杨克劭 主编

微积分典型题题典

——考研数学应试能力进阶

NEUPRESS
东北大学出版社

微积分典型题题典

——考研数学应试能力进阶

杨克劭　主编

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

微积分典型题题典 / 杨克劭主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2003.5

ISBN 7-81054-915-4

Ⅰ.微…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.微积分—研究—入学考试—习题　Ⅳ.O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 034751 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳农业大学印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：140mm×203mm
印　　张：13.5
字　　数：338 千字
出版时间：2003 年 7 月第 1 版
印刷时间：2003 年 7 月第 1 次印刷
责任编辑：王兆元　郭爱民　　责任校对：文　韬
封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

定　　价：18.00 元

前　言

本书是专门为报考经济学类硕士研究生（数学试卷三、试卷四）的考生复习微积分而编写的辅导教材。每章均分为四大板块：第一板块　考试内容与考试要求，介绍了教育部制订的《2004年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中数学三、数学四的考试内容与考试要求。第二板块　知识点指要精讲，介绍该章的基本概念、基本理论和基本解题方法，以及正确理解的要点、容易产生错误的提示，归纳本章所涉及的题型及解题步骤，其中融入了作者多年从事高等数学教学及考研辅导的经验。第三板块　典型题透析精解，共介绍了551个例题，其中多数是1987年到2003年统考以来考研真题中有较强综合性和新颖性的试题，并且都给出详细解答，有的题还给出了不同的解法。所有例题均按题型编排，对较难的题先进行分析，引导出解题思路与方法；对涉及面宽的题，还归纳出解题的主要步骤。第四板块　模拟题自检精测，共精心选配了330个习题，其中多数为往届考研的真题，并分别按填空题、单项选择题、计算题和证明题编排，每题均附有可供参考的提示或答案。

参加本书编写的有杨克劭、白红、王维生、包革军等。全书由杨克劭主编。

由于编者水平所限及完稿时间仓促，疏漏之处在所难免，欢迎读者批评指正。

常言道："有志者，事竟成。"祝愿广大考生朋友心想事成，马到成功！

编　者

2003年7月

于哈尔滨工业大学

目　录

第一章 函数、极限、连续

一 考试内容·考试要求

数学三考试内容及考试要求

考试内容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、隐函数、分段函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 简单应用问题函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限和右极限 无穷小和无穷大的概念及关系 无穷小的性质及无穷小的比较 极限四则运算 极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立简单应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念.

5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念．
6. 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法．了解无穷大的概念及其与无穷小的关系．
7. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限．
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型．
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用．

数学四考试内容及考试要求

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、隐函数、分段函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小和无穷大的概念及关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立简单应用问题的函数关系．
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．
3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念．
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念．
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念．

6. 理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法．了解无穷大的概念及其与无穷小的关系．
7. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限．
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型．
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用．

二 知识点指要精讲

(一) 函数的概念

函数是微积分研究的对象，因此，函数的概念是微积分的基本概念之一．可以说每一个试题都与函数概念有关．

定义 设有两个变量 x 和 y，当变量 x 在其取值的数集 I 中任取一值时，变量 y 均依照某个确定的规则，有惟一确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 定义在数集 I 上的函数．记为

$$y=f(x),\quad x\in I$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 I 称为**函数的定义域**，记号“$f(\quad)$”表示变量 y 与变量 x 的那个对应规则，即函数的记号，变量 y 取值的数集，称为**函数的值域**．

注 1 函数概念中的两个基本要素，就是定义域和对应法则，因此，两个函数只有当定义域和对应法则均相同时，才能认为这两个函数是相等的．

例 1-1 下列函数为同一函数的是 【C】

(A) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$.

(B) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $g(x)=x+1$.

(C) $f(x)=x$, $g(x)=x(\cos^2 x+\sin^2 x)$.

(D) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$.

函数定义中的“惟一确定”表明只讨论**单值函数**．

易错提醒

不要把两个变量的**函数关系**与一般的**因果关系**相混淆．例如：勤奋可提高考试成绩，它们之间只是一种因果关系，无确定的值的对应关系．

在同一个问题中，不能用同一个函数记号表示不同的函数．

注 2 要讨论一个函数，必须首先确定它的定义域，因为只有在定义域上对函数的讨论才是有意义的．确定函数的定义域有以下规则：零不能作除数、负数不能开平方(微积分只限定在实数范围内讨论问题)、只有正数才能取对数($\log_a x$ 表示以 a 为底的对数，$a>0$，$a\neq1$；$\lg x$ 表示以 10 为底的常用对数；$\ln x$ 表示以 e 为底的自然对数)．若函数的表达式由几项组成，则其定义域应是各项自变量取值范围的交集(公共部分)；若函数有明确的几何意义或物理意义，则求定义域时必须考虑．

例 1-2 求函数 $y=\sqrt{3x+2}+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域．

【解】 在第一项 $\sqrt{3x+2}$ 中，应有 $3x+2\geqslant0$，即 $x\geqslant-\dfrac{2}{3}$．在第二项 $\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 中，应有 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant1$，即 $-1\leqslant x\leqslant3$．它们的公共部分 $\left[-\dfrac{2}{3},3\right]$，即所求的定义域．

例 1-3 边长为 48cm 的正方形铁片，在四个角上剪去边长为 x 的小正方形后，做一无盖的盒子．其容积 V 是小正方形边长 x 的函数，且

$$V=x(48-2x)^2$$

这个函数的定义域依据几何意义推断为区间(0, 24). 若抛开几何意义，函数 $y=x(48-2x)^2$ 的定义域应是$(-\infty, +\infty)$.

注 3 在微积分中，函数的表示方法有以下 6 种形式：显函数(含分段函数)，隐函数，参数方程表示的函数(试卷三与试卷四对此均未明确提出要求)，极限形式表示的函数，用带有可变上限的定积分表示的函数，用函数项级数的和表示的函数(试卷四不考级数). 对这些不同的表示方法，应当一视同仁，同等对待.

(二) 函数的性质

1　有界性

设函数 $y=f(x)$, $x\in I$. 若存在常数 m_1, m_2, 使得

$$m_1\leqslant f(x)\leqslant m_2,\quad \forall x\in I$$

成立，则称**函数 $y=f(x)$ 在 I 上是有界的**. 并分别称 m_1 和 m_2 为函数 $f(x)$ 的**下界和上界**.

设函数 $y=f(x)$, $x\in I$, 若存在常数 $M>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant M,\quad \forall x\in I$$

成立，则称**函数 $y=f(x)$ 在 I 上是有界的**.

以上两种函数有界的叙述，在有界意义下是等价的.

只有上(下)界的函数，不能称为有界函数，只能称为有上(下)界的函数.

有上界的函数，就有无穷多个上界，但最小的上界只有一个，同样，有下界的函数，就有无穷多个下界，但最大的下界只有一个.

在$(-\infty, +\infty)$上有

$$-1\leqslant \sin x\leqslant 1,\ -1\leqslant \cos x\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}.$$

-1 与 1 是 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的最大下界与最小上界，且是它们的最

小值与最大值．而 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 虽是 $\arctan x$ 的最大下界与最小上界，但 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 并不是 $\arctan x$ 的最小值与最大值．

在 $(-\infty,+\infty)$ 上有

$$0<e^x<+\infty,\quad -\infty<-e^x<0,$$

即函数 $f(x)=e^x$ 只有下界，函数 $g(x)=-e^x$ 只有上界．

函数有界是函数极限存在和函数可积的必要条件．

2　单调性

设函数 $y=f(x)$，$x\in I$，若对 $\forall x_1$，$x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上是**单调增加(单调减少)**的．若 I 是区间，则称 I 为函数 $y=f(x)$ 的**单调增加区间(单调减少区间)**．单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**．

有的函数在其定义域上不是单调函数，但可能存在单调区间．例如函数 $y=x^2$，$(-\infty,0)$ 为其单调减少区间，$(0,+\infty)$ 为其单调增加区间．

3　周期性

设函数 $y=f(x)$，$x\in I$，若存在常数 $T>0$，使得

$$f(x)=f(x+T),\ \forall x,\quad x+T\in I$$

则称函数 $y=f(x)$ 为 I 上的**周期函数**．若 T 的最小值存在，则称这个最小值为函数 $y=f(x)$ 的**周期**．

例如：$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期为 2π．$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=|\sin x|$，$y=|\cos x|$ 的周期为 π．$y=\sin x^2$，$y=\sin\sqrt{x}$，$y=\sin\frac{1}{x}$ 都不是周期函数．

对于周期函数，只要知道它在一个周期内的性态，则它在整个定义域上的性态就清楚了．

4 奇偶性

设函数 $y=f(x)$，$x\in I$，其中 I 是关于原点对称的数集．且

$$f(x)=f(-x)\ (f(x)=-f(-x)),\quad \forall x\in I$$

则称函数 $y=f(x)$ 为 I 上的偶函数(奇函数)．

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

两个定义在同一数集 I 上的偶(奇)函数之和，仍是数集 I 上的偶(奇)函数．

两个定义在同一数集 I 上的偶(奇)函数之积，都是数集 I 上的偶函数．

定义在同一数集 I 上的偶函数与奇函数之积，是数集 I 上的奇函数．

定义在关于原点对称的数集 I 上的函数 $y=f(x)$ 可能既不是偶函数，也不是奇函数，但它可惟一地表示为一个偶函数与一个奇函数之和，即

$$y=f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},\quad x\in I$$

其中 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为 I 上的偶函数，$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为 I 上的奇函数．这一结论在定积分计算中有重要的应用．

例 1-4 狄义克莱(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & x \text{ 为有理数时}\\ 0 & x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

是有界的．它不仅不是单调函数，而且也没有单调区间．它是以正有理数为周期的周期函数，但是没有最小正周期，是偶函数．

(三) 初等函数

1 反函数

设函数 $y=f(x)$，$x\in I$ 的值域为 I^*，若 $\forall y\in I^*$，存在惟

一的 $x\in I$ 与之对应，则称**变量 x 为变量 y 定义在 I^* 上的函数 $x=\varphi(y)$**，并称它为 **$y=f(x)$ 的反函数**．习惯上，常以 x 表示自变量，故 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$（注意：$f^{-1}(x)$ 是反函数的专用记号，有别于 $f(x)^{-1}$）．

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称；而 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形相同．

单调函数的反函数一定存在，且也是单调函数；

非单调函数也可能存在单值的反函数．

例 1-5 $y=2^{x-1}$ 的反函数为 $y=\log_2 x+1$．

例 1-6 函数

$$f(x)=\begin{cases}-x & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+1 & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

在 $[-1,1]$ 上不单调，但它存在单值的反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

2 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域与函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集不是空集，则称 $y=f(\varphi(x))$ 为 x 的**复合函数**，其中变量 u 称为**中间变量**．

例 1-7 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，则 $f(g(x))=2^{2x}$，$g(f(x))=2^{x^2}$．

例 1-8 $y=3^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 是由函数 $y=3^u$，$u=v^2$，$v=\sin w$，$w=\dfrac{1}{x}$ 复合而成的复合函数．

3 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本初等函数**．

由基本初等函数经过有限次的四则运算、有限次的复合所组

成的能由一个数学式子表示的函数，称为**初等函数**．

例 1-9　$y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 不能组成复合函数．

例 1-10　(2001(二)3 分)　设

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

则 $f(f(f(x)))$ 等于　　【B】

(A) 0. (B) 1. (C) $\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$. (D) $\begin{cases}0 & |x|\leqslant 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$.

(四) 极限的概念

1　基本概念

数列极限的定义　设有数列 $\{u_n\}$ 和常数 a，若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|u_n-a|<\varepsilon,$$

则称常数 a 为数列 $\{u_n\}$ 在 $n\to+\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=a.$$

定义表明，n 充分大时，u_n 与 a 可"无限接近"，$n<N$ 时，u_n 与 a 相距甚远无关紧要；N 依赖于 ε，且 ε 愈小时，N 愈大，但由于 N 不惟一，因此不能认为 N 是 ε 的函数．一般记为 $N=N(\varepsilon)$，也只能理解为 N 依赖于 ε．

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=a \text{ 等价于 } \lim_{n\to+\infty}(u_n-a)=0 \text{ 或 } u_n=a+\alpha_n.$$

其中 $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$. 这表明极限与无穷小量的密切关系．这种等价形式的变形将给某些问题的解决带来方便．例如证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$，变为证 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$ 就方便多了．

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ 等价于 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}(=a)$. 这种等价形式的变形也给某些问题的解决带来方便(参见交错级数收敛判别

法的证明).

函数在 $x\to x_0$ 时的极限的定义 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限．记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

定义中的 δ 依赖于 ε，且 ε 愈小时 δ 也愈小，$0<|x-x_0|$ 表明极限 A 存在与否和函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否有定义无关．

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 等价于 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$ 或 $f(x)=A+\alpha(x)$. 其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，当 $0<x_0-x<\delta_1$ 时，恒有

$$|f(x)-B|<\varepsilon,$$

则称常数 B 为函数 $f(x)$ 在 $x<x_0$，$x\to x_0$(记为 $x\to x_0^-$)的左极限．

若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2>0$，当 $0<x-x_0<\delta_2$ 时，恒有

$$|f(x)-C|<\varepsilon,$$

则称常数 C 为函数 $f(x)$ 在 $x>x_0$，$x\to x_0$(记为 $x\to x_0^+$)的右极限．

有时也用记号 $f(x_0^-)$($f(x_0^+)$)表示左(右)极限值．

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 等价于 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$. 这种等价形式的变形适用于分段函数在分段点处的极限讨论，并且左(右)极限的引进，也可用在区间端点的单侧极限讨论(参见重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的证明).

函数在 $x\to\infty$ 时的极限的定义 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，当 $|x|>M$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$