具L_2有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制

——LQL方法

陈善本　范颖晖　著

科学出版社
www.sciencep.com

具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制——LQL 方法

陈善本　范颖晖　著

张福恩　主审

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书反映了作者对具 L_2 有界不确定性线性系统时域鲁棒最优控制问题的研究工作，简要介绍了线性系统设计理论的 W-H，LQG 和 H_∞ 方法，阐述了 L_2 有界不确定性系统的线性二次最优控制——LQL 设计方法及其理论基础，利用"最劣环境下"求取最优控制策略的思想，以及在时域优化极大极小线性二次型指标设计鲁棒最优控制律，其目的是在时域处理 H_∞ 控制问题，并探讨了 LQL 方法用于实际系统设计的相关问题。

本书可供高等院校控制专业研究生、高年级本科生及教师学习参考，也可供从事控制理论研究的工作者，从事飞行器控制系统设计、精密系统控制以及工业过程控制系统设计的科研技术人员阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制：LQL 方法/陈善本，范颖晖著．—北京：科学出版社，2004

ISBN 7-03-011758-1

Ⅰ．具… Ⅱ．①陈…②范… Ⅲ．不确定系统－鲁棒控制：最佳控制 Ⅳ．TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 059718 号

责任编辑：林 鹏 钟 谊/文案编辑：彭 斌 姚 晖/责任校对：林青梅
责任印制：安春生/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2004年1月第一次印刷 印张：11 3/4
印数：1—1 000 字数：222 000

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前　言

控制系统设计的鲁棒性(robustness)问题是控制理论和实际系统应用中最富有挑战性的问题之一。一个不具有一定鲁棒性的控制系统在现实中几乎无法应用，这是由于环境和条件的变化使系统不可避免地要经受内部结构参数的变化摄动和外部干扰的影响。另外，通常还存在系统数学建模中所忽略的因素。因此，对控制系统鲁棒设计的研究就显得十分重要。

几乎在反馈控制系统诞生的同时，人们就已经注意到系统鲁棒性的重要。在经典调节原理中，人们采用稳定裕度的概念来描述并设计系统，但并未升华为理论方法。到了20世纪50年代，出现了以Wiener为代表提出的Wiener-Hopf方法，60年代以Kalman为代表提出的LQG方法以及80年代以加拿大学者Zames为代表提出的H_∞方法。从这些著名的理论方法所针对的不确定性来看，W-H方法和LQG方法是抑制白噪声类不确定性干扰的，而H_∞方法则是抑制L_2有界类扰动的。H_∞方法更有利于解决系统结构参数、模型不准等因素引起的不确定性，因而具有更为广泛的鲁棒性意义。然而，由于H_∞方法是通过优化闭环系统传递函数的H_∞范数来求取反馈控制，通常只是一个数值逼近解，所依据的理论及采用的算法都极为复杂，所以难以应用到实际系统设计中。近年来，国内外大量学者都在探索更简捷的途径来解决这一难点。

一般来讲，控制系统设计可在频域和时域并行进行，方法各有所长。通常在时域开环优化二次型指标求取反馈控制律要比在频域优化闭环传递函数简便，如LQG方法与W-H方法的比较。因此我们探索在时域解决H_∞的对应问题时，注意到对具L_2有界不确定性系统在时域极大极小化二次型指标求取最优控制的问题与H_∞问题具有一致性，从而提出LQL(linear quadratic L_2 bounded uncertainties)方法，这种方法与前述控制系统设计的W-H，LQG和H_∞方法构成了系统的理论框架。就LQL方法本身的理论完善以及应用来说，尚有一系列相关的问题需要深入研究。本书的写作目的主要在于抛砖引玉，希望借此推动这一方向研究的深入。书中不当或错误之处愿垂听赐教。

本书的第一、三章由陈善本教授与范颖晖博士共同撰写，第二、四、五章由陈善本教授撰写，第六、七章以范颖晖博士为主撰写。陈善本教授负责全书结构与统稿。

哈尔滨工业大学张福恩教授审阅了全书初稿，中国科学院院士、东南大学冯纯伯教授自始至终对课题的研究和本书的写作给予了热情的关怀与指导，作者在此深表谢意，同时对张铨教授、李友善教授和李训经教授深表谢意。借此，作者还希望对国家自然科学基金委员会对作者的研究工作的资助表示衷心的感谢！对上海交通大学和科学出版社对本书出版的资助与支持表示衷心的感谢！对所有帮助和支持过本书所及研究工作的师长、同仁和朋友们表示衷心的感谢！

作　者

2002.12.15

于上海交通大学

目　　录

第一章　绪　　论

1.1　控制系统设计理论的历史发展

迄今，控制理论经历了经典控制理论和现代控制理论两个重要的发展阶段。

经典控制理论是在第二次世界大战前后发展起来的。它利用微分方程描述动态系统的运动规律，应用拉普拉斯变换等工程数学工具求解微分方程。在初始条件为零的情况下建立动态系统的传递函数，采用频率法与根轨迹法等工程方法在频域与时域中分析动态系统的行为与品质。经典控制理论在分析与综合单输入单输出(SISO)、线性、定常、集中参数系统时是行之有效的[1]。

随着生产与科学技术的发展，特别是航海、航空和航天技术的发展，控制系统日趋复杂，人们对控制系统精度的要求日益提高。经典控制理论逐渐暴露出它的局限性：首先是不适应快速变化的系统，且以往在传递函数特性的分析中所得到的结论，在多输入多输出(MIMO)系统中变得很复杂而难以应用；其次，传递函数只是系统动态行为的外部描述，难以甚至不能充分有效地揭示出系统内部各物理量的运动规律与本质特征；第三，频率法本身是一种近似的工程方法，带有试探的性质，当系统很复杂、精度要求很高时，用来综合系统很难获得令人满意的结果。于是，出现了现代控制理论。

现代控制理论是在20世纪50年代末和60年代初发展起来的，它在状态空间中利用状态方程和输出方程来描述动态系统的运动规律，充分有效地揭示了动态系统内部的运动规律和本质特征。另一方面，利用微分方程和矩阵等数学工具来求解状态方程，分析系统的动态行为，确定系统的控制规律，方法简便、灵活、准确，具有实时性。现代控制理论既适用于SISO、线性、定常、集中参数控制系统，又适用于MIMO、非线性、时变、分布参数控制系统，应用范围很广。

现代控制理论的一个突出成就是最优控制理论的形成和发展。Bellman在1953～1957年，依据最优性原理，发展了变分法中的Hamilton-Jacobi理论，创立了动态规划。同时，庞特里雅金等学者又于1956～1958年逐步创立了最大值原理，解决了闭域上的变分问题，从而奠定了最优控制的理论基础。之后，Kalman提出了一系列有关状态变量的重要概念，即可控性、可观性、最优线性二次状态反馈(LQSF)，进一步将Wiener滤波进行了发展，给出了最优状态估计，即Kalman滤波；在此基础上，出现了最优控制Wiener-Hopf-Kalman(WHK)理论[2]。文献[3]在解决

系统极点配置、反馈镇定的同时，将 Lyapunov 方法与动态规划结合起来研究了二次型最优控制的存在惟一性、最优反馈的线性律及最优指标满足的代数 Riccati 方程的求解问题，其解法也是一种求解 Lyapunov 方程基础上的迭代法。

最优控制设计中具代表性的是以最优调节和 Kalman 滤波为中心的 LQG 反馈控制系统优化设计方法。在外界干扰信号能表示成白噪声模型或白噪声经过滤波后的噪声模型时，LQG 是一种很理想的设计方法，在很多实际控制工程中，特别是在航海、航空和航天技术领域，LQG 设计取得了相当的成功。

然而 LQG 也有其不完善之处。它的设计是基于系统的精确数学模型，而与实际系统总是存在一定的差距，这也就是所谓的系统不确定性。虽然人们已证明 LQG 调节器同时对每一个独立的控制通道输入端的增益和相位摄动都具有无穷大的增益裕度和 $\pm 60°$ 的相位裕度[4, 5]，但开环参数的一个任意小的变动就能引起 LQG 控制系统的不稳定[6]，且当采用状态估计-反馈而不是状态反馈时，这些鲁棒特性将不复存在[7]。这使得人们再度对经典控制理论进行研究和发掘，试图建立起 MIMO 系统的频域设计方法。先后出现了 Rosenbrock 的逆 Nquist 阵列法(INA)[8]、MacFarlane[9] 和 Postlethwaite[10] 的特征轨迹法(CL)、Owens 的并矢展开法[11] 和 Mayne 的回差序列法[12]，形成了多变量系统的频域法，在实际中获得了大量的应用，但对系统中对象模型的不确定性仍未能很好地解决。

系统设计面临不确定性而出现的种种问题，促使了现代控制理论中另一重要的研究领域——鲁棒控制设计理论的产生。简单地讲，鲁棒控制就是对于给定的存在不确定性的系统，分析和设计能保持系统正常工作的控制器。鲁棒镇定是保证不确定性系统的稳定性，而鲁棒性能设计是进一步要求保有某种指标下的一定的性能。鲁棒控制自其产生便得到了广泛的注目而蓬勃发展。其实人们在系统设计中常常会自觉或不自觉地考虑到鲁棒性问题，最早给出鲁棒控制问题解的可算是 Black 在 1927 年给出的关于真空管放大器的设计，他首次提出采用反馈控制和回路高增益的方法来处理真空管特性的大范围波动。之后，Nquist 频域稳定性准则和 Black 的回路高增益概念共同构成了 Bode 的经典之著[13] 中有关鲁棒控制设计的基础。20 世纪 60 年代之前的这段时期可称为经典灵敏度设计时期。此间，问题多集中于 SISO 系统，根据稳定性、灵敏度的降低和噪声抑制等性能准则来进行回路成形设计。

20 世纪六七十年代中鲁棒控制只是将 SISO 系统的灵敏度分析结果向 MIMO 系统进行了初步的推广[14]，仍被普遍视为灵敏度设计问题，包括跟踪灵敏度、性能灵敏度和特征值/特征向量灵敏度等的设计。

20 世纪 80 年代鲁棒控制进入了新的发展时期。此间研究的目的已是寻求适应大范围不确定性分析的理论和方法。主要研究方向有鲁棒性分析的多项式代数方法、基于输入输出描述的 H_∞ 方法、状态空间模式的鲁棒性分析与镇定。

多项式代数方法是判断系统在一定范围内变化的多项式的稳定性和严正实性[15]。已给出各种不同情况下的充分必要条件,文献[16]、[17]关于多项式凸多面体的棱边定理,形成了一套基于排零定理、值映射和参数化等价族的分析方法[18,19]。在复数域,对矩阵稳定摄动界已有较好结果。

Zames 在 1981 年发表的重要文章"*Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverse*"[20]标志了 H_∞ 控制理论的起步。针对 LQG 设计中将不确定性干扰表示成白噪声模型的局限性,Zames 考虑了干扰信号属于某一能量有限的已知信号集的情况下,能使系统内稳定及系统对扰动的输出达到最小的控制器的设计。他找到了鲁棒控制与最优控制的一个契合点,是在理论内部超越 LQG 理论的尝试。此后,H_∞ 控制理论得到了快速发展,成果令人瞩目。非结构摄动的鲁棒镇定、模型匹配问题和跟踪问题均可化为 H_∞ 控制问题。Zames,Francis 及 Kimura 基于 Hardy 空间的算子理论和解析函数的插值理论首先解决了 SISO 系统的灵敏度设计问题[20~22],其结果又被推广至 MIMO系统[23~25],形成了较完整的 H_∞ 控制的频域研究方法。为进一步简化求解过程,H_∞ 设计又转向状态空间分析方法,并形成一般性问题,先后出现了所谓的 1984 方法[26]和 DGKF 法[27]。后者使 H_∞ 问题的求解显著简化,只需求解两个 Riccati 代数方程;控制器的结构也更加明确,并据此揭示了 H_∞ 优化与二次型最优控制之间的内在联系。随着设计沿保守性降低方向的发展,出现了基于结构奇异值的 μ 综合与 μ 分析[28],基于有理函数空间的 Gap 度量与 Gap 拓扑的建立[29,30],以及基于 Lyapunov 函数二次稳定分析[31]的 Q 理论。能为不确定系统的实现、分析、综合提供统一框架的线性分式变换(LFT)的引入又使 H_∞ 一类问题归结于线性矩阵不等式(LMI)的求解[32],尤其对奇异扰动系统取得了较好的结果[33,34]。利用 H_∞ 在时域上的 minmax 意义,文献[35]等建立了 H_∞ 最优控制与 LQ 对策论之间的联系。涉及对策论与鲁棒控制理论关系的研究工作还有文献[63]~[65]、[94]~[110]、[112]、[122]等。这些成果都极大地丰富了 H_∞ 理论,使其成为鲁棒控制的一大热点。

状态空间模式下的鲁棒性问题范围很广,主要分为对于系统稳定摄动界的估计和鲁棒控制器的设计两个方面。前者借助于相应的 Lyapunov 矩阵方程和矩阵的 Kronecker 积以及各种形式的 Kronecker 和来表示系统摄动界的估计。系统镇定设计中,以 Lyapunov 稳定性原理为基础,适当刻画系统中的不确定性,由 Lyapunov 方程和 Riccati 方程的求解得到反馈控制器[36]。对不确定性的不同刻画带来了反馈控制器设计的多样性,也使其成果较丰富。

现代鲁棒控制的继续深入研究,对于控制理论和工程实践具有重要的意义。

1.2 不确定性系统鲁棒最优控制的发展与现状

将鲁棒性概念引入最优控制中便形成了现代鲁棒控制中的一个重要研究领域——鲁棒最优控制。鲁棒最优控制中两个基本的方法是鲁棒 LQ 与 H_∞ 设计，也是本书所要探讨的内容。

进入 20 世纪 80 年代，一些学者纷纷提出了改善 LQG 控制系统鲁棒性的种种方法。Safonov 等[37]，Grimble[38,39]给出了基于多项式求解的 LQG 鲁棒性设计方法，并成功地推广于多变量系统中[40]。该法采用双重准则(dual criterion)选取代价函数，其中包含了对灵敏度和补灵敏度的加权，而加权阵为与频率有关的动态加权函数，提高了系统的鲁棒性及参数灵敏度，且可在不同的频段内满足不同的鲁棒性要求[37]。引入有色噪声和输出扰动模型，实现扰动抑制鲁棒性的提高[32]。Moore 等[41]也曾引入虚拟噪声源以改善 LQG 控制器的鲁棒性。

这种多项式 LQG 方法通过对系统描述和代价函数的推广，使 LQG 设计更具一般性，从而提供了由 LQG 问题描述 H_∞ 鲁棒最优控制问题的可能。Grimble[42]在 LQG 框架下构造假想的 LQG 问题，利用其多项式解给出了 H_∞ 频域优化问题的期望解，所得的 H_∞ 控制系统与 LQG 控制系统在特征多项式、动态代价加权函数上存在极其相似之处，从而初步建立了 LQG 与 H_∞ 设计之间的联系。之后，Grimble[43]进一步将此结果推广到多变量系统。与此相并行的工作有 Kwakernaak[44~46]对 H_∞ 和 L_2 优化问题之间联系的研究。对 minmax 频域优化问题，Kwakernaak 直接最小化关于灵敏度和补灵敏度加权准则的 ∞-范数，从而使扰动抑制系统获得较好的鲁棒性、一定的带宽和补偿器信号的衰减。Grimble[47]分析了 Kwakernaak 的直接法得到的二次型方程与多项式 LQG 方法所得的线性 dipolantine 谱分解方程之间的关系，指明了二者的等价性。另一方面，通过对 1988 年[43]所给的 H_∞ 控制器进行 Youla 参数化[48]处理，进一步阐明了 H_∞ 与 LQG 设计之间的内在联系，即当稳定的 Youla 增益趋于零时，控制器就还原为相应的 LQG 最优控制器，而增益的幅值表明了鲁棒 LQG 与鲁棒 H_∞ 设计之间的差别。

同时，Grimble 又研究了多变量系统中最优 LQG 输出调节器问题的多项式矩阵解[49]，给出两自由度的控制器结构。而当采用反馈控制器优化 H_∞ 鲁棒性能、参考输入控制器实现最小方差意义下的良好跟踪性能时，则提出了能够同时体现对 H_∞ 灵敏度、扰动、跟踪误差方差及控制信号进行加权的代价函数[50]。为对 LQG 设计进行鲁棒性分析，Grimble 等[51]将传统 LQG 控制器结构重组成内模控制(IMC)结构，此结构便于分析各种最优回差传函、控制增益和 Kalman 滤波增益对系统鲁棒性的影响，并证明了运用动态加权函数确实有助于系统鲁棒性的提高。实际中也

已验证了多项式 LQG 方法的有效性，Chol 等[52]通过引入另外两个 dipolantine 方程对多项式 LQG 方法实施一定的改进，成功地将其应用于冷轧钢厂单架上车道轨距的控制，克服了由非圆支撑轧辊引起的偏心轨距波动的不良影响。

鲁棒 LQ 设计的另一分支是基于参数化的 Riccati 方程解的 Riccati 方程法。Grimble[53]，Mosca 等[54]和 Casarolad 等[55]分析了连续系统和离散系统中 Riccati 方程法与多项式法的关系，得到稳态 LQ 调节中二者概念上完全等价的结论。

鲁棒设计的 Riccati 方程方法[31]及由 Barmish[56]提出的系统二次稳定的概念同样也推动了 WHK 设计理论向不确定性系统的鲁棒性设计的发展。Bernstein 和 Haddad[57, 58]，Khargonekar 等[59]及其他学者[60]都取得了一定的结果。Douglas 和 Athans[61]对 Petersen 的 Riccati 方程法重新给予解释，指明其确实是一种不确定性系统的鲁棒 LQR 设计方法，并基于此方法，给出实参不确定性下的鲁棒 LQR 控制器的设计。Mehdi[62]讨论了值有界的参数不确定性系统的鲁棒 LQ 控制器，由最优调节器逆问题熟知的结论证得控制器具 LQ 意义下的最优性。

基于 Riccati 方程的 WHK 设计理论在自身不断发展的同时，因其固有的特点而自然地与 H_∞ 控制理论保持着紧密的联系。Petersen[63]在全状态反馈参数鲁棒性设计中所利用的变形代数 Riccati 方程，为控制器同时满足 H_∞ 扰动抑制约束提供了解释，建立了 WHK 设计与 H_∞ 理论之间的连接。Khargonekar 等[64]对这种连接的进一步探讨，证明了 H_∞ 最优静态全状态反馈控制器与动态全状态反馈可使闭环传函取得同样的 H_∞ 范数下界。这样，Petersen 等[63~65]首次运用 LQ 对策论理论由单一 Riccati 方程的解给出了 H_∞ 标准问题的状态反馈控制解。Petersen 和 Hollot[66, 67]又采用高增益观测器对带有结构不确定性的线性系统给出可稳的状态观测——反馈控制的分离性设计过程，并使系统满足 H_∞ 扰动抑制约束。在二次鲁棒稳定的框架内，Petersen[68]也讨论了动态输出反馈问题，需求解一对解耦的变形 Riccati 方程和一个附加的不等式。在此基础上，Khargonekar，Petersen 和 Zhou[69, 60]建立了二次鲁棒稳定与 H_∞ 控制问题之间的联系。

此外，Bernstein 和 Haddad[58, 59]采用不同的方法得到了较 Petersen[68]更为完整的动态输出反馈解，又进一步给出了满足 H_∞ 性能指标的 LQG 控制设计[70]。其中首次引入了对干扰的双重解释，在 L_2 最优意义下，将干扰解释为白噪声信号，而同时，为达到 H_∞ 衰减的目的，同一干扰又可解释为确定性的 L_2 函数。而在文献[63]~[65]中所考虑的扰动并不具统计模型。文献[70]中在全阶动态补偿设计中，由两个与纯粹的 H_∞ 问题 DGKF 解法[27]中的方程完全一致的 Riccati 方程来确定 H_∞ 干扰衰减增益，与 H_∞ 设计也建立了直接的联系。近期，Savkin 和 Petersen[71]又证明了系统的绝对可稳与 H_∞ 输出反馈之间的等价性，*Moheimani*[72]等给出了相应结论的离散形式。

在系统鲁棒性设计中 Lyapunov 函数也占据着相当重要的地位。Haddad 和 Bernstein[73]通过构造不同的 Lyapunov 函数分别对鲁棒性设计中的小增益定理、正性定理(positivity theorem)、圆形准则(circle criterion)、Popov 准则给予了解释,指出小增益定理和传统的 Lyapunov 函数在处理定常参数摄动上的保守性。而后 Haddad 和 Bernstein[74]又定义了类似于 Barmish[75]和 Leed[76]曾给出过的与参数相关的 Lyapunov 函数,分析其相对于传统 Lyapunov 函数的潜在优势,得到具 H_2 鲁棒性能界的一般性的多变量 Popov 准则。之后,此理论框架又得到进一步的扩展以同时保证定常实参结构不确定性下的 H_2 和 H_∞ 性能[77]。Haddad 和 Kapila[78]还将与参数相关的 Lyapunov 函数应用于鲁棒模型降阶。

Lyapunov 函数法与 Riccati 方程法的结合还产生了鲁棒最优控制中的保证代价性能(guaranteed cost)控制方法[59,79~86]。该法利用固定的 Lyapunov 二次函数建立二次代价函数闭环值的上界,从而保证系统的一定鲁棒性性能。Stoorvogel[82]又证明了具有保证代价性能要求的鲁棒控制问题等价于一类混合 H_2/H_∞ 控制问题。在二次保证性能意义下,Petersen 和 Macfarlane[83]给出的状态反馈和状态估计为最优,而 Chang 和 Peng[79],Bernstein 和 Haddad[59]给出的状态反馈及 Bernstein 和 Haddad[84]得到的状态估计器为次最优。Savkin 和 Petersen[85]给出具满足二次可积约束[87]的结构不确定性的系统保证代价的反馈控制问题解,指出所得的控制器也是 minmax 最优控制器。为研究时变系统的相应问题,Savkin 和 Petersen[86]又引入关于结构不确定性的"平均二次可积约束"概念,由参数化的对策类型微分 Riccati 方程的解得到保证代价的最优状态反馈解。

在二次稳定框架内,一些学者还探讨了鲁棒控制中非线性控制相对于线性控制的优势是否存在的问题。当采用全阶动态输出反馈或全状态反馈时,对于一部分鲁棒镇定问题,这种优势确实存在[88,89],但在某些特殊情况下却并不存在[71,90,91]。当采用定阶动态输出反馈或静态输出反馈时,Savkin 和 Petersen[92]通过对二次储备函数意义下的鲁棒可镇定的定义,表明了非线性时变控制与线性时不变控制之间的等价性。

随着 H_∞ 控制时域综合方法的发展[27,93],人们注意到其中起着重要作用的 Riccati 方程与线性二次对策问题[94,95]和线性指数 Guassian(LEG)问题[96]中出现的 Riccati 方程是一致的,又加之 H_∞ 问题时域上所具有的 minmax 意义,引发了基于线性二次对策方法的 H_∞ 控制问题描述[97],即具二次性能指标的双人零和微分对策[98]。对策的双方分别代表系统中的控制和扰动输入,它们将同时分别最小化和最大化二次指标,依据各自可得信息,由相应的 Riccati 微分方程组的解综合最小化方和最大化方的最优策略。

应用对策论方法,Limebeer 等[99]讨论了零初值条件下的时变系统的有限时间

上的 H_∞ 控制问题，Rhee 和 Speyer[100] 则讨论了非零初值条件下有限时间和无限时间上的时变系统部分信息的 H_∞ 控制问题。Basar[101] 所讨论的是全信息离散 H_∞ 控制问题，Toivonen[102] 求得时变系统有限时间上的数据采样 H_∞ 控制问题的完全解。Shaked[103] 将时变系统的有限时间上的 H_∞ 最优跟踪问题也描述为一个控制中的对策问题，采用微分对策的解法有效地克服了将跟踪问题化为标准 H_∞ 问题来处理时常会出现的因过分强调系统的跟踪性能而造成的系统鲁棒性及 H_∞ 扰动抑制性能的降低[104]。所给之法同时还能解决标准 H_∞ 综合中的另一难题——部分可测扰动的处理。对此难题，Gusev[105] 运用 minmax 优化方法也同样给予了较好的求解，这种 minmax 优化既是 H_∞ 优化的一般性问题，也是 LQ 优化的近似 minmax 问题，是介于 H_∞ 和 H_2 优化控制之间的一种控制问题。文献[106] 鉴于对策论的思想，在 LQG 方法的基础上又提出 maxmin 优化准则来处理 H_∞ 优化设计问题，得到所谓的 LQL(linear quadratic L_2 bounded uncertainties)方法。

此外，对策论方法在 H_∞ 最优滤波中也得到了广泛的应用[107-112]。对策论中的许多观点，特别是零和动态对策为非线性系统的 H_∞ 控制理论的发展也提供了有力工具。Basar 和 Bernhard[97] 采用 Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式表征由闭环增益上界 γ 参数化的零和微分对策的值函数，为未来非线性 H_∞ 控制的研究提供了方向。

基于线性二次对策方法的 H_∞ 控制问题描述不仅简化了问题的求解，也使具有一定干扰衰减性能的 H_∞ 控制器的复杂结构更易于理解。值得指出的是，它还为双人零和动态过程中的信息形式、最优性概念、策略表示的研究建立了对策论、H_∞ 控制理论和风险灵敏度最优控制[93] 之间的联系，使鲁棒最优控制中的几种重要的设计方法得到了有机连接。

在 H_∞ 控制的发展过程中，解的非惟一性使其最优解具有了一定的自由度[113]。一种消除非惟一性的方法是利用超最优的概念，求取超最优控制器[114, 115]；另一种方法是求取最小熵解[116]。最小熵提供了输入输出算子 H_2 范数的上界，Sideris[117] 从回路成形的角度证明了 H_∞ 优化控制问题的最小熵解等价于加权 H_2 优化问题，Mustafa[118] 证明了熵最小化与 Bernstein 和 Haddad[70] 对附加代价的最小化之间的等价性，这些为最小熵解赋予了 H_2/H_∞ 意义上的解释，从而引发了对混合 H_2/H_∞ 控制问题的研究兴趣[119,125]。Doyle 等[119, 120] 对 Bernstein 和 Haddad 的工作进行了扩展，Yeh 等[121] 证明了此工作在对偶意义上与文献[70] 是等价的。Limebeer 等[122] 利用双人非零和 Nash 对策给出混合 H_2/H_∞ 控制问题的状态反馈解。对策中的两个性能指标分别代表 H_∞ 约束和 H_2 最优指标。相对来说，由 Nash 对策所得的一对耦合 Riccati 方程较文献[119]、[120] 中的更易于采用标准数值积分求解。其他关于混合 H_2/H_∞ 控制问题求解的工作还有许多，如 Rotea 和 Khargoneka[123] 利用非线性规

划法通过凸优化来求解，Scherer[124]则根据微分线性矩阵不等式的可解性和秩条件求解时变系统中混合 H_2/H_∞ 控制问题的降阶控制器，Whorton 等人[125]对定阶混合 H_2/H_∞ 设计问题给出了同伦(homotopy)算法。

LQ 问题在与对策论和 H_∞ 控制理论结合发展的同时，其自身也在不断地完善。初期，LQG/LTR 方法[126, 127]的出现解决了因估计器的引入而造成的最优状态反馈中理想回路差特性的丧失，虽对低频段(性能段)实现了有效的补偿，但在高频段只能保留 LQR 设计中的一阶衰减率。为此出现了在控制律中加入高频滤波器[128]，或在输入端加入动态权函数以增广系统的分阶段设计[129]等种种修正方法。Zhang 和 Fu[130]又对 LQR 静态状态反馈所具有的稳定裕度重新给予了解释，指出它们只对某些特定的状态变量集才成立，所以对实际应用中状态变量的选取应慎重对待。而采用较 LTR 方法更为一般的动态状态(或部分状态)反馈以保证一定的鲁棒稳定裕度的设计问题还有待进一步的探索。Shtessel[131]对互联系统提出多准则 LQR 设计，利用各子系统之间的互联关系来改善各子系统的性能，在折衷极小化解求取过程中给出比例损失原则以控制损失相应于每个准则的比例。Jacobus 等[132]和 Halevi[133]等研究了 LQG 设计中稳定控制器的设计问题，前者是事先修正法，后者是事后修正法。Wang 等[134]运用这两种方法给出了 H_2 次最优稳定控制器。另外，Ji 和 Chizeck[135, 136]还研究了跃变线性系统(jump linear system)的跃变线性二次型问题(JLQ)。

LQ 方法因其二次型目标泛函中加权参数有许多选取自由度，所以可被用来实现各种设计目标[137]。Harvey 和 Stein[138]利用低控制费用趋于极限时控制加权与渐近极点位置的关系，适当选择控制加权以获得某种极点配置。Wittenmark 等[139]利用复 s 平面与复 w 平面之间的 Mobius 变换实现满足区域极点配置约束的 LQ 设计。Haddad 和 Bernstein[140]则利用变形 Lyapunov 方程表征各种极点约束区域，给出了满足闭环极点于指定区域，同时最小化代价泛函的静态输出反馈和定阶动态输出反馈。这些方法是对标称系统的区域极点配置，而对不确定性系统并不适用。Wu 和 Lee[141]讨论了满足区域极点约束的 LQ 最优控制在结构不确定性下的鲁棒性，基于 Gersgorin 定理给出结构不确定性的允许界。Garcia 等[142]及 Moheimani 等[143]利用 LMI，给出带有范数有界不确定性的系统圆域极点约束下的保证代价的 H_2(LQ)最优状态反馈控制器。Garcia 等[144]在二次稳定意义下，又考察了带有正实型不确定性的连续和离散系统满足圆域极点约束的状态反馈和输出反馈设计问题。Saberi 等[145]研究了带有定阶观测器结构的 H_2 最优控制器对于闭环极点配置所能提供的自由度及对它的约束，以达到同时极点配置的设计目的。另外，Nicolao 等[146]和 Connolly 等[147]对基于 LQG 方法的窄带宽扰动抑制问题的频域加权(FS)法和扰动模型增广(DM)法进行了深入的研究，指出对于 DM 法，需在指标中引入交

叉项,而对 FS 法,需考虑有色过程噪声和量测噪声。

鲁棒 LQ 最优控制设计不仅在理论上取得了丰厚的成果,在实际中也得到了广泛的应用和发展。设计实例有 Vincent 等[148]对飞机自动控制系统的设计,Fan 等[149]对 B-1 飞行器的纵向运动的控制,Wise 等[150]对飞机中新一代弹出式座椅的控制设计,Lin 等[151]将 Wiener-Hopf LQ 最优控制与定量反馈理论相结合对 F-4E 飞行控制系统的短周期纵向模态的控制,Visse[152]对飞行器遇瞬时风流场的水平逃逸轨迹策略的优化控制等。

在国内,许多学者也开展了鲁棒最优控制方面的研究工作,成果颇丰。文献[153]、[154]在频域研究了最优控制的问题;文献[155]从参数灵敏度的角度对二次型最优控制器进行了研究;文献[156]、[157]继续深入研究了多变量频域鲁棒设计方法;文献[158]~[160]等在 H_∞ 控制理论及应用方面也做了许多有益的工作;文献[161]~[163]对 LQ 设计中的各方面问题也给予了一定的研究;还有其他一些学者的许多工作[164~166]同样促进了鲁棒最优控制理论及其应用在我国的深入发展。

值得欣慰的是,对策论方法通过与其他方法的结合在非线性系统鲁棒控制研究中近期又获得了新的结果。如针对由于 Hamilton-Jacobi-Isaacs(HJI)偏微分方程的不易求解而导致非线性 H_∞ 控制理论未在实际中得到深入推广的问题,Krstic[288]从微分对策逆问题的角度出发,借助输入到状态可稳性(input-to-state stability)的理论结果[289],采用 Legendre-Fenchel 变换和 Young 不等式的广义形式对 HJI 方程的求解进行了分析,证明了输入到状态的可稳性是 HJI 方程有解的充分必要条件,对非线性 H_∞ 问题或更广泛意义上的微分对策问题的求解具有重要意义。Baras[290]则将参数不确定性系统、参数变化范围已知的参变系统和具有界扰动的系统视为一类非线性系统,对此类系统的鲁棒控制给出统一的描述框架,并转化成动态对策问题。特别是对于输出反馈问题,采用信息状态(information state)概念使估计与控制两个过程得以分离,并进一步应用 Whittle 提出的确定性等价(certainty equivalence)准则[291],给出状态估计的反馈策略。确定性等价准则是指对于线性动态系统采用线性观测,则二次代价函数下的最优策略可用 minmax 滤波动态对策和全信息 minmax动态对策的两个独立解求得。Charalambous[292]也采用信息状态方法证明了该准则对于输出反馈 minmax 动态对策问题在采用二次代价或非二次代价函数时仍成立,从而得到了有限维的最优策略,解决了一般的输出反馈 minmax 动态对策问题只能得到无限维最优策略的难题。

可见鲁棒控制虽已发展到了相当成熟的阶段,但还有些问题尚待研究。首先,针对各种不同的不确定性描述方法,在鲁棒稳定性的提高与设计保守性的降低之间的不同程度的折衷处理还需做许多艰苦而细致的工作;其次,鲁棒最优控制及鲁棒镇定中所得到的控制器解在很大程度上依赖于相应的一般性 Riccati 方程解的

存在与求取，而这多年来一直是困扰学者们的难题，如何给出更易于处理的算法将是进一步的理论工作；最后，理论和算法的工程实用化以及实际工程应用方面的研究仍需不断地深入。Ackermann 对鲁棒控制设计问题给出了新的提法：给定由模型结构和参数的范围所定义的对象族，寻找能使闭环稳定的具固定增益的，或只是增益调节的控制器存在的充要条件[167]。这也是为未来的研究指明了一个方向。

1.3 本书的主要研究工作意义、写作思想及内容概要

鲁棒最优控制中，H_∞ 方法尽管其问题提法的理论意义很有吸引力，但其早期的求解过程太复杂，它所借助的算子理论和解析函数的插值理论难于被广大设计工程师所接受，所以 H_∞ 方法未能得到及时有效的推广。考虑到从事实际工作的控制工程师总是希望使用结构简单，尤其是他们所熟悉的 LQG 控制器结构，文献[168] 提出了一个设想：类比 LQG 方法采用时域优化方法来处理 H_∞ 方法所解决的同样问题。根据 H_∞ 方法对于干扰问题的描述及其指标的提法，文献[168] 提出如下时域指标问题：

考虑线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B_1\boldsymbol{u} + B_2\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1.3.1}$$

$$\boldsymbol{y} = C_1\boldsymbol{x} + D_1\boldsymbol{v} \tag{1.3.2}$$

式中，状态 $\boldsymbol{x}\in \mathrm{R}^n$；控制 $\boldsymbol{u}\in \mathrm{R}^m$；干扰 $\boldsymbol{v}\in \mathrm{R}^r$；输出 $\boldsymbol{y}\in \mathrm{R}^l$。

干扰约束为

$$\|\boldsymbol{v}\|_2^2 =: \int_0^\infty \boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t \leqslant \delta^2 < \infty \tag{1.3.3}$$

性能指标

$$J =: \max_{\|\boldsymbol{v}\|_2^2<\delta^2} \min_{\boldsymbol{u}} \int_0^\infty (\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u})\mathrm{d}t \tag{1.3.4}$$

通常 $Q = Q' \geqslant 0$，式(1.3.1)～(1.3.4)可解释为在“最坏干扰下”的最优控制问题。指标(1.3.4)的意义一方面可类比 LQG 方法对 W-H 方法的指标形式的改进，即加入控制约束项可使最优化问题易于求解；另一方面，指标(1.3.4)也可与 H_∞ 问题指标相比，可找到其优化等价代换关系，即对应所得的最优化性能至少不比采用 H_∞ 指标最优化系统性能差[168]。于是，针对 H_∞ 方法中描述的不确定性干扰类问题，采用时域指标(1.3.4)表示后，如同 W-H 方法到 LQG 方法的类比过程一样，可建立一种时域求解 H_∞ 问题的方法，即 LQL 方法[168]。与 LQG 方法的 G 表示 Gauss 噪声对