全国硕士研究生入学统一考试**历届考题**

名家解析及预测

理工数学二

刘 斌 编

2003

世界图书出版公司

全国硕士研究生入学统一考试历届考题

名家解析及预测

理工数学二

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析及预测.理工数学二/刘斌编.
—西安:世界图书出版西安公司,2002.3
ISBN 7-5062-5325-9

Ⅰ.全… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 009147 号

全国硕士研究生入学统一考试历届考题名家解析及预测——理工数学二

编　　著　刘　斌
责任编辑　焦毓本
总 策 划　谭隆全
封面设计　东　方

世界图书出版西安公司 出版发行
(西安市南大街 17 号　邮编 710001)
北京市后沙峪印刷厂印刷
各地新华书店经销
开本:787×1092(毫米)　1/16　印张:86(总)　字数:2146.56 千字(总)
2002 年 3 月第 1 版　　2002 年 3 月第 1 次印刷
印数:1～3000 册
ISBN 7-5062-5325-9
H·373 共 7 册 定价:126.00 元

出版说明

本套丛书具有**资料完整、分析详细、解剖透彻、技巧灵活和预测准确**的特点。首先，汇集了1987～2002年数学，1992～2002年政治、英语的历届研究生入学考试试题，包括理科政治、文科政治、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四，共七册；其次，真正做到了逐题解析，透彻详细，论证严密，特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程，还对命题思路、解题的重点、难点进行了深入解析，并注重解题思路和规律的分析——总结与方法——技巧的提炼；最后对命题趋势作出预测，切题率高。

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，至今已有16年，共命制试卷100余份，数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治方面知识、能力和水平的要求，展示出统考以来三门基础课考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想，是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过10届，所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上，近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如，2002年数学一的第一大题第(4)小题与1993年数学一的第七大题，2002年数学一的第五大题与1995年数学三的第六大题，2002年数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第十二大题，2002年数学一的第十一大题与1994年数学四第十一大题，2002年数学二第二大题第(2)小题与1999年数学四第二大题第(1)小题，2002年数学二第八大题与1996年数学一第三大题，2002年数学二第十一大题与1997年数学二第三大题，2002年数学三第二大题第(3)小题与2001年数学三第二大题第(4)小题，2002年数学三第十一大题与1999年数学三第十一大题，2002年数学三、四第十二大题与1999年数学四第二大题第(4)小题，2002年数学四第六大题与1999年数学三、四第二大题第(2)小题，2002年数学四第七大题与1995年数学四第六大题，2002年数学四第九大题与1994年数学二第八大题，2001年数学一的第一大题第(1)小题与2000年数学二第二大题第(5)小题，2001年数学一的第六大题与1997年数学一的第三大题第(2)小题；2001年数学一的第九大题与1996年数学三的第十大题，2001年数学二的第一大题第(5)小题与2000年数学一的第一大题第(4)小题，2001年数学三、四的第二大题第(1)小题与1996年数学一第二大题第(2)小题，2001年数学三、四第二大题第(3)小题与1995年数学一第二大题第(5)小题，2001年数学一第三大题与1992年数学三第四

大题,2001 年数学三、四第七大题与 1996 年数学三第六大题等等都是相同或非常相似的,且解题思路几乎完全一样,可见仅在最近两年的数学考题中就有多达 20 余道题是与往届考题雷同的,考生若把这些历年试题全部消化巩固,将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此,广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历年考试资料作为参考,共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作,现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本丛书的考点预测部分是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶,具有极高的切题率。比如,从去年版本来看,准确预测到 2002 年数学试题中的有关方向导数、多元函数的极值、压力以及弹性等方面的试题;英语试题预测,由于题型的变化,取消了词汇和语法结构这一考试项目,就变得更难以确定,但编者预测到了阅读理解第 3 篇和第 4 篇的有关内容。完形填空也预测到是科普性文章。

本丛书的文科政治和理科政治的四位作者中,有三位曾是教育部原政治命题组组长或命题组成员,一位是长期阅卷,并一直担任政治阅卷组组长。他们现在都是北京市和全国各大城市举办的大型考研辅导班和串讲班的主讲教授。所以,他们对历届考题的解析及预测的权威性强,可信度高。

本丛书对 2003 年的命题趋势作了科学的预测,相信对即将参加研究生入学考试的广大同学具有重要的参考价值。

由于时间比较仓促,难免还有不当之处,恳请广大读者朋友批评指正,以使本系列丛书能不断完善。

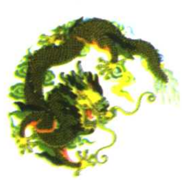
全国硕士研究生入学考试试题研究组

本书特点

1.全国考研辅导名家主笔。具有标准的解题示范及指导作用。

2.解析详尽、透彻，权威性强。

3.掌握命题规律，预测准确，命中率高。



责任编辑:焦毓本
总 策 划:谭隆全
封面设计:东　方

目　　次

注:1987～1996 年理工数学二为原理工数学三

第一篇　全国硕士研究生入学统一考试历届理工数学二试题、答案及解析

2002年全国硕士研究生入学统一考试理工数学二试题

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

(2) 位于曲线 $y=xe^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方,x 轴上方的无界图形的面积是________.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是________.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]=$ ________.

(5) 矩阵 $\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ 的非零特征值是________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(u)$ 可导,$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时,相应的函数增量 Δy 的线性主部为0.1,则 $f'(1)=$

(A) -1　　(B) 0.1

(C) 1　　(D) 0.5

【　】

(2) 设函数 $f(x)$ 连续,则下列函数中,必为偶函数的是

(A) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$

(B) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$

(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

【　　】

(3) 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A) 不存在

(B) 等于 1

(C) 等于 2

(D) 等于 3

【　　】

(4) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

【　　】

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则对于任意常数 k，必有

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

【　　】

三、(本题满分 6 分)

已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$，求该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

五、(本题满分 7 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},$$

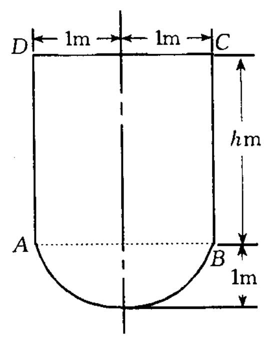
求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$，$x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

七、(本题满分 7 分)

某闸门的形状与大小如图所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 $5:4$，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)?



八、(本题满分 8 分)

设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

九、(本题满分 8 分)

设 $0<a<b$，证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

十、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，

$f''(0) \neq 0$. 证明:存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得当 $h \to 0$ 时,$\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

十一、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵,且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明:矩阵 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ 可逆;

(2) 若 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

十二、(本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$,如果 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

2002年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题答案及解析

一、填空题

(1) $\underline{\quad -2 \quad}$.

[解析]

$$\because \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\tan x}{\frac{x}{2}} = -2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a e^{2x} = a,$$

由题设有 $-2 = a$,即 $a = -2$.

(2) $\underline{\quad 1 \quad}$.

[解析]

所求面积为 $S = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} - x de^{-x} = - xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$

(3) $\underline{\quad y = \sqrt{x+1} \text{ 或 } y^2 = x+1}$.

[解析]

令 $y' = p$,则 $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$,

原方程化为 $yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 0$

即 $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dy}{y}$

积分得 $\ln p = -\ln y + C_1$

即 $p\cdot y = e^{C1} = C$

由 $y'(0) = \dfrac{1}{2}, y(0) = 1$

得 $C = \dfrac{1}{2}$

故有 $py = \dfrac{1}{2}$

即 $\dfrac{dy}{dx}\cdot y = \dfrac{1}{2}, 2ydy = dx, y(0) = 1$

再次积分得 $y^2 = x + 1$ 或 $y = \sqrt{x + 1}$.

(4) $\underline{\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}}$.

[解析] 利用定积分定义,有

$$原式 = \int_0^1 \sqrt{1 + \cos\pi x}\,dx = \int_0^1 \sqrt{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

(5) $\underline{\ 4\ }$.

[解析]

$$\because \left|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 4),$$

$\therefore$ 非零特征值为 $\lambda = 4$.

二、选择题

(1) 应选(D).

[解析]

由题设 $\Delta y = y'(-1)\cdot\Delta x$,即 $0.1 = y'(-1)\cdot(-0.1)$,于是有 $y'(-1) = -1$,而由 $y = f(x^2)$ 有 $y' = 2xf'(x^2)$,

令 $x = -1$ 得 $y'(-1) = -2f'(1)$,即 $f'(1) = \dfrac{1}{2} = 0.5$.

(2) 应选(D).

[解析]

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ 的奇偶性与 $f(x)$ 的奇偶性的关系是:若 $f(x)$ 为偶函数,则 $F(x)$ 为奇函数;若 $f(x)$ 为奇函数,则 $F(x)$ 为偶函数.题设四个选项中,$t[f(t) + f(-t)]$ 为奇函数,故 $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]\,dt$ 必为偶函数.

(3) 应选(C).

[解析]

由 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 及 $y(0) = y'(0) = 0$,知 $y''(0) = 1$.

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1 + x^2)}{y(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{y'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{y''(x)} = \dfrac{2}{y''(0)} = 2$.

(4) 应选(B).

[解析]

本题可用排除法，例如 $f(x)=xe^{-x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}-xe^{-x})=1\neq0$，排除(A)；

又如 $f(x)=\sin x$，在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=1\neq0$，可排除(C)、(D).

故正确选项为(B).

[注] 本题也可用拉格朗日中值定理直接证明(B)为正确选项.

(5) 应选(A).

由题设知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，且存在 k_1,k_2,k_3 使 $\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，于是通过列初等变换有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,kk_1\boldsymbol{\alpha}_1+kk_2\boldsymbol{\alpha}_2+kk_3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta}_2]\to[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]$$

因此秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=4$，

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

三、[解析]

此曲线的参数方程为$\begin{cases}x=(1-\cos\theta)\cos\theta,\\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=\cos\theta-\cos^2\theta,\\ y=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta.\end{cases}$

由 $\theta=\frac{\pi}{6}$，得到切点的坐标$\left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac34,\frac12-\frac{\sqrt3}{4}\right)$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1.$$

于是所求切线方程为

$$y-\frac12+\frac{\sqrt3}{4}=x-\frac{\sqrt3}{2}+\frac34,$$

即 $$x-y-\frac34\sqrt3+\frac54=0.$$

法线方程为

$$y-\frac12+\frac{\sqrt3}{4}=-\left(x-\frac{\sqrt3}{2}+\frac34\right),$$

即 $$x+y-\frac{\sqrt3}{4}+\frac14=0.$$

四、[解析]

当 $-1\leqslant x<0$ 时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x}(2t+\frac{3}{2}t^2)\mathrm{d}t=(t^2+\frac{1}{2}t^3)\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}.$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\\&=(t^2+\frac{1}{2}t^3)\Big|_{-1}^{0}+\int_0^x\frac{t\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2}\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}-\int_0^x t\mathrm{d}(\frac{1}{\mathrm{e}^t+1})\\&=-\frac{1}{2}-\frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\Big|_0^x+\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}\\&=-\frac{1}{2}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\int_0^x\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t+1)}\\&=-\frac{1}{2}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\Big|_0^x\\&=-\frac{1}{2}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln 2.\end{aligned}$$

所以 $$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2} & -1\leqslant x<0\\ \ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln 2-\frac{1}{2} & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

五、[解析]

设 $y=\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}$，

则 $$\ln y=\frac{1}{h}\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)}$$

因为 $$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\ln y&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{x[\ln f(x+hx)-\ln f(x)]}{hx}\\&=x[\ln f(x)]',\end{aligned}$$

故 $$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{x[\ln f(x)]'}.$$

由已知条件得 $\mathrm{e}^{x[\ln f(x)]'}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，

因此 $$x[\ln f(x)]'=\frac{1}{x},$$

即 $$[\ln f(x)]'=\frac{1}{x^2}.$$

解之得 $$f(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$