

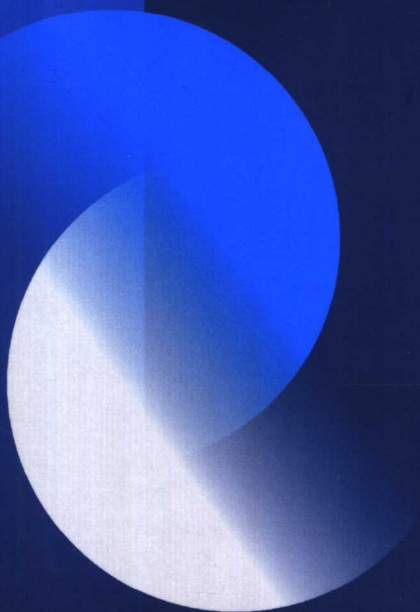
FENXI ZHONG DE

XIANDAI

JISUAN FANGFA

分析中的 现代 计算方法

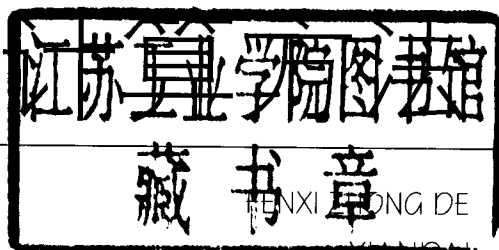
丁 睿 著



四川科学技术出版社

丁 睿 著

分析中的 现代



图书在版编目(CIP)数据

分析中的现代计算方法/丁睿著. - 成都:四川科学技术出版社,2003.12

ISBN 7-5364-5466-X

I.分… II.丁… III.计算方法 IV.0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 007974 号

分析中的现代计算方法

编者 丁睿
责任编辑 谢增桓 侯帆楠 李宗昌
封面设计 韩建勇
版面设计 杨璐璐
责任出版 邓一羽
出版发行 四川科学技术出版社
成都盐道街3号 邮政编码 610012
开本 850mm×1168mm 1/32
印张 13.25 字数 300千字 插页 2
印刷 成都市蒲江新华彩印厂
版次 2003年12月成都第一版
印次 2003年12月成都第一次印刷
印数 1-1 000册
定价 25.00元
ISBN 7-5364-5466-X

■ 版权所有·翻印必究 ■

■本书如有缺页、破损、装订错误,请寄回印刷厂调换。

■如需购本书,请与本社邮购组联系。

地址:成都盐道街3号 邮政编码:610012

电话:86671039 86672823

前 言

本书从分析的框架出发,内容涉及到当前广泛使用的多种现代计算方法。包括算子方程逼近解的基本理论、有限元方法、边界元方法、近似边界元方法,并系统地论述了这些现代计算方法及其理论分析等内容。

全书共分五章,第一、二章介绍了分析框架中算子方程的基本理论,算子方程广义解与抽象变分问题、投影方法以及分析中要用到的泛函分析的基本知识背景;第三章详细论述了分析框架下的有限元方法。着重介绍了协调有限元方法及误差估计。此外还介绍了有限元方法中混合元、杂交元及非协调元等常用方法;第四章讨论了边界单元方法的内容,主要包括直接边界元和间接边界元方法的分析框架,边界元方法的误差估计,拟微分算子方程的边界元方法等;第五章介绍了近似边界元方法的基本理论及误差估计,多重互易方法的理论及收敛性分析等。

希望通过阅读本书,读者能比较全面地了解有关常用现代计算方法的基本分析方法及技巧。本书可作为计算数学专业高年级本科生和研究生的教材,也可作为相关专业研究人员和教师的参考书。

本书的主要内容曾为苏州大学、兰州大学、西南交



通大学等高校研究生作过专题讲授。部分内容取材于作者的博士论文、博士后科研报告及一些最近的研究成果。由于作者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不少谬误，敬请专家和读者指正。

在本书的编写过程中，兰州大学数学系丁方允教授提供了大量资料及研究成果并认真仔细地审阅了全部书稿，提出了许多修改意见。谨此向他深表谢意！。本书的初稿是在香港理工大学访问期间完成的。感谢香港理工大学 K.T.Chau 教授提供这样的机会。另外上海大学程昌钧教授、朱正佑教授、厦门大学张颖教授也为部分研究工作提供了指导，在此一并表示深深谢意！

本书的部分内容分别得到了国家自然科学基金、甘肃省自然科学基金及苏州大学国家自然科学基金预研基金的资助，作者在此表示衷心的感谢！

丁 睿

2003 年 11 月 2 日于苏州

目 录

第一章 算子方程	1
§ 1 算子方程解的存在惟一性	1
§ 1.1 压缩映象不动点定理	2
§ 1.2 线性算子方程解的存在惟一性定理	2
§ 1.3 全连续算子的 Riesz-Schauder 理论	5
§ 2 抽象变分问题解的存在惟一性	8
§ 2.1 映射的可微性	8
§ 2.2 极值与 Lagrange 乘子	10
§ 2.3 抽象变分问题	15
§ 2.4 Lax-Milgram 定理	20
§ 2.5 Babuška-Brezzi 理论	24
§ 2.6 算子方程的广义解与抽象变分问题	29
§ 3 投影方法	31
§ 3.1 投影方法简介	32
§ 3.2 第二型方程的投影方法	38
§ 3.3 第一型方程的投影方法	40
§ 3.4 抽象变分问题的误差估计	44
第二章 Sobolev 空间	56



§ 1 广义函数与广义导数	56
§ 1.1 广义函数与 δ 函数	64
§ 1.2 广义导数	68
§ 1.3 广义函数的支集与积运算	72
§ 2 整数次 Sobolev 空间	74
§ 2.1 $W^{m,p}(\Omega)$ 的定义及简单性质	74
§ 2.2 空间 $H^m(\Omega)$	77
§ 2.3 空间 $W^{m,p}$ 中的嵌入与紧嵌入定理	81
§ 2.4 加权 Sobolev 空间 $W_\alpha^{m,p}(\Omega')$	87
§ 3 非整数次 Sobolev 空间	90
§ 3.1 空间 $S(R^n)$ 和 $S'(R^n)$ 上的 Fourier 变换	90
§ 3.2 非整数次 Sobolev 空间 $H^s(R^n)$ 和 $H^s(\Omega)$	92
§ 3.3 迹空间 $H^s(\Gamma)$	96
§ 3.4 迹定理	99
§ 4 范数等价定理	102
§ 4.1 $H^m(\Omega)$ 中的范数等价定理及两个重要的不等式	102
§ 4.2 $\dot{W}_\alpha^m(\Omega')$ 与 $W_\alpha^m(\Omega')$ 中的范数等价定理	105
第三章 有限元方法	110
§ 1 椭圆型边值问题解的变分方程	110
§ 1.1 变分方程及弱解	111
§ 1.2 最小势能原理与最小总余能原理	129
§ 2 一般有限元方法	137
§ 2.1 Galerkin 方法与 Ritz 方法	137
§ 2.2 误差估计及 Aubin-Nitsche 技巧	152
§ 2.3 超松弛法	164

§ 3 特殊有限元方法	170
§ 3.1 混合有限元方法	171
§ 3.2 杂交有限元方法	178
§ 3.3 非协调有限元	190
第四章 边界元方法	194
§ 1 Laplace 方程边值问题的 (边界元直接方法)	
古典积分方程	195
§ 1.1 基本解	196
§ 1.2 Laplace 方程和 Poisson 方程 (内外问题)	
解的全平面表达式	197
§ 1.3 各类边值问题的直接边界积分方程	209
§ 1.4 调和函数在无穷远处限制条件的等价形式	213
§ 1.5 位势理论 各类边值问题的间接积分方程	216
§ 1.6 间接边界积分方程及其可解性	220
§ 1.7 直接边界积分方程的可解性	232
§ 2 配置边界单元方法	237
§ 2.1 常边界单元与边界元方程	238
§ 2.2 系数矩阵 H 和 D 的计算	242
§ 2.3 线性边界单元与边界方程	246
§ 3 边界积分方程及其等价边界变分方程	253
§ 3.1 Sobolev 空间中的 Green 公式与解的	
全空间表达式	253
§ 3.2 三维边值问题的边界变分方程	255
§ 3.3 二维边值问题的边界变分方程	273
§ 4 边界单元的逼近性质	276



§ 4.1 边界变分方程的离散方程	276
§ 4.2 边界的逼近	279
§ 4.3 边界函数的逼近	284
§ 5 边界元误差分析	290
§ 6 拟微分算子, Helmholtz 方程的边界元分析	305
§ 6.1 拟微分算子	306
§ 6.2 三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 问题的边界 元法及其收敛性分析	319
§ 6.3 具非线性边值条件的二维 Helmholtz 方程 的边界元分析	333
第五章 近似边界元方法	344
§ 1 二维 Laplace 方程 Dirichlet 边值问题的近似 边界元方法 (ABEM)	345
§ 1.1 具近似基本解的边界元方法	345
§ 1.2 近似变分方程解的存在惟一性及解估计	348
§ 1.3 近似解估计	352
§ 2 方程 $\nabla^4 u + \theta u = f$ 的近似边界元法及收敛性分析	355
§ 2.1 方程 $\nabla^4 u + \theta u = 0$ 的近似边界元法	355
§ 2.2 离散变分方程解的存在惟一性及解的误差估计	359
§ 2.3 非齐次问题及推广	367
§ 3 方程 $\nabla^4 u + \theta u = f$ 的多重互易方法 (MRM) 及 收敛性分析	369
§ 3.1 边值问题弱解的存在惟一性	371
§ 3.2 解的全平面表达式和常规边界积分方程	374
§ 3.3 MRM 方法解的全平面表达式及其边界积分方程	376

§ 3.4 MRM 方法的边界变分方程.....	379
§ 3.5 Galerkin 方法及其误差估计	382
§ 3.6 结语	386
§ 4 方程 $\Delta^2 w - s\Delta w + k^2 w = f$ 的具两组高阶基本解序列 的 MRM 方法	387
§ 4.1 方程 $\Delta^2 w - s\Delta w + k^2 w = f$ 的常规边界积 分方法	388
§ 4.2 具两组高阶基本解序列的 MRM 方法	390
参考文献	401
索引	409

第一章 算子方程

在本书中常常会遇到代数方程、微分方程、积分方程、变分方程解的存在惟一性。本章用算子方程来抽象上述各种方程，使问题的阐述更简明，更深刻。因此本章可看作全书的基础。其中 § 1、§ 2 中涉及的许多概念，读者可在一般泛函分析教程[74]、[66]中找到，因此只简略地提及后面要用的内容。§ 3 的内容因不易在一般教材中找到，因此将较详细地叙述。读者还可参看[44]、[18]、[19]。

§ 1 算子方程解的存在惟一性

X, Y 是集合。 $T: X \rightarrow Y$ 是映射。 $f \in Y$ 是给定元素。称算子方程

$$Tx = f \quad (1.1)$$

为第一型算子方程。

若 $T: X \rightarrow X$ 映射（又称自映射）， $f \in X$ ，称算子方程

$$x = Tx + f \quad (1.2)$$

为第二型算子方程。

若 $f = 0$ ，上面两方程均称为齐次方程。对齐次的第二型算子方程 $x = Tx$ ，无论 T 是线性还是非线性映射，只要是压缩映射，

则方程满足一定条件后将有惟一解。

§ 1.1 压缩映象不动点定理

X 是距离空间, $\rho(x, y)$ 为空间 X 的距离。映射 $T: X \rightarrow X$, 称满足算子方程

$$x = Tx \quad (1.3)$$

的解 $x \in X$ 为 T 的不动点。

定义 1.1 X 是距离空间, 映射 $T: X \rightarrow X$ 且存在常数 $q \in (0, 1)$ 满足

$$\rho(Tx, Ty) \leq q\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X, \quad (1.4)$$

则称 T 是压缩映象, q 为压缩系数。

定理 1.1 (压缩映象的不动点定理) 设 X 为完备距离空间, $T: X \rightarrow X$ 是以 $q \in (0, 1)$ 为压缩系数的压缩映象, 则 T 在 X 内存在惟一不动点 x^* , 并对任何初始点 $x_0 \in X$, 迭代列 $x_{n+1} = Tx_n, n = 1, 2, \dots$ 收敛到不动点 x^* 且满足:

$$\rho(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho(x_0, Tx_0). \quad (1.5)$$

有时 T 只在 X 某子集上是压缩的, 我们有如下补充定理。

定理 1.2 设 X 是完备距离空间, $\bar{x}$ 是 X 中的固定点。若 $\bar{x}$ 在闭球 $\bar{S}(\bar{x}; r) = \{x \in X | \rho(x, \bar{x}) \leq r\}$ 上有

$$\rho(Tx, Ty) \leq q\rho(x, y), \quad (0 < q < 1), \quad \forall x, y \in \bar{S}(\bar{x}; r),$$

并且 $\rho(T\bar{x}, \bar{x}) \leq (1-q)r$, 则 T 在 $\bar{S}(\bar{x}; r)$ 中有惟一不动点。

§ 1.2 线性算子方程解的存在惟一性定理

定义 1.2 设 X, Y 是线性赋范空间, 算子 $T: X \rightarrow Y$ 。

$D(T), R(T)$ 分别表示 T 的定义域和值域。记 $I_X: X \rightarrow X$ 为恒等算子, 即 $I_X x = x, \forall x \in X$ 。

(1) 若存在 $U: Y \rightarrow X$, 使 $U \circ T = I_X$, 则称 U 为 T 的左逆算子。

(2) 若存在 $V: Y \rightarrow X$, 使 $T \circ V = I_Y$, 则称 V 为 T 的右逆算子。

(3) 若 U 不仅是 T 的左逆算子而且还是右逆算子, 称 U 是 T 的逆算子, 记作 T^{-1} 。

定理 1.3 设 $T: X \rightarrow Y$

(1) T 有左逆算子 $\Leftrightarrow T$ 是一对一的映象 (又叫单射算子)。

$\Leftrightarrow$ 算子方程 $Tx = y$ 若有解必惟一。

(2) T 有右逆算子 $\Leftrightarrow T$ 是满值的, 即 $R(T) = Y$ (又叫满射算子)。

$\Leftrightarrow$ 算子方程 $Tx = y$ 对任何右端 $y \in Y$ 均有解。

(3) 在下述符号有意义的条件下

$$(T^{-1})^{-1} = T, (S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}.$$

定理 1.4 设 X, Y 是线性空间。 $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子。若 T^{-1} 存在, 则 $T^{-1}: Y \rightarrow X$ 是线性算子。

设 X, Y 均是赋范线性空间, 记 $B(X, Y)$ 为映 X 入 Y 的全体有界线性算子的集合。若 $Y = X$, 则简记成 $B(X)$ 。

定理 1.5 (Banach 逆算子定理) 若 X, Y 是赋范线性空间, $T \in B(X, Y)$, 则 T^{-1} 存在且有界 $\Leftrightarrow T$ 满射且存在常数 $\alpha > 0$ 使 $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|, \forall x \in X$ 。

证明: 必要条件: T^{-1} 存在, 则 T 必满射。利用 $T^{-1}T = I_X$ 及 T^{-1} 有界, 由

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|$$

得 $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$, $\left(\alpha = \|T^{-1}\|^{-1}\right)$, $\forall x \in X$.

充分条件. 设 $Tx=0$, 由 $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$ 得 $x=0$. 若 $Tx_1=y$ 且 $Tx_2=y$, 由 T 线性得 $T(x_1-x_2)=0$. 从而 $x_1-x_2=0$. 即 T 单射. 由 T 满射和 $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$ 的假设, 得 T^{-1} 存在且有界.

证毕

注: 由 $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$ ($\forall x \in X$) 可推得 T 单射, 但反之不然.

定理 1.6 若 X, Y 都是 Banach 空间, 如果 T 满射, 则 T 单射 $\Leftrightarrow$ 存在 $\alpha > 0$, 使 $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$, $\forall x \in X$.

推论 1.1 X, Y 是 Banach 空间. $T, \Delta T \in B(X, Y)$ 且 $T^{-1} \in B(Y, X)$. 若 $\|\Delta T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, 则 $(T + \Delta T)^{-1} \in B(Y, X)$.

定理 1.6 及推论 1.1 的证明请参看 [74] 并且有

$$(T + \Delta T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-T^{-1}\Delta T)^n T^{-1}.$$

这个定理很有用. 一个复杂方程 $Tx=y$ 若有近似方程 $T_0x=y$, 其解存在惟一, 则只要 $\Delta T = T - T_0$ 满足 $\|T_0^{-1}\| \cdot \|\Delta T\| < 1$, 即可保证 $Tx=y$ 存在惟一解. 反之亦然.

设 $T \in B(X)$, I 是 X 上恒等算子. λ 是参数. 线性算子 T 的正则集与谱的概念与第二类算子方程 $(T - \lambda I)x = y$ 解的存在与惟一性有着密切联系. 特别当 λ 是 T 的特征值时, 它们将导出特征值问题.

定义 1.3 设 X 是复 Banach 空间, $T \in B(X)$, λ 为一复数.

(i) 如果 $\lambda I - T$ 有有界逆算子, 则称 λ 为 T 的正则值. 用 $\rho(T)$ 来记 T 的正则值的集合, 称作 T 的正则集. 当 $\lambda \in \rho(T)$ 时, $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} \in B(X)$, 称作 T 的豫解式.

(ii) 如果 $\lambda \notin \rho(T)$, 则称 λ 为 T 的谱点。用 $\sigma(T)$ 来记 T 的全体谱点, 称作 T 的谱。 $\sigma(T)$ 中的点又可分作下面三类:

(a) $\lambda I - T$ 无左逆算子, 即齐次方程 $(\lambda I - T)x = 0$ 有非零解, λ 称作特征值, 对应的非零解称作特征元。

(b) $\lambda I - T$ 无右逆算子, 即齐次方程 $(\lambda I - T)x = 0$ 只有零解。若值域 $R(\lambda I - T)$ 在 X 中稠, 则称 λ 属于 T 的连续谱。否则称 λ 属于 T 的剩余谱。

特征值与特征向量有如下性质:

定理 1.7 设 E 为复 Banach 空间, $T \in B(X)$ 。

(i) 若 λ 是 T 的特征值, 则 T 对应于 λ 的全部特征元组成的一个闭子空间, 今后称它为 T 对应 λ 的特征向量空间;

(ii) 设 $\lambda_k (k=1, 2, \dots, n)$ 是 T 的 n 个不同的特征值, 任取 T 对应于 λ_k 的特征元 x_k , 则 $x_1, \dots, x_n$ 线性无关。

§ 1.3 全连续算子的 Riesz-Schauder 理论

定义 1.4 设 X 是距离空间, 无穷集 $E \subset X$ 。 E 中的任一无穷子集必含有一个收敛点列, 则称 E 是列紧集。

定义 1.5 X, Y 是赋范线性空间。线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 。如果 T 将 X 中任一有界集映成 Y 中列紧集, 则称 T 是全连续线性算子, 简称全连续算子。

众所周知, alternative 理论对 Fredholm 积分方程的特征值理论、解的存在惟一性的讨论起了很大的作用。这里论及的 Riesz-Schauder 理论 (定理 1.8—定理 1.13) 可看作 Fredholm 的 alternative 理论在 Banach 空间中的推广。因此它在研究算子方程解的存在惟一性及有关特征值问题中是十分重要的。

由于许多泛函分析教材[60]、[66]、[74]均可找到有关内容,



因而这里只罗列一些重要的、后面将会用到的定理。

定理 1.8 设 $T \in B(X)$ 全连续, $\lambda \neq 0$, 则 $\lambda I - T$ 的值域是 X 中的闭子空间。

定义 1.6 设 X 是赋范线性空间, $x \in X, f \in X^*$, 如果 $f(x) = 0$, 则称 x 与 f 直交, 记作 $x \perp f$ 。设 $A \subset X$, 如果 $f \in X^*$ 与 A 中的一切元直交, 则称 f 与 A 直交, 记作 $f \perp A$ 。设 $B \subset X^*$, 如果 $x \in X$ 与 B 中一切元直交, 则称 x 与 B 直交, 记作 $x \perp B$ 。如果 $A \subset X$ 中的一切元与 $B \subset X^*$ 直交, 则称 A 与 B 直交, 记作 $A \perp B$ 。

定理 1.9 设 $T \in B(X)$ 全连续, 则

(i) 设 $y \in X$ 是某一给定元素, $\lambda \neq 0$, 则方程

$$(\lambda I - T)x = y$$

有解的充要条件是 y 与算子 $\lambda I^* - T^*$ 的零空间 N^* 直交, 这里 I^* 表示 X^* 中的恒等算子;

(ii) 设 $g \in X^*$ 是某一给定的元素, $\lambda \neq 0$, 则方程

$$(\lambda I^* - T^*)f = g$$

有解的充要条件是 g 与算子 $\lambda I - T$ 的零空间 N 直交。

由上面定理可以看出, $T \in B(X)$ 全连续, 则或者 (i) 齐次方程 $x - Tx = 0$ 有非零解, 或者 (ii) 对每个 $y \in X$, 方程 $x - Tx = y$ 有惟一确定的解, 这就是所谓的 alternative 性质 (又称二择一性质)。

定理 1.10 (正则性定理) 设 $T \in B(X)$ 全连续, $\lambda \neq 0$, 则 λ 是 T 的正则值的充要条件是下列两条件之一成立:

(i) $(\lambda I - T)X = X$, 即 $\lambda I - T$ 的值域是 X ;

(ii) $(\lambda I - T)x = 0$ 只有零解。

定理 1.11 设 $T \in B(X)$ 全连续, 则

(i) 任何复数 $\lambda \neq 0$ 或者是 T 的正则值或者是 T 的特征值, 二者必居其一, 当 $\lambda \neq 0$ 是 T 的特征值时, 对应的特征向量空间是有限维的;

(ii) T 的谱集 $\sigma(T)$ 或者是有限集或者是仅以零为其聚点的可列集。

定理 1.12 设 $T \in B(X)$ 全连续, 则

(i) $\lambda \neq 0$ 是 T 的特征值的充要条件是 λ 为 T^* 的特征值;

(ii) 设 $\lambda, \mu (\lambda \neq \mu)$ 分别是 T, T^* 的特征值, 则 T 对应于 λ 的特征向量空间 L_λ 与 T^* 对应于 μ 的特征向量空间 L_μ^* 直交。

定理 1.13 设 $T \in B(X)$ 全连续, 则

(i) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$;

(ii) $T (T^*)$ 的非零谱点都是 $T (T^*)$ 的特征值, 而 T, T^* 对应于同一个非零特征值的特征向量空间有相同的维数, 且维数有限;

(iii) $\sigma(T)$ (即 $\sigma(T^*)$) 或是有限集或是仅以零为聚点的可列集;

(iv) 设 $\lambda \neq 0$ 是 T 的特征值 (于是也是 T^* 的特征值), 则方程

$$(\lambda I - T)x = y$$

有解的充要条件是 y 与 $\lambda I^* - T^*$ 的零空间直交。而方程

$$(\lambda I^* - T^*)f = g$$

有解的充要条件是 g 与 $\lambda I - T$ 的零空间直交。