的存在惟一性。本章用算子方程来抽象上述各种方程，使问题的阐述更简明，更深刻。因此本章可看作全书的基础。其中§1、§2中涉及的许多概念，读者可在一般泛函分析教程[74]、[66]中找到，因此只简略地提及后面要用的内容。§3的内容因不易在一般教材中找到，因此将较详细地叙述。读者还可参看[44]、[18]、[19]。

§1 算子方程解的存在惟一性

X,Y 是集合。$T:X\to Y$ 是映射。$f\in Y$ 是给定元素。称算子方程

$$Tx=f \tag{1.1}$$

为第一型算子方程。

若 $T:X\to X$ 映射（又称自映射），$f\in X$，称算子方程

$$x=Tx+f \tag{1.2}$$

为第二型算子方程。

若 $f=0$，上面两方程均称为齐次方程。对齐次的第二型算子方程 $x=Tx$，无论 T 是线性还是非线性映射，只要是压缩映射，

则方程满足一定条件后将有惟一解。

§1.1 压缩映象不动点定理

X 是距离空间，$\rho(x,y)$ 为空间 X 的距离。映射 $T:X\to X$，称满足算子方程

$$x=Tx \tag{1.3}$$

的解 $x\in X$ 为 T 的不动点。

定义 1.1 X 是距离空间，映射 $T:X\to X$ 且存在常数 $q\in(0,1)$ 满足

$$\rho(Tx,Ty)\le q\rho(x,y),\quad \forall x,y\in X, \tag{1.4}$$

则称 T 是压缩映象，q 为压缩系数。

定理 1.1（压缩映象的不动点定理）设 X 为完备距离空间，$T:X\to X$ 是以 $q\in(0,1)$ 为压缩系数的压缩映象，则 T 在 X 内存在惟一不动点 x^*，并对任何初始点 $x_0\in X$，迭代列 $x_{n+1}=Tx_n, n=1,2,\cdots$ 收敛到不动点 x^* 且满足：

$$\rho(x_n,x^*)\le\frac{q^n}{1-q}\rho(x_0,Tx_0). \tag{1.5}$$

有时 T 只在 X 某子集上是压缩的，我们有如下补充定理。

定理 1.2 设 X 是完备距离空间，$\bar{x}$ 是 X 中的固定点。若仅在闭球 $\bar{S}(\bar{x};r)=\{x\in X|\rho(x,\bar{x})\le r\}$ 上有

$$\rho(Tx,Ty)\le q\rho(x,y),\quad (0<q<1),\quad \forall x,y\in\bar{S}(\bar{x};r),$$

并且 $\rho(T\bar{x},\bar{x})\le(1-q)\ r$，则 T 在 $\bar{S}(\bar{x};r)$ 中有惟一不动点。

§1.2 线性算子方程解的存在惟一性定理

定义 1.2 设 X,Y 是线性赋范空间，算子 $T:X\to Y$。

$D(T)$，$R(T)$分别表示T的定义域和值域。记$I_X : X \to X$为恒等算子，即$I_X x = x, \forall x \in X$。

（1）若存在$U : Y \to X$，使$U \circ T = I_X$，则称U为T的左逆算子。

（2）若存在$V : Y \to X$，使$T \circ V = I_Y$，则称V为T的右逆算子。

（3）若U不仅是T的左逆算子而且还是右逆算子，称U是T的逆算子，记作T^{-1}。

定理 1.3 设$T : X \to Y$

（1）T有左逆算子$\Leftrightarrow T$是一对一的映象（又叫单射算子）。

$\Leftrightarrow$算子方程$Tx = y$若有解必惟一。

（2）T有右逆算子$\Leftrightarrow T$是满值的，即$R(T) = Y$（又叫满射算子）。

$\Leftrightarrow$算子方程$Tx = y$对任何右端$y \in Y$均有解。

（3）在下述符号有意义的条件下

$$\left(T^{-1}\right)^{-1} = T, \quad (S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}.$$

定理 1.4 设X, Y是线性空间。$T : X \to Y$是线性算子。若T^{-1}存在，则$T^{-1} : Y \to X$是线性算子。

设X, Y均是赋范线性空间，记$B(X, Y)$为映X入Y的全体有界线性算子的集合。若$Y = X$，则简记成$B(X)$。

定理 1.5（Banach 逆算子定理）若X, Y是赋范线性空间，$T \in B(X, Y)$，则T^{-1}存在且有界$\Leftrightarrow T$满射且存在常数$\alpha > 0$使$\|Tx\| \geq \alpha \|x\|, \ \forall x \in X$。

证明： 必要条件：T^{-1}存在，则T必满射。利用$T^{-1}T = I_X$及T^{-1}有界，由

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \le \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|$$

得$\|Tx\| \ge \alpha\|x\|$，$\left(\alpha = \|T^{-1}\|^{-1}\right)$，$\forall x \in X$。

充分条件。设$Tx = 0$，由$\|Tx\| \ge \alpha\|x\|$得$x = 0$。若$Tx_1 = y$且$Tx_2 = y$，由T线性得$T(x_1 - x_2) = 0$。从而$x_1 - x_2 = 0$。即T单射。由T满射和$\|Tx\| \ge \alpha\|x\|$的假设，得T^{-1}存在且有界。

证毕

注：由$\|Tx\| \ge \alpha\|x\|$ $(\forall x \in X)$可推得T单射，但反之不然。

定理 1.6 若X, Y都是Banach空间，如果T满射，则T单射$\Leftrightarrow$存在$\alpha > 0$，使$\|Tx\| \ge \alpha\|x\|$，$\forall x \in X$。

推论 1.1 X, Y是Banach空间。$T, \Delta T \in B(X, Y)$且$T^{-1} \in B(Y, X)$。若$\|\Delta T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$，则$(T + \Delta T)^{-1} \in B(Y, X)$。

定理 1.6 及推论 1.1 的证明请参看[74]并且有$(T + \Delta T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-T^{-1}\Delta T\right)^n T^{-1}$。

这个定理很有用。一个复杂方程$Tx = y$若有近似方程$T_0x = y$，其解存在惟一，则只要$\Delta T = T - T_0$满足$\|T_0^{-1}\| \cdot \|\Delta T\| < 1$，即可保证$Tx = y$存在惟一解。反之亦然。

设$T \in B(X)$，I是X上恒等算子。λ是参数。线性算子T的正则集与谱的概念与第二类算子方程$(T - \lambda I)x = y$解的存在与惟一性有着密切联系。特别当λ是T的特征值时，它们将导出特征值问题。

定义 1.3 设X是复Banach空间，$T \in B(X)$，λ为一复数。

（i）如果$\lambda I - T$有有界逆算子，则称λ为T的正则值。用$\rho(T)$来记T的正则值的集合，称作T的正则集。当$\lambda \in \rho(T)$时，$R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} \in B(X)$，称作$T$的豫解式。

（ii）如果$\lambda \notin \rho(T)$，则称λ为T的谱点。用$\sigma(T)$来记T的全体谱点，称作T的谱。$\sigma(T)$中的点又可分作下面三类：

（a）$\lambda I - T$无左逆算子，即齐次方程$(\lambda I - T)x = 0$有非零解，λ称作特征值，对应的非零解称作特征元。

（b）$\lambda I - T$无右逆算子，即齐次方程$(\lambda I - T)x = 0$只有零解。若值域$R(\lambda I - T)$在X中稠，则称λ属于T的连续谱。否则称λ属于T的剩余谱。

特征值与特征向量有如下性质：

定理 1.7 设E为复 Banach 空间，$T \in B(X)$。

（i）若λ是T的特征值，则T对应于λ的全部特征元组成的一个闭子空间，今后称它为T对应λ的特征向量空间；

（ii）设$\lambda_k (k = 1,2,\cdots,n)$是$T$的$n$个不同的特征值，任取$T$对应于$\lambda_k$的特征元$x_k$，则$x_1,\cdots,x_n$线性无关。

§1.3 全连续算子的 Riesz-Schauder 理论

定义 1.4 设X是距离空间，无穷集$E \subset X$。E中的任一无穷子集必含有一个收敛点列，则称E是列紧集。

定义 1.5 X,Y是赋范线性空间。线性算子$T: X \to Y$。如果T将X中任一有界集映成Y中列紧集，则称T是全连续线性算子，简称全连续算子。

众所周知，alternative 理论对 Fredholm 积分方程的特征值理论、解的存在惟一性的讨论起了很大的作用。这里论及的 Riesz-Schauder 理论（定理 1.8—定理 1.13）可看作 Fredholm 的 alternative 理论在 Banach 空间中的推广。因此它在研究算子方程解的存在惟一性及有关特征值问题中是十分重要的。

由于许多泛函分析教材[60]、[66]、[74]均可找到有关内容，

因而这里只罗列一些重要的、后面将会用到的定理。

定理 1.8 设$T\in B(X)$全连续，$\lambda\neq 0$，则$\lambda I-T$的值域是X中的闭子空间。

定义 1.6 设X是赋范线性空间，$x\in X, f\in X^*$，如果$f(x)=0$，则称x与f直交，记作$x\perp f$。设$A\subset X$，如果$f\in X^*$与A中的一切元直交，则称f与A直交，记作$f\perp A$。设$B\subset X^*$，如果$x\in X$与B中一切元直交，则称x与B直交，记作$x\perp B$。如果$A\subset X$中的一切元与$B\in X^*$直交，则称A与B直交，记作$A\perp B$。

定理 1.9 设$T\in B(X)$全连续，则

（i）设$y\in X$是某一给定元素，$\lambda\neq 0$，则方程

$$(\lambda I-T)x=y$$

有解的充要条件是y与算子λI^*-T^*的零空间N^*直交，这里I^*表示X^*中的恒等算子；

（ii）设$g\in X^*$是某一给定的元素，$\lambda\neq 0$，则方程

$$(\lambda I^*-T^*)f=g$$

有解的充要条件是g与算子$\lambda I-T$的零空间N直交。

由上面定理可以看出，$T\in B(X)$全连续，则或者（i）齐次方程$x-Tx=0$有非零解，或者（ii）对每个$y\in X$，方程$x-Tx=y$有惟一确定的解，这就是所谓的 alternative 性质（又称二择一性质）。

定理 1.10（正则性定理）设$T\in B(X)$全连续，$\lambda\neq 0$，则λ是T的正则值的充要条件是下列两条件之一成立：

（i）$(\lambda I-T)X=X$，即$\lambda I-T$的值域是X；

（ii）$(\lambda I-T)x=0$只有零解。

定理 1.11 设$T\in B(X)$全连续，则

（i）任何复数$\lambda\neq 0$或者是T的正则值或者是T的特征值，二者必居其一，当$\lambda\neq 0$是T的特征值时，对应的特征向量空间是有限维的；

（ii）T的谱集$\sigma(T)$或者是有限集或者是仅以零为其聚点的可列集。

定理 1.12 设$T\in B(X)$全连续，则

（i）$\lambda\neq 0$是T的特征值的充要条件是λ为T^*的特征值；

（ii）设$\lambda,\mu(\lambda\neq\mu)$分别是$T$，$T^*$的特征值，则$T$对应于$\lambda$的特征向量空间$L_\lambda$与$T^*$对应于$\mu$的特征向量空间$L_\mu^*$直交。

定理 1.13 设$T\in B(X)$全连续，则

（i）$\sigma(T)=\sigma(T^*)$；

（ii）T（T^*）的非零谱点都是T（T^*）的特征值，而T，T^*对应于同一个非零特征值的特征向量空间有相同的维数，且维数有限；

（iii）$\sigma(T)$（即$\sigma(T^*)$）或是有限集或是仅以零为聚点的可列集；

（iv）设$\lambda\neq 0$是T的特征值（于是也是T^*的特征值），则方程

$$(\lambda I-T)x=y$$

有解的充要条件是y与λI^*-T^*的零空间直交。而方程

$$(\lambda I^*-T^*)f=g$$

有解的充要条件是g与$\lambda I-T$的零空间直交。