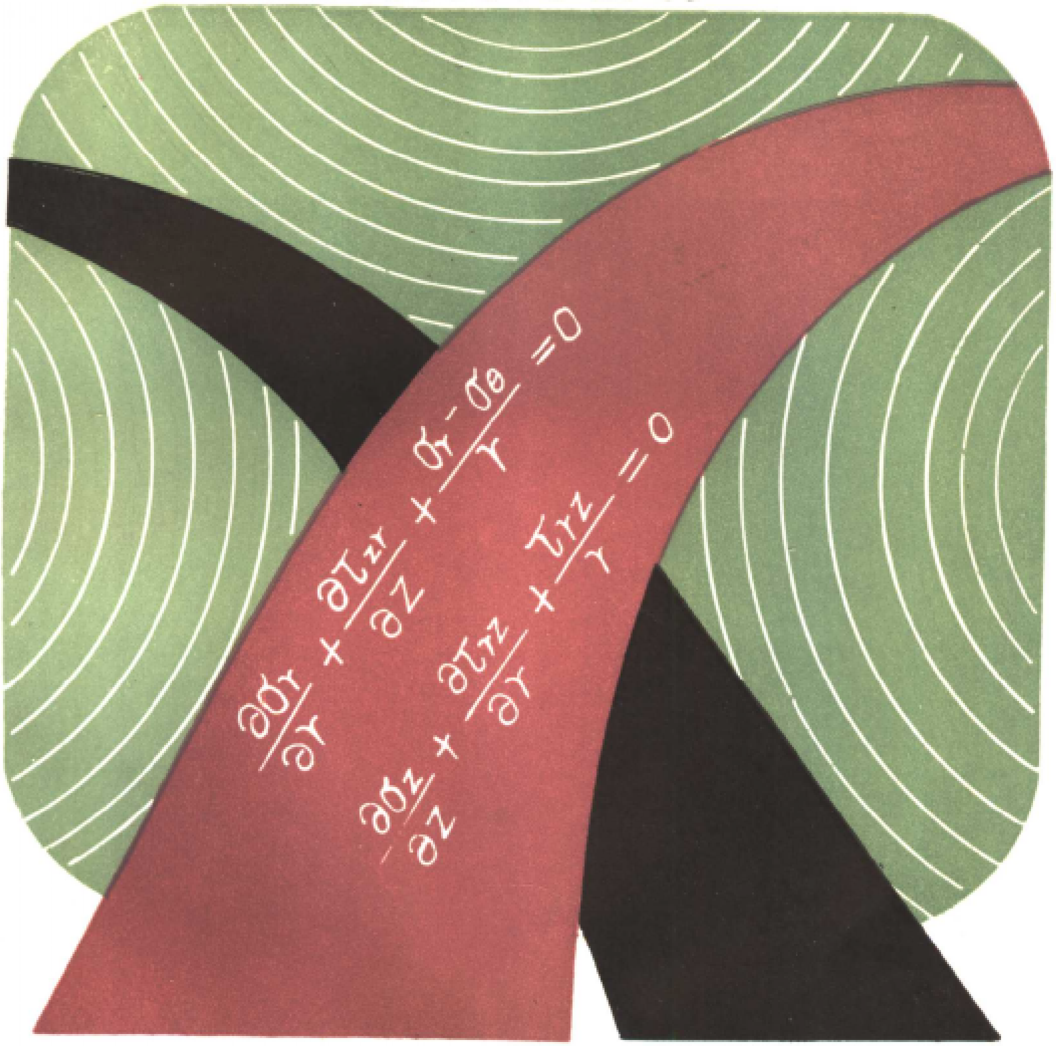
高等学校试用教材



路面力学数值计算

（公路与城市道路工程专业用）

王秉纲　邓学钧　编

人民交通出版社

高等学校试用教材

路面力学数值计算

Lumian Lixue Shuzhi Jisuan

（公路与城市道路工程专业用）

王秉纲　邓学钧　编

人民交通出版社

(京)新登字091号

高等学校试用教材

路面力学数值计算

(公路与城市道路工程专业用)

王秉纲　邓学钧　编

插图设计：袭　琳　正文设计：周　圆　责任校对：戴瑞萍

人民交通出版社出版

(100013 北京和平里东街10号)

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 销

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/16　印张：11.5　字数：280千

1992年6月　第1版

1992年6月　第1次　第1次印刷

印数：0001—1550册　定价：3.10元

ISBN 7-114-01137-7

U·00743

内 容 提 要

本书叙述路面力学课题的解析与数值计算方法。内容包括弹性层状体系和弹性地基板的解析数值计算方法、弹性地基板和弹性层状体系的有限元数值计算方法、弹性层状结构的有限元半分析法和其它分析方法的数值计算。

本书可作为公路与城市道路工程专业硕士研究生的教材，也可供路面工程研究和设计人员参考。

前 言

《路面力学数值计算》是《路面力学计算》一书的续篇，它叙述路面力学理论课题的计算机数值计算原理和方法。编者多年从事硕士研究生路面力学课程教学和有关科学研究工作，深感需要有一本系统介绍路面力学数值计算方法的书籍，因而根据我们的教学内容和科研成果，以及近年国内外这一研究领域的最新进展编成此书。

全国高等学校道路、桥梁、交通工程教材编审委员会对本书的编写给予了大力的支持。本书主审同济大学朱照宏教授详细审阅了编写大纲和全部书稿，提出了不少重要的修改意见。

本书编写大纲由西安公路学院王秉纲和东南大学邓学钧拟就。王秉纲编写第1章、第2章、第6章第5节，并进行全书的最后审定；邓学钧编写第3章和第4章；西安公路学院胡长顺编写第5章和第7章第2、3节；东南大学黄卫编写第6章第1、2、3、4节和第7章第1节。

本书可作为公路、城市道路及机场工程专业硕士研究生教材，也可供从事路面工程研究和设计人员参考。在学习本书之前应先学习和掌握路面力学、计算方法及算法语言和编程等课程的内容。学习时宜在阅读有关内容的同时进行编程上机计算。限于篇幅，我们未能将这些计算程序编入本书，读者如有需要我们可以提供。

由于我们水平有限，加之成书仓促，书中内容不免会有错误和疏漏，敬希读者予以批评指正。

王秉纲　邓学钧

1990年9月

目　　录

第一章 绪　论

第一节 概　述

目前世界各国的路面设计方法，基本上可分为两大类：一类是以使用经验或试验路试验结果为依据的经验法；一类是以弹性理论为基础并由试验确定计算参数的理论法。后一类方法所应用的计算理论，对于水泥混凝土路面为弹性地基板理论，对于柔性路面为弹性层状体系理论。

弹性地基板理论课题，按照不同的地基假设有不同的解答。一种是将地基假设为相互不联系的弹簧，这一假设由 E.Winklr 提出，通常称Winkler 地基。Winkler 地基上的弹性薄板在静荷载作用下所产生的应力和位移，最早由 H.Hertz 解出〔1〕。后来 H.M.S.Westergaard 将这一理论应用于水泥混凝土路面，求得车轮荷载作用于有限尺寸矩形混凝土路面板的板中、板边和板角时该处产生的应力和位移〔2〕。这一理论结果至今为世界上不少国家所采用。

另一种假设是弹性半空间体地基假设。弹性半空间体地基上无限大弹性薄板在静荷载作用下产生的应力和位移，由 A.H.A.Hogg 和 O.Я.Шехтер 先后求得解答〔3,4〕。这一理论也被一些国家所采用。

此外，还有双参数地基假设及相应的地基板解〔5〕。

弹性层状体系是自上而下由若干弹性层和弹性半空间体组成的弹性体系，不少学者曾致力于求解其在荷载作用下的应力和位移，先后取得了结果。完成轴对称课题解的主要有松村孙治(1931)〔6〕，B.M.Bermister(1945)〔7〕，L.Fox(1948)〔8〕，Б.И.Коган(1952)〔9〕等。完成水平荷载作用下弹性层状体系解的有牟歧鹿楼(1956)〔10〕，R.L.Schiffman(1962)〔11〕，R.A.Westmann(1963)〔12〕等。

为了使上述理论在工程中获得实际应用，一些研究者曾致力于这些理论解的数值计算。在弹性地基板解的数值计算方面，早期应用简单计算工具和机械计算机，将算得的结果编制成计算数表或诺谟图。例如Б.Г.Коренев〔13〕和М.И.Горбунов-Посадов〔14〕的工作，或者求得近似公式〔2〕。现在这种计算工作就可由电子计算机完成了。

弹性层状体系的应力位移数值计算，由于表达式的冗长复杂，仅当电子计算机使用之后才成为可能。起初这种计算采用手编程序，加之计算机容量小、运算速度慢，因而只有少数有条件的研究计算机构才能进行这种计算。在这一段时间，对于这一工作做出贡献的有B.M.Burmister〔15〕，W.E.A.Acum 和L.Fox〔16〕，Б.И.Коган〔17〕，G.Jeuffroy 和 J.Bachelez〔18〕，R.L.Schiffman〔19〕，A.Jones〔20〕等。

当快速大容量电子计算机问世后，上述计算已经不是太困难的事了。

应用现代电算技术和力学理论，已经可以计算各种有限尺寸乃至形状复杂的弹性地基板，以及任意多层的弹性体系、粘弹性体系的应力和位移。

第二节 路面力学问题解析解计算

路面力学解析解是对所提课题采用力学理论和数学解析方法，推求出课题解的解析表达式，然后按给定条件和参数计算出解的相应数值。由于表达式复杂冗长并含有某些特殊函数，所以计算工作通常需要借助电子计算机来完成。

关于作为柔性路面计算理论基础的弹性层状体系的应力和位移计算，因为求解重调和方程时采用了汉克尔（Hankel）变换法，致使应力位移解的表达式为含有指数函数和贝塞尔（Bessel）函数的复杂广义积分。

在50年代，因受计算手段和方法的限制，仅能计算一些特定条件下的数值。计算工作首先是从轴对称课题开始的。D.M.Bermister计算了泊松系数 $\mu=0.5$时双层体系圆面积荷载中心处的弯沉值〔7〕。W.E.A.Acum 和L.Fox 计算了双层和三层体系 $\mu=0.5$时层间连续及光滑情况的应力值〔16〕。Б.И.Коган 也对双层和三层体系的应力和位移做了计算〔9,17〕。G.Jeuffroy 完成了三层体系 $\mu=0.5$时的应力计算诺谟图〔18〕。

60年代以后，电子计算机及计算方法发展很快，从而弹性层状体系力学计算的范围逐渐扩大，应用也逐渐推广。A.Jones 对弹性三层体系给出大量计算数据和参数范围较为广泛的计算图表〔20〕。R.L.Schiffman就三层体系的计算讨论了数值计算的方法、技巧及误差分析〔11〕。我国同济大学同时也开展了计算研究工作，对双层和三层弹性体系的应力和位移进行了全面的计算，并在以后提出了计算图表〔21〕。

对于弹性层状体系受水平荷载作用的非轴对称课题解的计算，R.A.Westmann在1963年给出了一些结果〔12〕，此后C.M.Gerrard 对双层体系给出了较多的计算结果〔22〕。70年代日本的松岗健一及我国的许志鸿也对此进行了研究，给出了不少计算结果〔23，24〕。

与此同时，对用于水泥混凝土路面的弹性地基板解析解，也进行了计算。在我国主要有朱照宏等进行的弹性地基上无限大薄板的应力位移计算，以及双层地基板的计算〔25〕。

进入80年代以后，这些方面的计算工作为越来越多的人所掌握，数值计算结果也越来越丰富了。

解决双层和三层弹性体系计算之后，人们不满足于特定条件下的计算，而工程实际也要求扩大计算范围，例如解决任意多层的通用计算方法。1968年壳牌石油公司（Shell）研究所提出了BISTRO计算机程序〔26〕，能计算垂直均布荷载作用下 N 层连续体系内的应力和位移，在美国、联邦德国、荷兰等国得到应用。随后壳牌石油公司又进一步发展了这一程序，于1972年编制出BISAR程序〔27〕，可以考虑水平力作用以及层间连续、光滑和具有部分摩擦等情况。澳大利亚于1980年编制成计算功能更全面的计算机程序〔28〕，它可以计算多种荷载分布及复合荷载情形下 N 层连续、光滑及部分结合层状体系内任一点的应力和位移。此外还有ALIZE（法）、LAYMED（捷）、MTC93（比）、DELSAN4（丹）、LR160和373（英）等多层弹性体系计算机程序。

我国多层弹性层状体系的计算工作，在70年代进行探索，80年代按照不同思路提出了若干计算程序，较有影响的有王凯的“递推回代法”程序〔29〕，朱照宏的高阶矩阵代数法程序〔25,30〕，郭文复、邓学钧的分层逆子阵的传递矩阵法程序〔31,51〕等。

第三节　路面力学问题数值方法计算

路面力学问题除用解析方法求解外，还可用数值计算方法求得结果。随着计算力学和计算方法的发展，工程力学数值计算问题的研究异常活跃，因而也带动了路面力学数值计算工作。近若干年来，国内外路面力学数值计算方法研究较多的是应用有限元法，并取得了较为丰富的成果。

水泥混凝土路面的荷载应力和位移计算，Westergaard、Hogg 等人只解决了Winkler地基和弹性半空间地基上板的特定荷载作用位置的解答，而对应力场和位移的分析、最不利荷载位置与相应应力位移的确定则无能为力。电子计算技术和有限元法的发展，为解决这些问题创造了条件。70年代初 S.K.Wang，M.Sargious，Y.K.Cheng 等人率先用有限元位移法分析了水泥混凝土路面板的应力和挠度，提出板的应力计算图〔32〕。与此同时，Y.H.Huang，S.T.Wang 采用有限元法分析混凝土板与基础之间出现脱空时板的挠度和应力〔33〕。

在我国，从70年代后期起对有限元等数值方法用于水泥混凝土路面计算的研究进行了大量卓有成效的工作。中山大学力学教研室首先用有限元位移法解算了Winkler 地基上 9 块铰接板的飞机轮载应力。接着姚祖康采用有限元位移法分析两种地基上四边自由支承矩形板的挠度和应力，并给出供汽车荷载使用的应力计算图。陈树坚等采用样条有限元法分析水泥混凝土路面荷载应力。与此同时，姚炳卿等提出了适用于周边自由、简支和铰接等多种边界条件的弹性地基板计算机程序和供空军飞机使用的机场道面计算图表〔34〕。

水泥混凝土路面板的接缝通常具有一定的传递荷载能力，姚祖康、邓学钧等按照接缝两侧板的挠度比和应力比表征传荷能力，用有限元法多次迭代及简化分析方法计算板的荷载应力〔35,36,47〕。姚炳卿、邓学钧等进行了多块板的应力计算并提出了相应的计算程序〔34,36〕。

除有限元位移法外，我国还探讨了其它一些数值计算方法。姚祖康研究了水泥混凝土路面分析的有限元杂交法〔34〕，李存权和揭立男进行有限差分法的使用研究〔37〕，王选仓和王秉纲将边界元法应用于混凝土路面计算〔38〕。所有这些方法都取得了满意的计算结果。

对于弹性地基上的异形板和开孔板，高拥民采用三角形Mindlin 中厚板单元的有限元位移法〔34〕，姚祖康和谈至明采用三角形 Reissner 中厚板单元的有限元杂交法〔39〕，王选仓和王秉纲采用边界元法〔40〕，分别成功地计算了板的荷载应力。

为了分析弹性地基厚板，石小平和姚祖康根据 Reissner 中厚板理论采用三角级数叠加法计算了矩形板的荷载应力〔41〕，王秉纲、房英武和支喜兰应用有限层法计算了三维矩形厚板和圆形厚板的荷载应力〔42,43〕，黄卫和邓学钧采用有限棱柱法计算有限尺寸矩形厚板应力也获得成功〔48〕。

为了进行弹性层状体系的应力位移的数值方法计算，张起森对轴对称课题采用有限元法，取三角形截面环单元予以分析；在有单向水平荷载作用时，采用有限元半分析法即选取位移函数进行分析。这些分析给出了具有一定精度的计算结果〔44〕。房英武和王秉纲应用有限层法分析弹性层状体系，获得较高精度的计算结果〔45〕。

随着我国路面计算理论研究的发展，弹性地基板及弹性层状体系的数值计算方法研究（尤其是前者）取得了丰硕的成果，从而推动了路面设计理论的发展，丰富了这一力学领域的数值方法，这对路面工程及计算力学都具有重要的意义。随着路面工程的不断进展，路面

力学数值计算还将面临一些新的课题，路面力学数值方法的研究必将得到新的发展。

参考文献

〔1〕H.Hertz. Über das Gleichgewicht Schwimmender Elasticher Platten. Ann.Physik Chem., 1884, (22).

〔2〕H.M.S.Westergaard. Stresses in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analysis.Proc.HRB, Part 1, 1925; also published in Public Roads 1926, 7(2).

〔3〕A.H.A.Hogg Equilibrium of a Thin Plate Symmetrically Loaded,Resting on an Elastic Subgrade of Infinite Depth, Phil. Mag., 1938, 25(7).

〔4〕О.Я.Щехтер, Расчет бесконечной фундаментный плиты, лежащей на упругом основании конечной Мощности и нагруженной сосредоточенной слой (без ВВедения гипотезы чиммрмана).Сборник 10 НИС Фундаментсоя《Свайные и естественные основания》.Стойиздат, 1939.

〔5〕В.З.Власов и Н.Н.Леонтъев, Балки, плиты и облочки На упругом осНоваНии, Физматгиз, 1960.

〔6〕松村孙治，弹性率の深さと共に変化する地盘にラける基础的沉下，土木学会誌（日）1931, 27(9).

〔7〕D.M.Bermister.The General Theory of stresses and Displacements in Layered Soil System, I, II, III, J.Appl.Phys., 1945, 16(2、3、5).

〔8〕L.Fox.Computation of Traffic Stresses in a Simple Road Structure, RRL, Paper 9, London, 1948.

〔9〕Б.И.КогаН,НапряжеНия и деформачии мНогослойНых покрытий,Труды ХАДИ, Вып.14, 1952.

〔10〕牟歧鹿楼，表面にせん断荷重を受ける半无限弹性体の三次応力问题，机械学会论文集（日），1956, 22(119).

〔11〕R.L.Schiffman, General Analysis of stresses and Displacements in Layered Elastic Systems, International Conference on the structural Design of Asphalt Pavements, Proceedings, Ann Arber, Michigan, 1962.

〔12〕R.A.Westmann.Layered Systems Subjected to Surface Shears, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Proc., 1963, 89(6).

〔13〕Б.Г.柯列涅夫.弹性地基上的板和梁计算问题，立之译，北京：建筑工业出版社，1958.

〔14〕M.И.葛尔布诺夫—伯沙道夫．弹性地基上结构物的计算．华东工业建筑设计院译．北京：建筑工业出版社，1957.

〔15〕D.M.Bermister.The Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems and Application to the Design of Airport Runways, Proc.HRB, 1954.

〔16〕W.E.A.Acum, L.Fox, Computation of Load Stresses in Three Layer Elastic System, Geotechnique, 1951, 2(4).

〔17〕Б. И. Коган, Применении Точного Решения Теории Упругости для Многослойного Полупространства к Расчету нежестких Дорожных Покрытий, Труды ХАДИ, сб.21, 1958.

〔18〕G.Jeuffroy, J.Bachelez, Essai d'explication Méthodique des Experiences du WASHO Revue General des Route et des Aérodromes, №.301, Sept., 1957.

〔19〕R.L.Schiffman, The Numerical Solution for Stresses and Displacements in Three-Layer Soil System, Proc.Int.Conf.Soil Mech. and Found.Eng., 1957, 2(4).

〔20〕A.Jones.Tables of Stresses in Three-layer Systems, HRB Bull.342, 1962.

〔21〕同济大学公路工程研究所.路面厚度计算图表.北京:人民交通出版社, 1975.

〔22〕C.M.Gerrard, Tables of Stresses, Strains and Displacements in Two-layer Elastic System Under Various Traffic Loads.Australian Road Research Board, Special Report, №.3, 1969.

〔23〕 松岗健一，能町纯雄.层表面にせん断力を受力ける多层弹性体の応力解析.土本学会论文报告集（日），№.241, 1975.9.

〔24〕许志鸿.双层弹性体系在圆形均布水平荷载作用下的应力与位移.同济大学学报, 1978, 6(4): 55～68

〔25〕朱照宏、王秉纲、郭大智.路面力学计算.北京：人民交通出版社，1985.

〔26〕M.G.F.Peutz, H.M.P.Van Kompen, A.Jones.Layered Systems Under Normal Surface Loads—'BISTRO' Computer Program.Koninklijke/shell—Laboratorium, Amsterdam; The NetherLands, HRB, №.228, 1968.

〔27〕DL.De Jong, M.G.F.Peutz, A.R.Korswagen. Layered System Under Normal and Tangential Surface Loads 'BISAR' Computer Program.Koninklijke/Shell—Laboratorium. Amsterdam; External Report AMSR, 1973.

〔28〕C.M.Gerrard, L.J.Wardle. Rational Design of Surface Pavement Layers. Journal of Australian Road Research Board, 1980, (9).

〔29〕王凯.N层弹性连续体系在双圆均布复合荷载作用下的力学计算.固体力学学报, 1983, 3(1).

〔30〕朱照宏、严作人.弹性多层路面的力学图谱分析.同济大学学报, 1986, 14:(1) 1～11.

〔31〕郭文复.多层半无限弹性体在圆形荷载作用下的解析解.力学学报, 1984, 16(3): 282～289.

〔32〕S.K.Wang, M.Sargious, Y.K.Cheng.Advanced Analysis of Rigid Pavements. Transportation Engineering J.of ASCE, 1972, 98(1).

〔33〕Y.H.Huang, S.T.Wang. Finite-element Analysis of Rigid Pavements with Partial Subgrade Contact. TRR, №.485, 1974.

〔34〕交通部公路规划设计院、同济大学.水泥混凝土路面设计理论、方法和参数研究报告集. 1986, 10.

〔35〕姚祖康.水泥混凝土路面荷载应力的有限元分析.同济大学学报, 1979, 7(6):

45～55

〔36〕邓学钧、黄仰贤.具有传力边界的混凝土路面简化分析方法（英）. 国际有限元会议论文集. 上海，1982，8.

〔37〕李存权、揭立男.水泥混凝土路面的有限差分法. 湖南大学学报，1981,8(4).

〔38〕Wang Xuancang, Wang Binggang. An Analysis of Plates on Elastic Foundations by Boundary Element Methods,Theory and Methods Proceedings of 2nd China-Japan Symposium on Boundary Element Methods. Oct.1988.

〔39〕姚祖康、谈至明.水泥混凝土路面异形板的荷载应力分析.华东公路.1986，2.

〔40〕王选仓、王秉纲.水泥混凝土路面异形板、开孔板的边界元分析. 西安公路学院学报. 1989，7(2).

〔41〕石小平、姚祖康.弹性地基上矩形厚板的解. 力学与实践. 1986，8(2)：19～22.

〔42〕王秉纲、房英武.弹性地基矩形厚板的有限层分析，解析与数值结合法的理论及其工程应用. 长沙：湖南大学出版社，1989.

〔43〕王秉纲、支喜兰.弹性地基圆形厚板的有限层分析，解析与数值结合法的理论及其工程应用. 长沙：湖南大学出版社，1989.

〔44〕张起森.道路工程有限元分析法. 北京：人民交通出版社，1983.

〔45〕房英武、王秉纲.弹性地基上矩形厚板的荷载应力分析. 西安公路学院学报，1987，5(2)：150～160.

〔46〕邓学钧.弹性多层地基上刚性路面板的力学分析. 岩土工程学报.1986，8(5).

〔47〕Y.H.Huang, X.J.Deng. Finite Element Analysis of Jointed Concrete Pavement. ASCE, Transportation Journal. Sept.1983.

〔48〕黄卫、邓学钧.用有限棱柱法分析水泥混凝土路面厚板的荷载应力. 土木工程学报. 1990，23(2)：69～78.

第二章 弹性层状体系解析解数值计算

第一节 弹性空间课题一般解

一、轴对称弹性空间课题一般解[1]

弹性层状体系系由若干弹性层组成，各层有一定厚度，最下一层为半无限体。解题时假定：层间接触条件或为完全连续，或为绝对光滑；各层在水平方向无限远处及最下一层无限深处，其应力、形变和位移为0；不计自重。

对于轴对称空间课题，由弹性力学知，以柱坐标表示的平衡方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\&\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

物理方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_r=\frac{1}{E}[\sigma_r-\mu(\sigma_\theta+\sigma_z)]\\&\varepsilon_\theta=\frac{1}{E}[\sigma_\theta-\mu(\sigma_z+\sigma_r)]\\&\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_r+\sigma_\theta)]\\&\gamma_{rz}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{rz}\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

几何方程为：

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r};\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r};\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z};\quad \gamma_{rz}=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\tag{c}$$

变形连续方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\sigma_r-\frac{2}{r^2}(\sigma_r-\sigma_\theta)+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}=0\\&\nabla^2\sigma_\theta+\frac{2}{r^2}(\sigma_r-\sigma_\theta)+\frac{1}{1+\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}=0\\&\nabla^2\sigma_z+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0\\&\nabla^2\tau_{zr}-\frac{\tau_{zr}}{r^2}+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\partial z}=0\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

式中： $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$；

$\Theta=\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z$；

μ 为泊松系数。

如果引用应力函数 $\varphi=\varphi(r,z)$，并把应力分量表示成为：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)\\
\sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]\\
\tau_{zr} = \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{e}
$$

则将式(e)代入式(a)及(d)中，有：

$$
\nabla^2\nabla^2\varphi = 0 \tag{f}
$$

如果能从式(f)中解得应力函数 φ，代入式(e)中则得各应力分量。将各应力分量代入式(b)，得各形变分量。由式(e)、(b)及(c)可得以应力函数表示的位移分量，即：

$$
\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{1+\mu}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}\\
w &= \frac{1+\mu}{E}\left[2(1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{g}
$$

方程(f)的求解，在路面力学分析中习惯上多采用Hankel 变换法，由此解得：

$$
\varphi(r,z) = \int_0^\infty [(A+Bz)e^{-\zeta z} + (C+Dz)e^{\zeta z}]\zeta J_0(\zeta r)d\zeta \tag{h}
$$

式中： $J_0(\zeta r)$——第一类零阶 Bessel 函数；

A,B,C,D——待定系数，由弹性层状体系的边界条件确定。

由公式(h)、(e)及(g)可得弹性空间轴对称课题的各应力和位移分量表达 式：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= -\int_0^\infty \zeta\{[A-(1+2\mu-\zeta z)B]e^{-\zeta z}\\
&\quad -[C+(1+2\mu+\zeta z)D]e^{\zeta z}\}J_0(\zeta r)d\zeta + \frac{1}{r}U\\
\sigma_\theta &= 2\mu\int_0^\infty \zeta(Be^{-\zeta z}+De^{\zeta z})J_0(\zeta r)d\zeta - \frac{1}{r}U\\
\sigma_z &= \int_0^\infty \zeta\{[A+(1-2\mu+\zeta z)B]e^{-\zeta z}\\
&\quad -[C-(1-2\mu-\zeta z)D]e^{\zeta z}\}J_0(\zeta r)d\zeta\\
\tau_{zr} &= \int_0^\infty \zeta\{[A-(2\mu-\zeta z)B]e^{-\zeta z}+[C+(2\mu+\zeta z)D]e^{\zeta z}\}J_1(\zeta r)d\zeta\\
u &= -\frac{1+\mu}{E}U\\
w &= -\frac{1+\mu}{E}\int_0^\infty \{[A+(2-4\mu+\zeta z)B]e^{-\zeta z}\\
&\quad +[C-(2-4\mu-\zeta z)D]e^{\zeta z}\}J_0(\zeta r)d\zeta
\end{aligned}\right\} \tag{i}
$$

式中：

$$U=\int_0^{\infty}\{[A-(1-\zeta z)B]e^{-\zeta z}-[C+(1+\zeta z)D]e^{\zeta z}J_1(\zeta r)\}d\zeta$$

公式(i)即为轴对称空间课题的一般解。

二、非轴对称空间课题一般解[4]

为了满足一般性要求，需讨论非轴对称空间课题，而轴对称课题是其特例。与轴对称空间课题的分析方法相类似，先建立平衡方程、物理方程、几何方程及变形连续方程，之后选取应力函数。非轴对称空间课题的应力函数被选取为：

$$\phi=\phi(r,\theta,z)$$
$$\psi=\psi(r,\theta,z)$$

并给定以应力函数表示的各应力分量及位移分量。按照轴对称课题的同样步骤得到类似于公式(f)的方程：

$$\left.\begin{aligned}\nabla^4\phi=0\\ \nabla^2\psi=0\end{aligned}\right\}\tag{j}$$

为了满足一般性要求，将 ϕ 和 ψ 表示为：

$$\left.\begin{aligned}\phi(r,\theta,z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(r,z)\cos k\theta\\ \psi(r,\theta,z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(r,z)\sin k\theta\end{aligned}\right\}\tag{k}$$

由 Hankel 变换方法解得：

$$\left.\begin{aligned}\phi(r,\theta,z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\zeta[(A+Bz)e^{-\zeta z}+(C+Dz)e^{\zeta z}]J_k(\zeta r)\cos k\theta d\zeta\\ \psi(r,\theta,z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\zeta[Ee^{-\zeta z}+Fe^{\zeta z}]J_k(\zeta r)\sin k\theta\end{aligned}\right\}\tag{l}$$

由此可以求得非轴对称空间课题的一般解为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r=\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{&-\int_0^{\infty}\zeta[(A-(1+2\mu-\zeta z)B)e^{-\zeta z}-(C+(1+2\mu+\zeta z)D)e^{\zeta z}]\\ &\times J_k(\zeta r)d\zeta+\frac{k+1}{2r}U_{k+1}+\frac{k-1}{2r}U_{k-1}\Big\}\cos k\theta\\ \sigma_\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\Big[&\ 2\mu\int_0^{\infty}\zeta(Be^{-\zeta z}+De^{\zeta z})J_k(\zeta r)d\zeta\\ &-\frac{k+1}{2r}U_{k+1}-\frac{k-1}{2r}U_{k-1}\Big]\cos k\theta\end{aligned}\right.$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\zeta\{[A+(1-2\mu+\zeta z)B]e^{-\zeta z}-[C-(1-2\mu-\zeta z)D] \\
&\quad \times e^{\zeta z}\}J_k(\zeta r)\cos k\theta d\zeta \\
\tau_{r\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\zeta(Ee^{-\zeta z}+Fe^{\zeta z})J_k(\zeta r)d\zeta+\frac{k+1}{2r}U_{k+1}\right. \\
&\quad \left.-\frac{k-1}{2r}U_{k-1}\right]\sin k\theta \\
\tau_{z\theta} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(H_{k+1}+H_{k-1})\sin k\theta \\
\tau_{zr} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(H_{k+1}-H_{k-1})\cos k\theta \\
u &= -\frac{1+\mu}{2E}\sum_{k=0}^{\infty}(U_{k+1}-U_{k-1})\cos k\theta \\
v &= -\frac{1+\mu}{2E}\sum_{k=0}^{\infty}(U_{k+1}+U_{k-1})\sin k\theta \\
w &= -\frac{1+\mu}{E}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\{[A+(2-4\mu+\zeta z)B]e^{-\zeta z} \\
&\quad +[C-(2-4\mu-\zeta z)D]e^{\zeta z}\}J_k(\zeta r)\cos k\theta d\zeta
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{m})
$$

式中：

$$
\begin{aligned}
U_{k+1} &= \int_0^{\infty}\{[A-(1-\zeta z)B-2E]e^{-\zeta z}-[C+(1+\zeta z)D \\
&\quad +2F]e^{\zeta z}\}J_{k+1}(\zeta r)d\zeta \\
U_{k-1} &= \int_0^{\infty}\{[A-(1-\zeta z)B+2E]e^{-\zeta z}-[C+(1+\zeta z)D \\
&\quad -2F]e^{\zeta z}\}J_{k-1}(\zeta r)d\zeta \\
H_{k+1} &= \int_0^{\infty}\zeta\{[A-(2\mu-\zeta z)B-E]e^{-\zeta z}+[C+(2\mu+\zeta z)D+F]e^{\zeta z}\}J_{k+1}(\zeta \gamma)d\zeta \\
H_{k-1} &= \int_0^{\infty}\zeta\{[A-(2\mu-\zeta z)B+E]e^{-\zeta z}+[C+(2\mu+\zeta z)D-F] \\
&\quad \times e^{\zeta z}\}J_{k-1}(\zeta r)d\zeta
\end{aligned}
$$

在以上诸式中A、B、C、D、E、F都与k有关，为简明起见脚标未注明。

如果荷载和边界条件已知，可由公式(i)和(m)分别给出空间轴对称课题和非轴对称课题各分量的表达式。

第二节　弹性半空间体解计算[2]

当弹性半空间体表面上作用轴对称垂直荷载$p(r)$和轴对称水平荷载$g(r)$时，由前一节的公式(i)根据本课题的边界条件，求得轴对称课题中应力分量和位移分量一般积分表达式的待定系数A、B、C、D，则可得到任意轴对称斜向荷载下弹性半空间体的应力与位移分量的一般表达式如下：