

///

高等学校通用教材

# 线性系统理论 和数字信号处理

殷瑞 丛士杰 殷茗 编著

电子信息科学



北京航空航天大学出版社

# 线性系统理论和 数字信号处理

殷 瑞 丛士杰 殷 茗 编著

北京航空航天大学出版社

## 内容简介

《线性系统理论和数字信号处理》是电子信息类专业工程硕士生教材。

上篇讨论信号和系统分析的时域和频域技术,还讨论了稳定性和品质分析等问题。本篇可作为学位课“线性系统理论”的教材。

下篇以函数的正交展开为基础,讨论数字滤波器的设计和实现,傅里叶变换的快速算法、同态信号处理和子波分析。本篇可作为学位课“数字信号处理”的教材。

书中专用一章引导学生学习 MATLAB 软件,并通过各章的具体使用对其加深了解,最后通过介绍滤波器设计和分析工具箱使学生全面掌握该软件与本教材有关的内容。

作为本学科的基本方法——推演法的应用,本书给出了从狭义相对论推演出旋转相对论的示例,并以此为基础讨论了力的统一、质量的源及相对论和量子力学的统一等问题。

本书可供相关专业的本科和工学硕士以及科研人员参阅。

### 图书在版编目(CIP)数据

线性系统理论和数字信号处理/殷瑞编著. —北京:  
北京航空航天大学出版社,2004.2

ISBN 7-81077-408-5

I. 线… II. 殷… III. ①线性系统理论②数字信号  
—信号处理 IV. ①O231②TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 095732 号

### 线性系统理论和数字信号处理

殷 瑞 丛士杰 殷 茗 编著  
责任编辑 金友泉

\*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

\*

开本:787×1092 1/16 印张:16.5 字数:422 千字

2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷 印数:5 000 册

ISBN 7-81077-408-5 定价:22.00 元

## 前 言

科学技术的飞速发展,对知识更新的要求越来越迫切,工程硕士的培养已经成了高等院校的重要任务之一。

和工学硕士不同,电子信息工程专业半数以上的工程硕士生本科修的不是本专业,缺乏对本专业基础知识的系统了解。即使本科修的是电子类专业,也大多由于工作任务的单调而淡忘了有关基础。这给两门学位课:“线性系统理论”和“数字信号处理”的教学造成了困难。系统地补上必要而又不冗长的有关基础,是本教材编写的第一个着眼点。

线性系统理论和数字信号处理作为学科已有 30 年以上的历史。学科发展初期出版的教材,某些内容已无关紧要。而近十几年来出现的新技术(比如子波分析)却又很少在教材中反映。保证理论完整性的前提下,删除过时的内容,增补新技术是本教材编写的第二个着眼点。

计算机技术的飞速发展,软硬件的不断换代,不仅改变了科技人员的工作环境,同时也改变了工作内容。特别是 MATLAB 软件问世后,大量的程序编写和调试工作变成了正确调用有关的函数语句。不仅原本十分重要的计算(比如计算卷积、计算傅里叶变换和反拉普拉斯变换等)现在都交给计算机做了,而且原本要由科技人员编调的程序(比如据给定的系统函数实现数字系统)现在只要一两条语句、一两秒的机上操作就可完成。相应的教学内容和要求当然也应随之变化,这是本教材编写的第三个着眼点。

不同科技领域的互相渗透,造就了交叉学科的不断出现。许多交叉学科中不仅用到了电子信息工程的具体技术,而且用到了它的理论和方法甚至是全部的理论体系。比如从事生物医学工程研究的科技人员,不仅要懂生理和解剖,还要懂基因和染色体,另外也还要精通系统理论和信号处理。这些专业的(本科)学生不可能像电子工程专业的学生那样花上一两百学时学三四门有关的课程,但可按本教材用几十课时学到必要的基础,继而能无困难地阅读专业文献。编者认为,即使是电子工程专业的(本科和工学硕士)学生也可参阅本教材。

创新是科技发展的命脉,可惜,近年来我国学者的重大创新不多。科技水平较低固然是一个原因,但更重要的原因是思想被束缚。在学习阶段就充分激活学生的思维,是当前教育工作的重要任务之一。基于这种考虑,作为应用示例的第 13 章,本教材不去介绍具体技术的应用,而是讨论相对论和量子力学的统一问题。不仅希望学生能体会到如何把线性系统理论和信号处理的方法和理念用到其他学科,更希望学生能打消自卑,提高抗压能力,勇敢地去面对科技工作中的各种挑战。

编者建议:本教材第 1~4 章可作为线性系统理论课 32 课时的讲授内容,第 5 章可作为该课 12 课时的上机作业内容,第 6~12 章可作为数字信号处理课 32 课时的讲授内容,某些章所附的上机作业可另用 12 课时完成,余下的课时可用做课堂练习和考试。本教材的第 13 章仅供学生课外阅读。

本书第 4 章由丛士杰执笔,第 5 章由殷茗执笔,其余各章由殷瑞执笔并统编。笔者感谢邵萍、裘岚、程朝晖、张志强等同志对本书的成文所做的大量工作,感谢责任编辑金友泉先生为本书的出版付出的辛勤劳动。

# 目 录

## 上篇 线性系统理论

### 第 1 章 信号和系统分析的时域技术

1.1 基本概念 .....	1
1.2 离散线性时不变系统的卷积和(convolution sum) .....	4
1.3 连续线性时不变系统的卷积积分 .....	8
1.4 连续系统的微分方程和状态空间表示 .....	10
1.4.1 简单系统微分方程的建立 .....	10
1.4.2 复杂系统微分方程的建立 .....	11
1.4.3 微分方程的求解 .....	12
1.5 离散系统的差分方程 .....	12

### 第 2 章 信号和系统分析的频域技术

2.1 频域技术总论 .....	14
2.1.1 微分方程的频域解法和连续信号及系统分析的主要内容 .....	14
2.1.2 差分方程的频域解法和离散信号及系统分析的主要内容 .....	16
2.2 平方可积信号表示成(复)指数函数的线性组合(信号的谱分析) .....	18
2.2.1 周期性信号的谱分析 .....	18
2.2.2 非周期性信号的谱分析 .....	21
2.2.3 有限持续期信号的谱分析和频率采样 .....	25
2.3 信号的拉普拉斯变换:任意信号表示成(复)指数函数的线性组合 .....	26
2.3.1 信号的拉普拉斯变换 .....	26
2.3.2 反拉普拉斯变换计算的部分分式法 .....	28
2.3.3 用 MATLAB 计算正反傅里叶变换和正反拉普拉斯变换 .....	30
2.4 积分变换的基本性质(定理) .....	30
2.5 离散信号(序列)表示成(复)指数序列的线性组合 .....	37
2.5.1 由频率采样引出时间采样 .....	37
2.5.2 序列的傅里叶变换和 $z$ 变换 .....	39

### 第 3 章 线性系统分析

3.1 线性系统的频率响应 .....	42
3.2 传递函数(transfer function) .....	45

3.2.1	传递函数的定义和概念,简单系统传递函数的求法	45
3.2.2	结构图和复杂系统传递函数的求法	47
3.2.3	零、极点和传递函数的几何意义	49
3.3	离散系统的稳定性	50
3.4	连续系统的稳定性和 Routh-Hurwitz 判别法	52

## 第4章 反馈控制系统分析

4.1	引言	55
4.2	反馈控制系统的稳定性分析	57
4.2.1	辐角原理	58
4.2.2	奈奎斯特图和判据	58
4.2.3	波德图和判据	60
4.2.4	稳定裕度	65
4.2.5	用 MATLAB 绘制奈奎斯特图和波德图	66
4.3	反馈控制系统的品质分析	66
4.3.1	过渡过程分析	67
4.3.2	稳态误差分析	69
4.4	复合控制系统	73

## 第5章 MATLAB 入门

5.1	MATLAB 的两种编辑状态	74
5.1.1	命令行状态	74
5.1.2	指令窗状态(文件编辑状态)	75
5.1.3	本节作业	77
5.2	函数计算器的使用	77
5.3	符号表达式	78
5.3.1	符号表达式作数值运算	78
5.3.2	符号运算	80
5.3.3	符号表达式的图形绘制	83
5.4	矩阵(二维数组)和三维图形的绘制	83

# 下篇 数字信号处理

## 第6章 函数的正交展开

6.1	希尔伯特函数空间和函数的正交展开	86
6.2	函数(包括序列)正交展开举例	91
6.3	离散系统和连续系统的等效性	94
6.4	数字信号处理中的各种变换	100

**第 7 章 无限长脉冲响应(IIR)数字滤波器**

7.1 IIR 系统的实现及 MATLAB 的 filter 功能调用 .....	105
7.2 IIR 系统的变换设计法 .....	110
7.3 模拟滤波器的设计 .....	114
7.3.1 巴特沃斯滤波器 .....	114
7.3.2 切比雪夫滤波器 .....	116
7.4 IIR 系统的最小 $P$ 误差设计 .....	118

**第 8 章 离散傅里叶变换(DFT)和快速傅里叶变换(FFT)**

8.1 离散傅里叶变换的物理概念 .....	121
8.2 DFT 的快速算法——FFT .....	125
8.2.1 时域抽取的 FFT 算法 .....	126
8.2.2 频域抽取的 FFT 算法 .....	129
8.2.3 用 MATLAB 计算 FFT .....	131

**第 9 章 有限长脉冲响应(FIR)系统**

9.1 FIR 系统的实现 .....	133
9.1.1 线性相移 FIR 系统的条件和实现 .....	133
9.1.2 FIR 系统的快速实现 .....	135
9.2 FIR 滤波器的频率采样结构和频率采样设计 .....	139
9.3 FIR 滤波器的窗口设计法 .....	141
9.4 FIR 滤波器的最小最大误差逼近 .....	145
9.5 MATLAB fdatool(滤波器设计和分析工具箱)的使用 .....	151

**第 10 章 同态信号的处理**

10.1 实因果序列傅里叶变换的希尔伯特变换 .....	156
10.2 最小相移序列 .....	160
10.3 乘法同态信号的处理 .....	164
10.4 卷积同态信号的处理 .....	165

**第 11 章 二维信号处理**

11.1 引 言 .....	173
11.2 二维系统的稳定性 .....	176
11.3 二维 IIR 滤波器的设计 .....	179
11.4 二维 FIR 滤波器的设计 .....	181
11.5 二维 DFT 的快速算法 .....	184

**第 12 章 子波分析(Wavelet analysis)**

12.1 引言:信号的时-频分析 .....	186
------------------------	-----

12.2	连续子波变换	192
12.3	离散正交子波变换	196
12.3.1	构造规范正交子波基底的思路	196
12.3.2	尺度函数 $\varphi(t)$ 及组合系数 $h_n, g_n$ 须满足的条件	199
12.3.3	多分辨分析和 Mallat 算法	203
12.3.4	正交子波包 (Wavelet Packets)	207
12.4	子波框架	208
12.5	第二代子波——按提升步骤构造子波	210

### 第 13 章 应用示例：相对论和量子力学的统一

13.1	爱因斯坦 (Einstein) 的相对论	212
13.1.1	洛伦兹 (Lorentz) 变换	214
13.1.2	其他物理量的变换	216
13.1.3	有关的相对论效应	218
13.1.4	电磁相互作用的统一	219
13.1.5	广义相对论	220
13.2	量子力学的实验基础	221
13.2.1	波粒二象性	221
13.2.2	氢原子光谱的离散结构	222
13.2.3	电子自旋的实验确认 (Stern-Gerlach 实验)	223
13.2.4	相对论量子力学	223
13.3	旋转的相对论效应	224
13.3.1	引言	224
13.3.2	定轴转动的洛伦兹变换	225
13.3.3	其他物理量的变换	229
13.3.4	旋转的相对论效应	230
13.3.5	电磁力和强、弱相互作用的统一	234
13.4	旋转相对论的实验证明	238
13.4.1	引言	238
13.4.2	实验方案	239
13.4.3	实验和结果	240
13.4.4	实验结果讨论	242
13.5	质量和引力	242
13.5.1	静电场的能量和静止质量	242
13.5.2	实验室系中孤立自旋带电粒子的能量和质量	243
13.5.3	三粒子体系中的自旋带电粒子的能量和质量	246
13.6	相对论和量子力学的统一	252



# 上篇 线性系统理论

## 第 1 章 信号和系统分析的时域技术

### 1.1 基本概念

信号和系统的概念广泛应用在科学和技术的各个领域,比如人们要借助无线电广播传送一条信息:“明天有暴风雨”。为此,先由播音员通过喉头和声道把此信息变成语声信号(声压)。此声压经麦克风后变成电压,再经放大、调制变换成高频电流,然后通过天线把它变成电磁波辐射到空间。在接收端先用天线把电磁波变成高频电流,再用解调器变成低频电流,再经放大后通过扬声器变成声压(语声信号)。再经人的听觉系统变换成在大脑中形成的信息“明天有暴风雨”。所谓信号指的是带有信息的物理量(声压、电压、电磁场等)。而系统则是指对信号进行变换的物理设施。上述的全部设施可以看成是一个通信系统,其中把信息变换成电磁波的设施是它的发射系统,把信息装载到声压上的是人的大脑和发声系统(生物系统),把声压变成电压的麦克风是一个电声系统,把电压变换成电磁波的放大器、调制器、天线等设施又各是一个电子系统,它们组合在一起构成了一个复杂的电子系统。

一般情况下,信号是随着时间变化的,所以常把信号表示成自变量为时间  $t$  的一个函数  $f(t)$ 。随着自变量的取值范围(即函数的定义域)的不同,人们又把信号分成两类:定义在连续域  $a < t < b$  上的信号  $f(t)$  称为连续信号(它可以是数学上的不连续函数——比如方波);而仅定义在某些离散点上的信号  $f(n\Delta T)$ ,  $n \in Z$  ( $n$  仅取整数)称为离散信号。离散信号更常用的表示方式是取  $\Delta T = 1$ , 而视为一个序列  $f(n)$ ,  $n \in Z$ 。

注意:离散信号相邻两点之间,信号没有定义,而不是等于零。图 1.1 给出了几个例子。

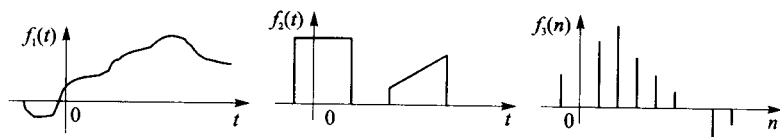


图 1.1 连续信号  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$  和离散信号  $f_3(n)$

当  $t < 0$  时  $f(t) \equiv 0$  的连续信号和  $n < 0$  时  $f(n) \equiv 0$  的离散信号都称为是因果的,如图 1.2 所示。

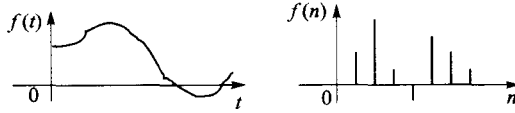


图 1.2 因果信号

常见的信号运算有相加、相乘、乘标量、微分和积分等。两信号的相加和相乘指的是各对应(时间)点处的值相加和相乘。图 1.3 给出了  $f_1(t) + f_2(t)$  和  $f_1(t) \cdot f_2(t)$  的两个例子。一个信号乘标量  $a$  指的是各点值都乘以标量  $a$ ，而信号  $f(t)$  的微分定义为  $\frac{df(t)}{dt}$ ，积分定义为

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau。$$

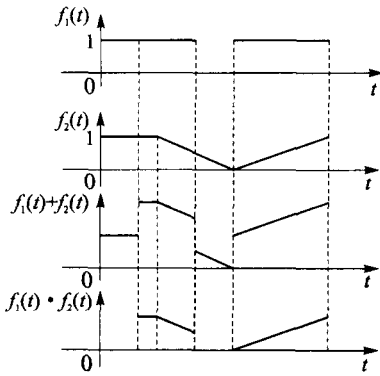


图 1.3 二信号的相加和相乘

信号除了有上述的几种运算之外，还有自变量  $t$  的几种变换：偏移、伸缩(或称加比例尺—scaling)和反卷(reflecting)。我们通过一个实例来介绍这些自变量  $t$  的变换。

比如，已知  $f(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{其余 } t \end{cases}$ ，图形如图

1.4(a)所示。现在看  $f(t-2)$  对应了何种变化。为此令  $t-2=t'$ ，而  $f(t')$  是  $f(t)$  以  $t'$  代替  $t$  的结果，即

$$f(t') = \begin{cases} 1 & -1 \leq t' \leq 0 \\ 1-t' & 0 < t' \leq 1 \\ 0 & \text{其余 } t' \end{cases}$$

式，整理后得： $f(t-2) = \begin{cases} 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 3-t & 2 < t \leq 3 \\ 0 & \text{其余 } t \end{cases}$ ，由此画出如图 1.4(b)所示图形。可见它是  $f(t)$  的

图形沿  $t$  轴向右偏移 2。由此可推知，一般情况下  $f(t-b)$  表示  $f(t)$  向右偏  $b$  个单位，故称这种自变量的变换为偏移(shift)。

下面再来看  $f(2t)$  造成的变化。同上做法：令  $2t=t'$  写出  $f(t')$ ，再代回  $t'=2t$  得： $f(2t) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq t \leq 0 \\ 1-2t & 0 < t \leq 1/2 \\ 0 & \text{其余 } t \end{cases}$ ，图形如图 1.4(c)所示。可见它是把  $f(t)$  的图形沿  $t$  压缩了 2 倍。一般

当  $a > 1$  时， $f(at)$  是将  $f(t)$  压缩  $a$  倍，而  $f\left(\frac{t}{a}\right)$  则是将  $f(t)$  沿  $t$  拉伸了  $a$  倍，这种自变量的变换称伸缩(scaling)。

下面再看  $f(2t-3)$  和  $f(t)$  的关系。令  $2t-3=t'$ ，代入  $f(t')$  后得  $f(2t-3) = \begin{cases} 1 & 1 \leq t \leq 3/2 \\ 4-2t & 3/2 < t \leq 2 \\ 0 & \text{其余 } t \end{cases}$ ，由此画出如图 1.4(d)所示图形。可见它是  $f(t)$  压缩 2 倍再右移  $3/2$  的结

果。一般情况下， $a > 1$  时  $f(at-b)$  表示  $f(t)$  压缩  $a$  倍同时右移  $b/a$ 。

再来看  $f(-t)$  和  $f(t)$  的关系。令  $t' = -t$ , 代入  $f(t')$  的表达式整理后得:  $f(-t) =$

$$\begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1+t & -1 \leq t < 0, \text{如图 1.4(e) 所示。它是以 } t=0 \text{ 为轴将 } f(t) \text{ 作翻转的结果。自变量的这种} \\ 0 & \text{其余 } t \end{cases}$$

变换称为反卷(reflection)。

最后看  $f(2-t)$  和  $f(t)$  的关系。令  $t' = 2-t$ , 代入  $f(t')$  后得:  $f(2-t) =$

$$\begin{cases} 1 & 2 \leq t \leq 3 \\ t-1 & 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{其余 } t \end{cases}$$

如图 1.4(f) 所示。它是  $f(t)$  反卷后再右移(注意是右移而不是左移)2 个单位所得之结果。一般情况下  $f(\tau-t)$  表示  $f(t)$  反卷再右移  $\tau$ (即把  $t=0$  处对应的  $f(0)$  右移到  $t=\tau$  处而带动的整个  $f(-t)$  的移动)。这些自变量的变换将在下文中多次用到(直到最后讨论子波分析时还要用), 这里不仅要弄清道理, 更要牢记结论。

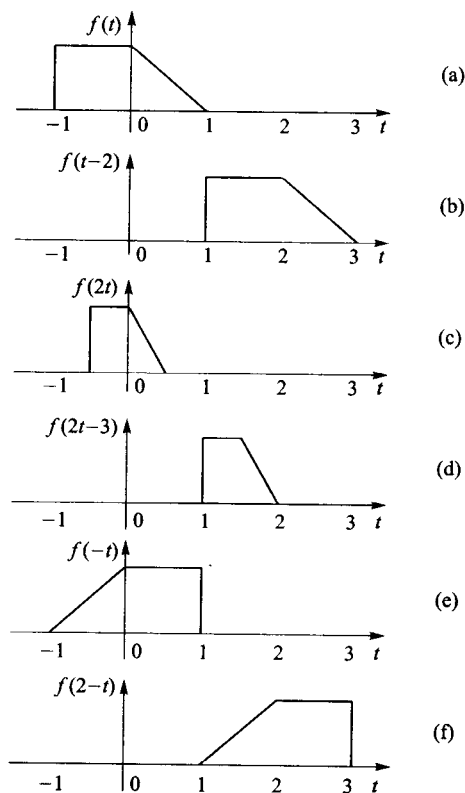


图 1.4 自变量变换造成的信号变化

下面讨论如何用数学工具描述系统。由前所述, 所谓系统就是把输入信号变换成输出信号的物理设施。因此在数学上它可用一个变换  $T$  来给出, 如图 1.5 所示。而变换  $T$  的具体表示又随不同的应用对象而不同。比如在时域技术中它可由微分方程或单位脉冲响应给出, 而在频域技术中则是由系统函数给出, 这些将在后面的讨论中陆续引出。这里仅就一般表示的变换  $T$  和系统属性间的关系作一说明。

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y(t) = T\{x(t)\}$$

图 1.5 数学上把系统视为一个变换

若描述系统输入、输出关系的变换是个线性变换,即若  $T\{x_1(t)\} = y_1(t)$ ,  $T\{x_2(t)\} = y_2(t)$  时,对任何  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  和常数  $a$ 、 $b$  都能保证:  $T\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = ay_1(t) + by_2(t)$ , 则此变换所界定的系统称为线性(linear, 或缩写为 L)系统。

若输入  $x(t)$  时系统输出为  $y(t) = T\{x(t)\}$ , 而  $x(t)$  偏移  $\tau$  的时间后再输入所造成的输出形状与  $y(t)$  相同, 但也偏移了同样的  $\tau$ , 即  $T\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau)$ , 这种系统称为时不变系统(time invariant 或简写成 TI)。控制类的文献中更习惯称之为定常系统(stationary)。

仅当加入输入的同时和以后才有输出的系统称为因果系统。这里把输入看成原因, 输出看成结果, 先有因而后有果, 从而得名因果系统(causal)。

本课重点讨论线性时不变(LTI)的因果系统的分析问题。解决此问题的关键在于研究系统所界定的变换, 即系统把输入变成了什么样的输出, 而起步点是先解决如何由输入求输出的问题。第 1、2 两章就围绕这一问题展开讨论。

## 1.2 离散线性时不变系统的卷积和(convolution sum)

离散系统处理的是离散信号, 即输入和输出都是只定义在  $n$  为整数点上的序列  $f(n)$ 。虽然序列的具体形式是千变万化的, 但作为基本的离散信号却只有两个。一个是复指数序列  $e^{j\omega n}$ , 其中  $\omega$  为取值在  $\pm\pi$  (或  $0$  到  $2\pi$ ) 之间的实数。  $j = \sqrt{-1}$  为虚数单位,  $n$  只取整数 (即  $n \in Z$ ), 一般可认为是从  $-\infty$  到  $+\infty$  的整数。这里把  $\omega$  限制在  $[0, 2\pi)$  区间内不是说它不能取超过此范围的值, 而是因为当它的取值超过此范围后, 比如  $2\pi + \omega_0$  (其中  $0 < \omega_0 < 2\pi$ ), 所得之信号:

$$e^{j(2\pi + \omega_0)n} = \underbrace{e^{j2\pi n}}_1 \cdot e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \quad (1.1)$$

和对应的  $0 < \omega_0 < 2\pi$  中的  $e^{j\omega_0 n}$  完全一样, 没必要再把它看成是  $\omega = 2\pi + \omega_0$  的信号。这一特点是由  $n$  仅取整数造成的。至于为什么把复指数序列作为两个基本的离散信号之一, 将在第 2 章中作讨论。

另一个基本的离散信号称为单位样本(unit-sample)序列或称为单位脉冲(unit impulse)序列, 它的定义是:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

之所以把它作为基本序列, 是因为任意的离散信号  $x(n)$  都可表示成  $\delta(n)$  和它的偏移  $\{\delta(n-k), k \in Z\}$  的线性组合。由上节讨论过的自变量的偏移, 可知:

$$\delta(n-1) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}, \quad \delta(n-k) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \quad (1.3)$$

任意序列  $x(n)$  在  $n=0$  处的  $x(0)$  可由  $x(0)\delta(n-0)$  给出大小和位置 (见图 1.6(c)), 而在其他  $n$  处  $x(0)\delta(n-0)$  均为 0。

$n=1$  处的  $x(1)$  可由  $x(1)\delta(n-1)$  给出大小和位置 (见图 1.6(d)), 而在其他  $n$  处  $x(1)\delta(n-1)$  均为 0。

$n=2$  处的  $x(2)$  可由  $x(2)\delta(n-2)$  给出大小和位置(见图 1.6(e)), 而在其他  $n$  处  $x(2)\delta(n-2)$  均为 0。

.....

$n=k$  处的  $x(k)$  可由  $x(k)\delta(n-k)$  给出大小和位置(见图 1.6(f)), 而在其他  $n$  处  $x(k)\delta(n-k)$  均为 0。

.....

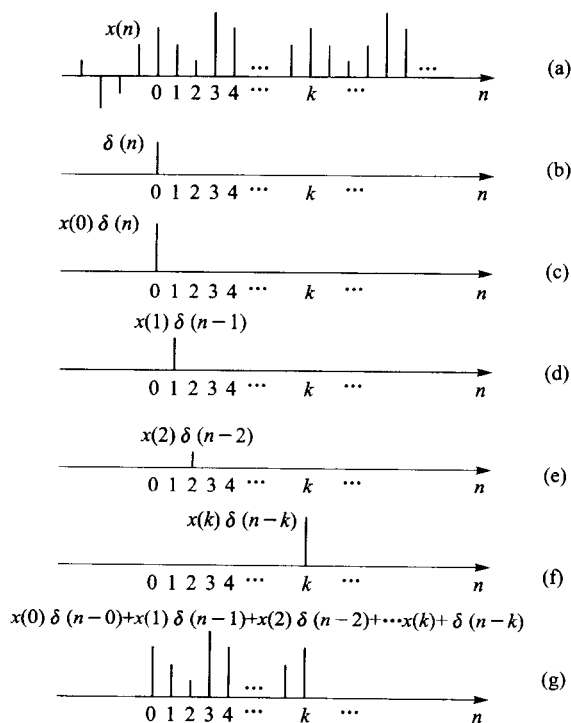


图 1.6  $x(n)$  表示成偏移  $\delta(n)$  的线性组合

取  $k$  从  $-\infty$  逐点变到  $\infty$ , 则每一个  $x(k) \cdot \delta(n-k)$  给出了  $x(n)$  在每一个  $n=k$  点的值和位置, 而  $x(k) \cdot \delta(n-k)$  在其他  $n$  点上全为 0。由于信号的相加是对应点处的值相加, 所以把  $k$  由  $-\infty$  逐点取到  $\infty$  的全部  $x(k)\delta(n-k)$  加在一起, 就得到了全部  $n$  下的  $x(n)$ , 即:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1.4)$$

此式表明, 任意  $x(n)$  均可由偏移的  $\delta(n-k)$ , ( $-\infty < k < \infty$ ) 乘以对应的常数 ( $x(k)$ ) 再相加而得出, 此操作称为偏移  $\delta(n)$  的线性组合。

如果  $x(n)$  是一个线性时不变系统的输入序列, 将它表示成偏移  $\delta(n)$  的线性组合形式之后, 只要再知道系统输入  $\delta(n)$  时的输出  $h(n)$  (称为系统的单位脉冲响应), 则输出就可很容易地求到。这是因为, 由系统的时不变性可知: 输入  $\delta(n-k)$  时的输出为  $h(n-k)$ , 再由系统的线性, 输入是偏移  $\delta(n)$  的线性组合时, 输出应该是偏移  $h(n)$  做同样的线性组合, 即:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (1.5)$$

此式称为输入  $x(n)$  和单位脉冲响应  $h(n)$  的卷积和, 常用  $y(n) = x(n) * h(n)$  的符号来表

示。这样就解决了由输入求输出这一关键问题。为了加深理解,我们把此求解过程再用图形表示出来,为画图方便考虑  $x(n)$  和  $h(n)$  都是因果信号的情况。

先看  $x(n)|_{n=0} = x(0)\delta(n-0)$  作用下造成的输出,它应该是  $h(n-0)$  各点的值都乘以  $x(0)$  (信号乘标量定义为其各点值同乘此标量)。如图 1.7(c) 所示。同样:

$x(n)|_{n=1} = x(1)\delta(n-1)$  造成的输出为  $x(1)h(n-1)$ , 如图 1.7(d) 所示。

$x(n)|_{n=2} = x(2)\delta(n-2)$  造成的输出为  $x(2)h(n-2)$ , 如图 1.7(e) 所示。

.....

$x(n)|_{n=k} = x(k)\delta(n-k)$  造成的输出为  $x(k)h(n-k)$ 。

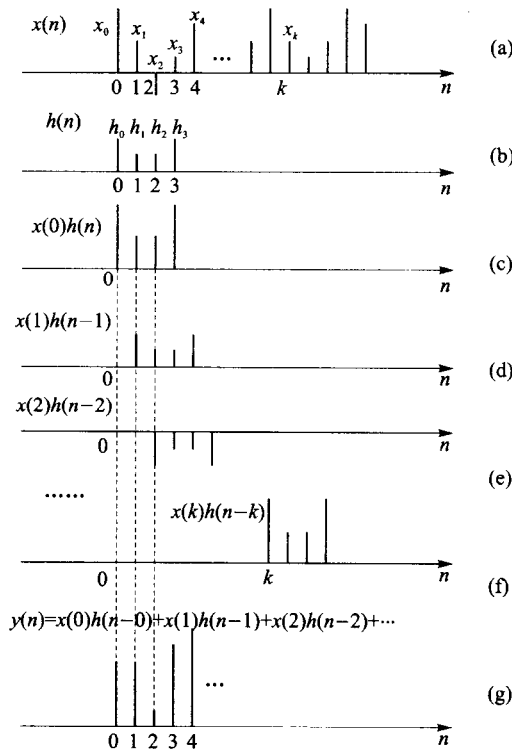


图 1.7 卷积和的物理意义

将这些子输出加在一起(对应点的值相加),即得系统的总输出  $y(n)$ 。比如  $n=0$  处相加的结果为  $y(0) = x_0 h_0$ ,  $n=1$  处为  $y(1) = x_0 h_1 + x_1 h_0$ ,  $n=2$  处为  $y(2) = x_0 h_2 + x_1 h_1 + x_2 h_0$  等。

但在  $x(n)$  较长时(即非零值  $x(n)$  的  $n$  取值范围较大时),这么作图进行计算需要画一个很大的图,并不方便。为了便于画图计算,常采用另一种考虑方法:由定义式  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ , 等号右边是对变量  $k$  作叠加,而此叠加过程中  $n$  保持不变。为此先把  $x(n)$  和  $h(n)$  的自变量  $n$  换成  $k$  得到  $x(k)$  和  $h(k)$ 。则  $h(n-k)$  是  $h(k)$  反卷后右移  $n$  (比如  $h(2-k)$ ) 如图 1.8(d) 所示)。定义式中  $x(k)h(n-k)$  表示了  $x(k)$  和  $h(n-k)$  对应点相乘,比如  $n=2$  时表示了  $x_{-1} \cdot h_3 (=0)$ ,  $x_0 \cdot h_2$ ,  $x_1 \cdot h_1$ ,  $x_2 \cdot h_0$ , 把它们加在一起就得到  $n=2$  时的输出  $y(2) = x_0 h_2 + x_1 h_1 + x_2 h_0$ , 如图 1.8(f) 所示,和图 1.7 给出的结果相同。用这种移  $h(-k)$  至某  $n$  处的

方法可以较方便地求得任意给定  $n$  处的  $y(n)$  值。比如求  $n=8$  时的  $y(8)$  则需把  $h(-k)$  右移 8 点得  $h(8-k)$  (如图 1.8(e) 所示), 然后和  $x(k)$  对应点相乘再相加, 得  $y(8) = x_5h_3 + x_6h_2 + x_7h_1 + x_8h_0$  (如图 1.8(f) 所示)。

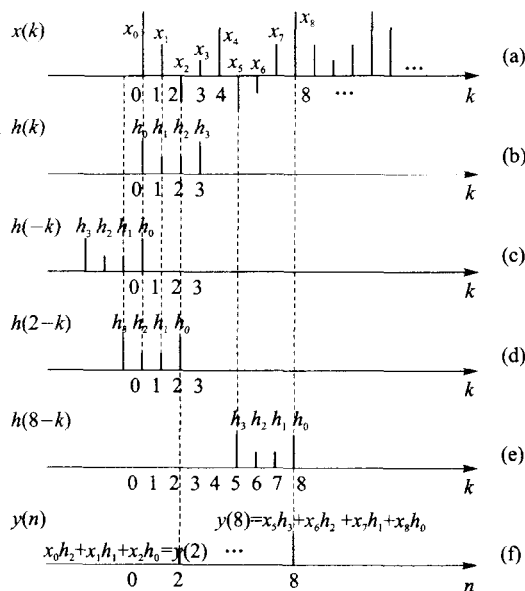


图 1.8 卷积和的作图计算

若  $x(n)$  仅在  $0 \leq n \leq N-1$  区间取非零值 (称为  $N$  点序列),  $h(n)$  仅在  $0 \leq n \leq M-1$  区间取非零值 (称为  $M$  点序列), 则  $x(k)$  和  $h(n-k)$  的最左非零对应点出现在  $n=0$  处, 最右非零对应点出现在  $n=N+M-2$  处, 从而  $y(n) = x(n) * h(n)$  在  $0 \leq n \leq N+M-2$  区间取非零值 ( $y(n)$  为  $N+M-1$  点序列)。

$$\text{课堂练习: } x(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ -1 & n=2 \\ 1 & n=3 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}, \quad h(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n=1 \\ 0 & n=2 \\ -1 & n=3 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}, \quad \text{计算 } y(n) = x(n) * h(n).$$

此练习中的信号虽然简单, 但计算的工作量却已经不小, 因此应当学会用计算机来做卷积计算。用 MATLAB 软件计算卷积和只要三条指令就够, 比如对上述课堂练习, 在 MATLAB 工作区内键入:

```
x=[1,2,-1,1];
h=[1,0,0,-1];
y=conv(x,h)
```

回车后屏幕上就会立即给出计算结果:

```
y=1    2    -1    0    -2    1    -1
```

### 1.3 连续线性时不变系统的卷积积分

回顾上节,我们是先定义了一个

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

然后把任意输入信号表示成偏移  $\delta(n)$  的线性组合:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1.7)$$

若再已知系统的单位脉冲响应  $h(n)$ ,则由系统的线性和时不变性可直接得到输出为:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (1.8)$$

现在考虑连续线性时不变(LTI)系统的情况,此时信号定义在  $t$  的一个连续域上,而不仅是  $n$  的整数点上。如果仍能把任意输入信号  $x(t)$  表示成偏移的单位脉冲函数  $\delta(t)$  的线性组合形式(由于  $t$  是连续变化的,所以此线性组合须用积分给出):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (1.9)$$

这样,若已知系统的单位脉冲响应,即输入  $\delta(t)$  时系统的输出  $h(t)$ ,则由 LTI 性质可立即得到:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (1.10)$$

问题在于怎样定义  $\delta(t)$  才能使(1.9)式成立。初学者可能认为仍取  $\delta(t) = \begin{cases} 1 & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$  即

$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t=\tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases}$  就可。但若把此式代入(1.9)式右边,得到的是  $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau = 0$ ,而不是  $x(t)$ 。

这是由于(1.9)式中用积分代替(1.7)式的叠加而造成的。在(1.7)式中, $x(k)$ 和 $h(n-k)$ 对应点之数值相乘后直接相加,而(1.9)式中的积分则是求  $x(\tau)h(t-\tau)$  曲线下的面积。因此为了使(1.9)式成立, $\delta(t)$ 不能定义成在  $t=0$  点处的值为1,而要定义成在  $t=0$  点处的面积为1。而它的宽度又是无穷小,为了面积为1,值就必须是无穷大。即需定义:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)d\tau = 1 \quad (1.11)$$

此信号称为单位冲击信号,表示成图 1.9 的形式,向上的箭头表示它是一个向无穷大的冲击,标注的 1 表示它的面积(即强度)是 1。定义了单位冲击信号之后,(1.9)(1.10)式就都成立了,而  $y(t)$  仍以  $x(t) * h(t)$  表示,仍称为二者的卷积。但这里是卷积积分而不是卷积和。它的计算方法和卷积和相似,即先把  $t$  换成  $\tau$  得到  $x(\tau)$  和  $h(\tau)$  [式(1.10)右边的积分是对  $\tau$  做的,所以先须把  $t$  换成  $\tau$ ],然后反卷  $h(\tau)$  得  $h(-\tau)$ ,再把  $h(-\tau)$  (向右)偏移  $t$  得  $h(t-\tau)$ ,再做  $x(\tau)$  和  $h(t-\tau)$  的对应点相乘并对相乘结果  $x(\tau)h(t-\tau)$  取积分,即求  $x(\tau)h(t-\tau)$  曲线下的面积。下面给出一例:计算图 1.10 所示的  $x(t)$  和  $h(t)$  的卷积积分。图中直接给出了  $t$  换成  $\tau$  后所得的  $x(\tau)$  和  $h(\tau)$ ,反卷  $h(\tau)$  得  $h(-\tau)$ ,再偏移  $t$  得  $h(t-\tau)$ ,图 1.10(c)给出了不同  $t$  对应的  $h(t-\tau)$ 。

当  $t < 0$  或  $t > 1+T$  时, $h(t-\tau)$  和  $x(\tau)$  无非零对应点, $x(\tau)h(t-\tau) \equiv 0$ , $y(t) = 0$ ;



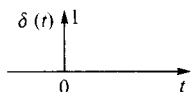


图 1.9 单位冲击信号

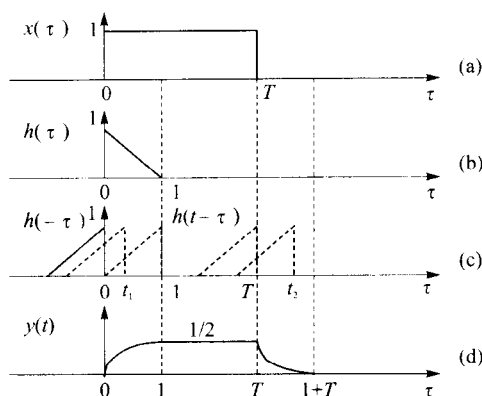


图 1.10 卷积积分的计算

当  $0 < t < 1$  时(比如  $t_1$ ),  $x(\tau)h(t-\tau)$  的非零值区为一梯形,其面积为  $y(t) = t - t^2/2$ ;

当  $1 < t < T$  时,  $x(\tau)h(t-\tau)$  的非零值区为底和高均为 1 的三角形,其面积为  $y(t) = 1/2$ ;

当  $T < t < 1+T$  时(比如  $t_2$ ),  $x(\tau)h(t-\tau)$  的非零值区为底和高均为  $T - (t-1) = 1+T-t$  的三角形,其面积为  $y(t) = (1+T-t)^2/2$ 。从而得:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} t - t^2/2 & 0 < t < 1 \\ 1/2 & 1 < t < T \\ (1+T-t)^2/2 & T < t < 1+T \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

卷积(包括卷积积分及卷积和)满足交换率、结合率和分配率。即:

交换率:  $x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = h(n) * x(n)$

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(n-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

结合率:  $(x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2)$ , 其物理意义如图 1.11(a) 所示。

分配率:  $x * h_1 + x * h_2 = x * (h_1 + h_2)$ , 其物理意义如图 1.11(b) 所示。

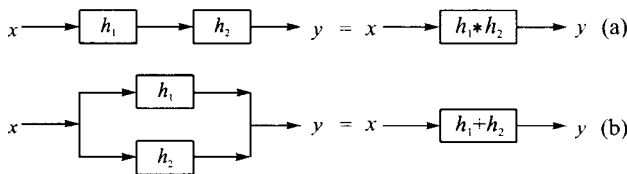


图 1.11 卷积结合率和分配率的物理意义

另外,若  $x$  是因果的,即  $t < 0$  (或  $n < 0$ ) 时  $x \equiv 0$ , 则卷积可简化成为:

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) \quad \text{或} \quad x(t) * h(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (1.12)$$

更进一步,若  $h$  也是因果的,即  $t < 0$  (或  $n < 0$ ) 时  $h = 0$ , 也即  $\tau > t$  时  $h(t-\tau) = 0$  (或  $k > n$  时  $h(n-k) = 0$ ), 则卷积又可进一步简化成为:

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) \quad \text{或} \quad x(t) * h(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (1.13)$$