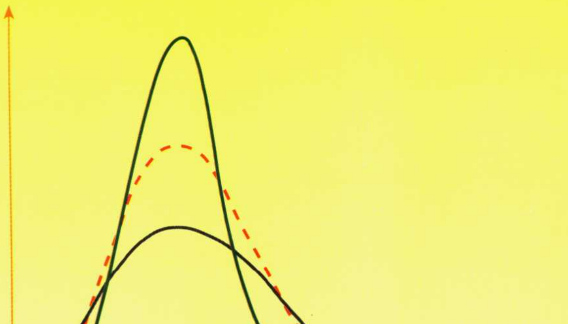
财经与管理等专业
教学与自学参考书

概率论与数理统计
学习与考试指导

殷秀清 袁荫棠 编



中国人民大学出版社

财经与管理等专业教学与自学参考书

概率论与数理统计
学习与考试指导

殷秀清　袁荫棠　编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习与考试指导/殷秀清，袁荫棠编.
北京：中国人民大学出版社，1999

ISBN 7-300-03086-6/O・40
Ⅰ. 概…
Ⅱ. ①殷… ②袁…
Ⅲ. ①概率论-自学参考资料 ②数理统计-自学参考资料
Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 12584 号

财经与管理等专业教学与自学参考书
概率论与数理统计学习与考试指导
殷秀清　袁荫棠　编

出版发行：中国人民大学出版社
（北京海淀路 157 号　邮码 100080）
发行部：62514146　门市部：62511369
总编室：62511242　出版部：62511239
E-mail：rendafx@263.net
经　　销：新华书店
印　　刷：北京金特印刷厂

开本：850×1168 毫米 1/32　印张：10.25
1999 年 7 月第 1 版　2002 年 11 月第 4 次印刷
字数：254 000

定价：13.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

经济应用数学基础是财经、管理等专业的必修课，但该课程中某些内容，对有些读者，特别是自学的读者，有一定难度，例如某些概念理解不透，运算技巧掌握不好等，因此不少读者希望有学习该课程的参考书，我们就是应读者的这种要求，编写了本书. 它可以给讲授该课程的教师提供"教学参考"，也可以被在校学生及参加自学考试的学员作为"学习与考试指南"，还可以为在职的财经工作者自学进修或想报考财经类专业研究生的读者提供"考前辅导"，也可以被社会上的助学辅导班作为考前复习的"串讲教材".

本书以中国人民大学出版社出版的，由赵树嫄主编，袁荫棠编写的《经济应用数学基础(三)：概率论与数理统计》作为主要教科书，考虑到作为学习与考试指导书，删去了第六、第十与第十一章的"马尔可夫链"、"方差分析"与"回归分析"等内容. 本书兼顾了其他类似教材的内容，所以不论使用哪本教材，均可采用本书作为参考书.

书中各章均包含：重要概念与定理的析疑与总结，例题选讲，练习题及解答三部分内容.

在"重要概念与定理的析疑与总结"中，强调"难点析疑"与"规律总结"，并不涉及全部学习的或应掌握的内容，而是针对不易理解的概念和不易掌握的方法，即学生学习中的难点与疑点，进行分析、讲解，引导学生正确辨别、理解，使之对重要概念、方法以及疑难问题，理解得更深更透，对规律性的内容，加以总结，使读者掌握的知识更有条理性、更加巩固.

在"例题选讲"中，我们分门别类通过典型例题分析解答，并说

明思考问题的思路，以使读者掌握解题方法，对基本概念理解得更准确，对结论及公式掌握得更熟练，运用得更灵活.

打“*”号的练习题，时间不富裕的读者可以略去.

全书共分八章，由殷秀清（执笔一、二、三、四、五章）和袁荫棠（执笔六、七、八章）编写，张姝对前五章进行了审阅，范培华、严颖对后三章进行了审阅，褚永增对全书进行了审阅和整理.

本书是根据编者的教学实践与经验编写的，希望能对学习《概率论与数理统计》的读者有所帮助，不妥之处，恳请读者指正.

编　者

1998年10月

目　录

第一章　随机事件及其概率

在刚刚开始学习概率论时，读者必须首先理解随机事件及其概率的有关概念，掌握事件的运算及用其表示事件的方法，熟悉事件间的关系. 熟记概率的基本性质，会计算常见的古典概率. 掌握概率的加法公式，乘法公式，全概公式与逆概公式，会正确运用这些公式计算相应的事件的概率或条件概率.

一、重要概念与定理的析疑与总结

(一) 随机试验

对客观现象观察的过程称为随机试验，简称为试验，通常用 E 表示.

注意，概率论中的试验必须具有下面三个特点：

(1) 可以在相同条件下任意重复进行；

(2) 试验之前就能明确试验后会出现的全部可能结果；

(3) 每次试验之前，不能事先知道该次试验一定要出现的结果.

例 1　试验 E_1：假设规定一枚硬币，有字的一面叫正面，另一面叫反面，那么抛这样一枚硬币，观察正、反面哪一个朝上就是一个试验.

试验 E_2：掷一颗均匀的骰子，观察出现的点数也是一个试验.

(二) 随机事件

随机试验的结果称为随机事件，简称为事件. 常用 $A,B,C,\cdots$ 表示不同的事件.

如例 1 中的试验 E_2 的结果“点数是 3”是一个事件，“点数为奇

数”也是一个事件，“点数小于 5”又是一个事件，这样三个不同的事件就可以分别用 A,B,C 表示. 也可以用 A_1,A_2,A_3 表示.

注意：随机事件是在一次试验中可能发生也可能不发生，而在大量的重复试验中显示出的某种统计规律性的结果. 在每次试验中一定发生或一定不发生的结果不是随机事件，但在概率论中为了讨论的方便与统一，我们把这两种结果看作特殊的随机事件，分别称为必然事件与不可能事件，习惯上用 Ω 表示必然事件，用 $\varnothing$ 表示不可能事件.

如试验 E_2，结果为“点数不超过 6”就是一个必然事件 Ω，而“点数小于 1”就是一个不可能事件 $\varnothing$.

（三）基本事件

一个试验的每个直接可能发生的结果是这个试验的最简单的事件，又称为基本事件，习惯上用 ω 表示. 它是构成一般事件的不可再分的最简单事件.

如试验 E_2 中，事件 $\omega_1=$“点数 1”，$\omega_2=$“点数 2”，$\cdots$，$\omega_6=$“点数 6”是 E_2 的 6 个基本事件，而 $B=$“点数为奇数”是由 $\omega_1,\omega_3,\omega_5$ 构成的一般的事件.

（四）样本空间与样本点

由一试验所有的基本事件组成的集合称为这个试验的样本空间，基本事件是这个集合的元素，称为样本空间中的样本点.

注意：样本空间是由随机试验决定的. 一个试验的样本空间就是一个全集，也就是一个必然事件，因而样本空间通常也用 Ω 表示. 不可能事件就是样本空间的特殊子集 —— 空集 $\varnothing$. 某一事件是样本空间的一个子集，这个事件发生，就是当且仅当子集中的一个样本点发生.

如试验 E_2 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，事件 $B=$“点数是奇数”$=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$，当试验结果为 $\omega_1,\omega_3,\omega_5$ 中的某一个时，事件 B 就发生了.

(五) 事件间的关系及其运算

设试验 E 的样本空间为 Ω, A, B, C 为 E 的事件.

1. 事件的包含

如果事件 A 发生，则事件 B 一定发生，就称事件 B 包含事件 A. 用 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 表示.

这时，属于 A 的每一个样本点一定属于 B. 可用图 1.1 直观说明.

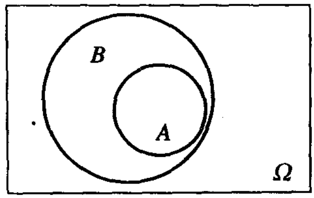


图 1.1

注意：$\varnothing \subset A \subset \Omega$ 总是成立的.

2. 事件的相等

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，用 $A = B$ 表示. 这时，A 与 B 所包含的样本点完全相同，也就是 A 与 B 表示同一个事件.

3. 事件的和

"事件 A 与 B 中至少有一个发生"是一个事件，称这个事件为 A 与 B 的和. 用 $A + B$ 或 $A \cup B$ 表示.

事件 $A + B$ 是由属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合，图 1.2 中阴影部分表示 $A + B$.

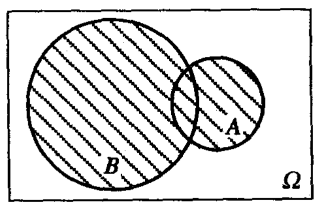


图 1.2

注意：事件 $A + B$ 发生是指仅 A 发生或者仅 B 发生或者 A 与 B 同时发生. 对于任意事件 A, B, C，总有 $A + B = B + A$，$(A + B) + C = A + (B + C)$；而且当 $A \subset B$ 时，$A + B = B$. 而 $A + \Omega = \Omega$ 及 $A + \varnothing = A$ 总是成立的.

4. 事件的积

"事件 A, B 同时发生"是一个事件，称这个事件为 A 与 B 的

积. 用 AB 或 $A \cap B$ 表示.

事件 AB 是由属于 A 且属于 B,即 A 和 B 中所有的公共样本点构成的集合,图 1.3 中阴影部分表示 AB.

注意:事件 AB 发生是指 A 发生且 B 也发生. 对于任意事件 A,B,C 总有 $AB = BA$, $(AB)C = A(BC)$;而且当 $A \subset B$ 时, $AB = A$. 而 $A\Omega = A$ 及 $A\varnothing = \varnothing$ 总是成立的.

5. 事件的差

"事件 A 发生而 B 不发生"是一个事件,称这个事件为 A 与 B 的差. 用 $A - B$ 表示.

事件 $A - B$ 是由属于 A 但不属于 B 的样本点构成的集合. 图 1.4 中阴影部分表示 $A - B$.

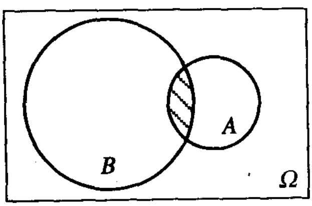


图 1.3

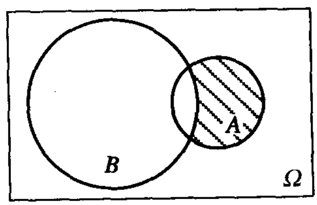


图 1.4

注意:$A - B$ 与 $B - A$ 是两个不同的事件. 对于任意事件 A, B 都有 $A - B = A - AB$ 或 $B - A = B - AB$ 以及 $A + B = A + (B - A) = B + (A - B)$.

6. 事件的互不相容(互斥)

如果事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB = \varnothing$,称 A 与 B 为互不相容(或互斥)的两个事件,用 $AB = \varnothing$ 表示.

这时,事件 A 与 B 没有公共的样本点. 可用图 1.5 直观表示.

注意:A 与 B 互不相容只表示这两个事件不能同时发生,但却允许它们同时都不发生. 图 1.5 中阴影部分表示的是 A 与 B 同时

都不发生的事件.

任意一个试验的基本事件都是两两互不相容的.

7. 事件的对立

事件 A 与 B 不能同时发生，但必须有一个发生，即 A,B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$，称 A 与 B 是对立的(或互逆的) 事件，记作 $\overline{A}=B$ 或 $\overline{B}=A$.

这时，事件 A 与 B 没有公共的样本点，而样本空间中不属于 A 的样本点全部属于 B，或不属于 B 的样本点全部属于 A. 可用图 1.6 直观表示.

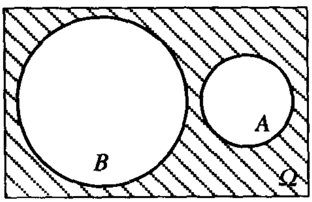


图 1.5

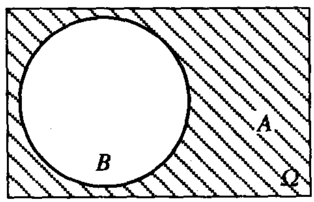


图 1.6

注意：图 1.6 与图 1.5 的区别. 图 1.6 中阴影部分为事件 A，当 A 与 B 对立时，A 与 B 既不能同时发生，但也不能同时不发生，即 A 发生时，B 一定不发生，而 A 不发生时，B 一定发生. 因此对立的两个事件一定是互不相容的事件. 反之，互不相容的事件不一定是对立的事件.

关于对立事件，请记住下面几个有用的等式：

(1) $A+\overline{A}=\Omega$ 或 $\overline{A}=\Omega-A$

(2) $A\overline{A}=\varnothing$

(3) $\overline{\overline{A}}=A$

(4) $\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，则有

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 A_2 \cdots A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_n}$$

8. 完备事件组

如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，且 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组.

注意：一个试验的全体基本事件构成一个完备事件组.

以上 8 个定义中，1，2，6，7 给出的是事件间的关系，3，4，5 给出的是事件间运算的定义. 这些定义与集合论中集合间的关系与运算是一致的. 用表 1.1 加以对照说明.

表 1.1　　各记号在概率论和集合论中的比较

记　号	概　率　论　中	集　合　论　中
Ω	必然事件，样本空间	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件，样本点	元素
A	事件	子集
$A \subset B$	事件 A 发生，则 B 一定发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与 B 是同一事件	A 与 B 相等
$A + B$	事件 A 与 B 中至少有一个发生	A 与 B 的并集
AB	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生，而 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB = \varnothing$	事件 A 与 B 互不相容	A 与 B 的交集为空集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的补集

例 1　设袋内有 10 个编号为 1 ~ 10 的球，从中任取一个，观察其号码.

(1) 写出这个试验的样本空间及完备事件组.

(2) 若 A 表示“取得的球的号码是奇数”，B 表示“取得的球的号码是偶数”，C 表示“取得的球的号码小于 5”，D 表示“取得的球的号码大于 5”，则

①$A+B$，　②AB，　③$\overline{C}$，　④$A+C$，

⑤AC，　⑥$\overline{AC}$，　⑦$\overline{B+C}$，　⑧$\overline{BC}$，

⑨$A-C$，　⑩$C-A$ 各表示什么事件？

(3) 事件 A 与 B 是否互不相容？

(4) 事件 C 与 D 是否互不相容？

(5) AC 与 $\overline{AC}$ 是否互不相容？是否对立？

解　(1) 若用 ω_i 表示"取得的球的号码为 i"($i=1,2,\cdots,10$)，则这个试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$，而 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}$ 是它的一个完备事件组.

(2) ① $A+B$ 表示"取得的球的号码或者是奇数，或者是偶数"，它是必然事件，即 $A+B=\Omega$.

② AB 表示"取得的球的号码既是奇数又是偶数"，它是不可能事件，即 $AB=\varnothing$.

③ $\overline{C}$ 表示"取得的球的号码大于等于 5"，即 $\overline{C}=\{\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}$.

④ $A+C$ 表示"取得的球的号码是奇数或者是小于 5 的数"，即 $A+C=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$.

⑤ AC 表示"取得的球的号码是小于 5 的奇数"，即 $AC=\{\omega_1,\omega_3\}$.

⑥ $\overline{AC}$ 表示"取得的球的号码是大于 5 的偶数"，即 $\overline{AC}=\{\omega_6,\omega_8,\omega_{10}\}$.

⑦ $\overline{B+C}$ 表示"取得的球的号码不是偶数也不小于 5"，也就是"取得的球的号码是大于等于 5 的奇数"，即 $\overline{B+C}=\overline{B}\overline{C}=\{\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$.

⑧ $\overline{BC}$ 表示"取得的球的号码不是小于 5 的偶数"，也就是"取得的球的号码是奇数或者大于等于 5"，即 $\overline{BC}=\overline{B}+\overline{C}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}$.

⑨ $A-C$ 表示"取得的球的号码是奇数但不小于 5"，也就是

“取得的球的号码是大于等于 5 的奇数”，即 $A - C = \{\omega_5, \omega_7, \omega_9\}$.

⑩ $C - A$ 表示“取得的球的号码小于 5 但不能是奇数”，也就是“取得的球的号码是小于 5 的偶数”，即 $C - A = \{\omega_2, \omega_4\}$.

(3) A 与 B 互不相容，因为取得的球的号码不会既是奇数又是偶数，即 $AB = \varnothing$. 同时又因为 $A + B = \Omega$，所以 A 与 B 是对立事件.

(4) 事件 C 与 D 互不相容，因为取得的球的号码不会既小于 5 同时又大于 5，即 $CD = \varnothing$. 但 C 与 D 不是对立事件，因为

$$C + D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\} \neq \Omega$$

(5) 因为 $AC = \{\omega_1, \omega_3\}$，$\overline{AC} = \{\omega_6, \omega_8, \omega_{10}\}$ 所以 $(AC)(\overline{AC}) = \varnothing$，但 $AC + \overline{AC} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_6, \omega_8, \omega_{10}\} \neq \Omega$，因而 AC 与 $\overline{AC}$ 互不相容，但不对立. 由 (2) 中④的结果可以看出，$\overline{AC}$ 的对立事件是 $A + C$.

例 2 设 A, B, C 为三个随机事件，试用事件的运算表示下列事件：

(1) 只有事件 A 发生.

(2) A, B, C 中恰有一个发生.

(3) A, B, C 中至少有一个发生.

(4) A, B, C 都不发生.

(5) A, B, C 不都发生.

(6) A, B, C 中至少有两个事件发生.

(7) A, B, C 中恰有两个事件发生.

解 要正确表示事件，首先要准确理解所要表示的事件的意义及事件运算的定义. 同一事件可以有不同的表示方式.

(1)“只有事件 A 发生”即“A 发生而事件 B 与 C 都不发生”. 因而可用 $A\overline{B}\overline{C}$ 表示或用事件差的定义表示为 $A - B - C$.

(2)“A, B, C 中恰有一个发生”即“只 A 发生或只 B 发生或只 C 发生”. 因而可用 $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$ 表示.

(3)“A,B,C 中至少有一个发生”即“A,B,C 中恰有一个发生，或恰有两个发生，或三个都发生”. 因而可以用 $A+B+C$ 或 $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$ 表示. 显然前者比后者简洁.

(4)“A,B,C 都不发生”即“A,B,C 中哪一个也不发生”，因而可以用 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A+B+C}$ 表示.

(5)“A,B,C 不都发生”即“A,B,C 不同时发生”，也就是“A,B,C 中至少有一个不发生”，因而可以用 $\overline{ABC}$ 或 $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$ 表示.

(6)“A,B,C 中至少有两个事件发生”即“A,B,C 中恰有两个发生或三个都发生”，因而可用 $AB+AC+BC$ 或 $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$ 表示.

(7)“A,B,C 中恰有两个事件发生”即“A,B,C 中某两个发生时第三个一定不发生”，因而可用 $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$ 表示.

(六) 事件的概率

1. 概率的统计定义

如果在 n 次重复试验中事件 A 发生了 m 次，当 n 逐渐增大时，比值 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动，且 n 越大，摆动幅度越小. 则称此常数 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

注意：比值 $\frac{m}{n}$ 称做 n 次试验中 A 发生的频率，必须进行 n 次试验才能计算事件 A 发生的频率；而事件 A 的概率 $P(A)$ 是事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.

2. 概率的古典定义

若试验结果一共有 n 个基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，且每次试验中各基本事件出现的可能性完全相同，而事件 A 由其中 m 个事件 $\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}(m\leqslant n)$ 组成，则事件 A 的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$.

注意：概率的古典定义要求试验具有两个特点，一是试验的样

本空间的样本点只有有限个，二是要求在每次试验中各基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 出现的可能性完全相同，或者说 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为一等可能完备事件组. 称具有这样两个特点的试验为古典试验，建立在古典试验上的数学模型称为古典概型. 对于古典概型，概率的古典定义给出了计算事件概率的公式.

在实际问题中，具有对称性、对等性、均匀性的试验都是古典试验. 常见到的如抛硬币，掷骰子，摸球，取产品等. 前面的试验 E_1,E_2 也是古典试验.

例 3 掷一颗质地均匀的骰子，求出现奇数点的概率.

解 设 $B=$"出现奇数点".

由于这个试验的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，其中 ω_i 为"出现点数 i"$(i=1,2,\cdots,6)$.

而 $B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$

$\therefore\ P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

3. 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的每一个事件 A 赋予一实数，记作 $P(A)$，如果它满足下列条件：

(1) 对于每一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$ （非负性）

(2) $P(\Omega)=1$ （完备性）

(3) 对于两两互不相容的事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \qquad \text{（可列可加性）}$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

注意：概率的统计定义和公理化定义都未给出计算概率的具体公式. 概率的统计定义直观、具体，容易理解，但不够严格，而且必须建立在大量的重复试验的基础上. 概率的公理化定义严格，却比较抽象，它指出了事件概率的本质，任意事件的概率都是一个在