

二十世紀
之
科學

正中書局印行

二十世紀之科學

自然科學

正中書局印行



版權所有

翻印必究

中華民國四十五年十月臺初版

中華民國六十年六月臺三版

二十世紀之科學（自然科學）

全一冊 基本定價 二元八角

（外埠酌加運費郵費）

編著者 正中書局編審委員會

發行人 李 潔

發行印刷 正 中 書 局

（臺灣臺北市衡陽路二十號）

海外總經銷 集成圖書公司

（香港九龍亞答街一——號）

海 風 書 店

（日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地）

內政部登記證 內版臺業字第〇六七八號（3984）利
（500）

本書編著人

自然科學

周鴻經

戴運軌

張儀尊

陳兼善

李亮恭

張雲

阮維周

王超翔

陳雲屏

張 序

現代文明大體言之，就是科學文明。中國之現代化扼要言之，就是中國之科學化。科學是什麼？科學進步從何而來？作者想提出下列四點，簡單加以說明。

(一)有計劃之實驗

科學研究爲西方文化之特色，自希臘時代而已然。希臘人爲理論家，後世關於宇宙的學說，多淵源於希臘：如原子學說及萬物皆變之說，皆能言之成理，而不悖於事實。希臘人於幾何學多所發明，無幾何學與演繹法，則近世科學之萌芽爲不可能。但希臘人對於科學的貢獻僅爲片面的，由觀察個別事實以應用歸納法，非其所長。科學上歸納法與實驗之廣爲應用，實爲最近四百年來之事。英人哈維(William Harvey)於一六二四年(明天啓四年)發明血液循環之學說，他所以能有此創獲，實由於他的理論能用實驗予以證明。培根(Francis Bacon)爲近代歸納法之建立者，因實驗冷藏法受寒而死，時在一六二六年(明天啓六年)。

科學家從事工作，演繹法與歸納法必須兼顧並重，方收相得益彰之效。至於有計劃之實驗，乃歸納法最有效的工具，而爲中國古時所最感缺乏者。愛因斯坦於一九〇五年發明相對論，其數學表式毫無矛盾，惟以推理結果與傳統見解相反，故驚人耳目。至一九一九年，相對論經日蝕之觀察而完全確立。相對論之價值，不僅在其理論之精闢，而尤在其有事實之證明。由理想的推論，而得外物之確證，此誠科學家最大的欣慰，抑亦人類思想無上的光榮。科學上新的發明，顯非事前所能預料。而每一新的發見，往往又爲未來繼續不斷的新發見之契機。

各種科學都是爲宇宙間種種經驗、知識、與事實，憑藉着謹嚴的實驗與精密的理論，使之條理融會，而構成日新又新、精益求精的學術系統。例如原子學說的發明，就是利用若干極精妙的儀器，用極精確的實驗，並經理論的嚴密分析，終於逐漸披露了原子的祕奧。故現代科學又稱爲實驗科學。理論原係工具，定律皆係人爲。起先提出了一些假說(Hypothesis)，隨後根據實驗結果，不斷地證明這些假說

的確實性，終於形成爲科學的理論。實驗研究與理論研究係通力合作，互相領導。確定事實，責在實驗；整理思想，責在理論。由新實驗引起新學說，復由新學說引起新實驗；本不倦之工作，爲有恆之前進，洩造化之神奇，發千古所未發，向着吾人理智所能想像而永無止境的境界而發展，這就是自然科學最大的特色。

(二)大規模之組織

歐洲自十七世紀開始，高深的學術研究就不復限制在大學裏，新成立的學術團體，發榮滋長，蔚爲鉅觀。例如義大利佛羅梭斯的研究院及英國的皇家學會，均在十七世紀中葉成立，從事於證明與實驗工作。三百年來，大學的研究院所與政府設立的研究機構，密切聯繫配合，成爲現代科學的發祥地。世界若干著名大學，其研究生人數往往不下於一般大學生。識者謂二十世紀學術上最大的發明，就是發明如何研究的方法。這些方法中間，一個最重大的貢獻，即爲研究院不斷的充實和改進。可以說，研究院是現代的人文淵藪。人類文化進展的程度，即視乎研究院進展程度以爲衡。

*現代科學的邁進，都是積人積世而成，決非一手一足之烈。愛因斯坦曾說：「我的身心乃古今人類無數恩澤積聚而成，我的作品得力於他人之工作成就者又何等深厚！」此即古人所謂取精用弘，以及集大成的意思。科學研究一面求精，一面求博。博觀約取，似相反而實相成。任何部門的科學工作，皆有賴於羣策羣力，共同研究，而成爲一種大規模的事業。在人類的組織中，很少能與科學研究的組織相比，由嚴密的分工合作而產生極豐盛的果實。我們也承認，現代科學有其非常的差異性與專門性。各種研究的實驗設計與其結果的解釋，處處受到個人觀點的影響。任何創造性的科學工作，都帶有一些主觀的成分，這是無可避免的事實。可是在科學上，一種探求或一項課題，不問其爲如何專門，如何深奧，其研究的方法與歷程，一定是可以坦白記述，公開發表，以期使人共喻，並使別人可以覆按而加以校正。這就是現代科學的特徵。

社會科學爲十九世紀後半期的產物，至二十世紀，而與純粹科學齊驅並進。實驗科學研究的對象爲自然界，社會科學研究的對象爲人羣，其目的即在發現各種

社會現象的關係。前者又稱自然科學，後者又稱人文科學，如社會學、經濟學、政治學等皆屬之。兩者對象雖有不同，但其應用科學方法研究客觀事實的真理，則完全一致。科學之任務為一種促進思想之動力，猶機器為運用物質之動力。如不違反科學方法，則此思想機械對任何材料均可獲致正確之結果。我們固知人事之複雜特甚，且無時不在演變之中，精確之度量與紀錄皆所不易，分析多不完全，公律多屬假定，而覆證之試驗有時亦感難於着手。故欲預測社會現象，自不及預測自然現象之準確。但社會科學之推理方法，尙可使之更為嚴密，而與自然科學更為接近，要在當本於知之為知之精神，勿以私見蔽證據而已。如近來經濟學注意統計與數量之研究，即可表示社會科學之新趨勢。或謂研究社會科學不能常處於客觀地位，有時必須指示改善人生之途徑，是其目標顯為倫理的。實則社會科學所代表者亦祇為真理，真理雖可產生實用之結果，但實用性不必即為社會科學之特徵。現代學術研究注重分工和專精，但各門科學方法與精神則完全一致，其最後目的即為建設完整統一的思想體系。

(三)由應用求進步

科學為工業之母，反過來說，工業製造精進不已，對於科學發展也有推進的功效。因為現代科學研究，需要有高度的技術和精密的儀器。據實言之，若干科學研究機構，就其規模與設備而論，彷彿就像一個龐大的工業機構。世界第一流的天文臺，集巨大之遠鏡，與精緻之機械，以分析來自太陽系以至距吾人八十億光年處之光線，非在工業先進國家，就不易自製此項儀器。又如人類心臟活動狀況，因有電流計之發明，而有忠實之紀錄，其靈敏度極高，於是心臟內部之動作，得以呈現於吾人目前，以供觀察。其對心臟研究之珍貴貢獻，固無待言。其他各門科學，因儀器與技術的有效運用，而使科學研究有長足的進展者，不勝枚舉。原子時代的出現，考其原因，固由於理論概念之嚴密分析，實驗方法之不斷改良，而亦有賴於先發明了若干非常巧妙的儀器，使能逐漸透露原子結構的祕奧，故終能成為現代科學曠古未有的偉大貢獻。科學家着眼之處，當在各種事實連絡之關鍵，而此種樞機往往隱藏於深處，自非深入宇宙內層，窮索其潛在的本質，不能有所心得。科學是人類

求進步的努力，要在智慧與技術力求上進，而智慧與技術的新發展，都是永無止境的。

科學研究雖不含有實用的動機，而其結果，每一新的真理的發見，對於人類行為與人類社會的問題，都有無窮盡的影響。孔德所謂「科學乃先見，先見即權力。」國父倡導知難行易學說，嘗謂一切真知特識，必自科學而來。具有新的智慧，方有新的技術，而產生新的權威。科學旨在了解自然，其究竟目的為知行合一，知之目的在於實行，然行之目的仍在求知——即培根所謂於行動中而洞悉自然。可是，利用厚生之成績，能使多數人對科學易於了解，自亦不能忽視。赫胥黎嘗云：「應用科學非他，即純粹科學之應用於實際問題者是已。」新學理創造新工具，新工具亦能保證新學理之成功。科學最後的歸趨，必為純粹研究與實際應用的互相結合，互相推進。

美國文化的最大貢獻，在於科學與工業打成一片。科學研究的本身在美國無異是一種重大工業，需要浩大的投資。美國工業家對於科學研究有極清楚的認識，不惜耗擲巨資以供科學實驗之用。大致說來，自然科學的基本進步是大學與研究所的責任，至於應用科學與技術應用，大都來自政府機構與民間工廠的實驗室，而在第二次大戰中可以看到兩者的合流。原子時代的出現，美國居于領導的地位。將來原子能和平用途研究的展開，勢足以使整個世界發生空前未有之變化。世界大同的宏規遠模，已由此而透露出文化的曙光。

(四)為和平而盡瘁

一七八一年(清乾隆四十六年)蒸氣機應用到紡織工廠，使紡織業起了革命，這正在美國獨立戰爭時期。在沒有人注意到的深刻變遷中，北美合眾國與不列顛之間形成了新的關係，美國棉花在英國蘭開夏郡(Lancashire)的紡織廠裏製成布匹後暢銷全球。過去紡織廠有賴於水力的發動，所以好多工廠都是靠近瀑布地帶，往往與城市相去很遠，至今還可看到這些古老的遺址。自從蒸氣機應用以後，新的工業城市，有如雨後春筍，而使英國人口與社會發生重大變遷。一八二九年(清道光九年)英人斯蒂文遜(George Stephenson)發明了鐵路，於是舊日交通歷史告一

結束，而揭開了嶄新的時代。各種新的交通技術使距離日益縮短，人類有不斷增加的運輸力，有更多的財富，科學家自強不息的精神亦益受鼓勵而發揚光大。

二十世紀稱為電世紀，電報、電話、電影、廣播、電視之類，層出不窮地賜與人類以幸福。物質文明突飛猛進，其影響於人類精神生活者至深且鉅。第一次世界大戰發生以前，大家都已承認，貧窮的男女工人都有權利從公家的財政獲得最低限度的人生享受。西洋自羅馬帝國衰亡以後，各國政府從未如此為人民的公益而悉心規劃，人類康樂的程度亦從未有如此得到普遍的滿足。一國人民精神上的資源和貢獻，立刻傳播到其他國家。例如英國的音樂與戲院的民歌，隨即變成了世界各國共同的文化產業，其他可以類推。

科學在平時為促進和平而努力，戰時更為保障和平、恢復和平而盡瘁。一九四五年六月十六日，在美國新墨西哥省的沙漠地帶中，首次作原子炸彈的實地試驗，現已於該地設紀念碑，無疑的這是二次大戰中一個極可紀念的地點。美國前陸軍部長史汀生關於原子炸彈的文告有云：「此項實際研究的幕後，為美國科學驚人的貢獻。我國科學家孜孜研究，其輝煌的成績及其對於國家的效忠，任何讚譽不致過當。世界各國戰時科學研究收效之宏，均無逾於美國。我科學界人士與工業界及軍事當局密切合作，俾此計劃，臻於美滿結果，全國人民均願致其無上感佩之忱。」科學研究是近代文明的淵源，富國之道在此，強兵之道亦在此。史汀生曾謂世界二次大戰若明其底蘊，可稱為「實驗室之戰爭」，能於科學發明爭機先者，即佔優勝。

美國康普敦博士 (A. H. Compton) 嘗謂：「科學非僅以試驗管與電子為盡其能事也，科學之任務又在人與事事物物之各得其所，以解決人生問題。」現在核子科學之研究，使宇宙真理輝煌照耀，而十九世紀粗陋之唯物論，已變為陳腐不堪。英人秦斯 (Sir J. H. Jeans) 有曰：「心與物已被發現同屬於一系統，從笛卡兒以來，哲學上感覺困擾之二元論，已不復有立足之餘地。」二十世紀之物理學因原子說之成功，而減少其物質之意味；心理學亦因生理學之進步，而減少其心性之意味。兩者相向而趨，心物之分不復存在。無所謂物，無所謂心，惟事 (Event) 而已。是謂中立一元論 (Neutral Monism)，亦可稱為「惟事論」。總統的「力行哲學」與惟事論，可謂心同理同，完全一致。原子時代的新思潮，對於共產主義荒謬的思想，已經收到

了拔本塞源、滌蕩肅清的功效了。

原子知識是人類未來生活的必要常識，而原子時代新文化的源泉，即在於現有的科學研究實驗室。因此我們對各級學校的科學教育與技術訓練，應特別予以重視。據美國「生活」周刊報告，十年以後（一九六五），因原子能和平用途之展開，美國需要核子工程學家人數將達一萬五千人。其他國家也都在設法使學術文化與原子時代相適應。在高度工業化的國家如英美等國，均尚感優秀科學教師之缺乏，遑論其他。我們目前教育上最重要之問題，即為如何引起青年研究科學的興趣與志願，我們又須注意社會教育與成人教育，普及科學常識，發展科學思想，使科學能深入於民間。我中華民國自有光明燦爛的遠景，而中興建國的康莊大道，則為科學與人文冶於一爐之通才教育。

張其昀

梅 序

二十世紀可以說是科學發展最廣進度最快的一個時期。在前半世紀，尤其最近十餘年的成果，已竟使人震驚，甚或感到眩惑。其後半世紀的演進，此時雖難多作預測，但必有根本上很重要的新理論的創立，並且根據此種新理論，在應用上亦必有很重要的發展，則似乎可以斷言。

世界上不幸而有戰爭，在二十世紀的前半，人類竟遭遇到兩次世界大戰。但是此兩次慘禍的後果，亦有可以使人稍為慰藉的，即是自然科學，因為競爭努力，確得到很多很大的進步。第一次大戰以後，最重要的科學進展以流體力學與電子學方面，貢獻最多。第二次大戰促進原子核的研究，這是人人皆知的。其實原子核的理論，自十九世紀末期，即有物理學家注意研究。但進步較緩，或因為大家認為屬於純理論的範圍，不切實用，或因為研究設備不充足，不能有重大發展。直到第二次大戰中間，以世界上最大強國的人力物力，集中研究試驗，始造成了頭兩個原子彈，使亞洲戰爭迅速結束。這兩個原子彈的爆炸，亦可以說是科學新紀元開始的信號。

原子科學研究的應用，除卻戰爭武器範圍以外，在和平用途上，現在已可使人類得到很多的新材料新方法。而在學理方面，由於原子核質點現象的研究，使許多有關的科學理論，即或是二三百年來認為確定不易的，亦須重新檢討，重加估定。今日因為新的材料還在繼續的發現，完整的系統的新理論，似還須待相當時期以後。但其目前影響所及，已足使自然科學各部門，都從這新方向，尋求新的途徑，探討研究。在未來的四五十年間，其成就實未可限量，較比前一世紀的進步，必定更精闢更偉大，而人類在生活上亦必將受到更多的裨益。

在這世紀過了一半的時期，正中書局創編「二十世紀之科學」，請多位專家，將自然與應用科學各部門分為介紹，確是很有意義，很應時代需要之舉。況且各位作者都是研究有素，造詣淵深。這前面幾句話，勉強作個小引，希望讀者不必太注意。要知道二十世紀科學燦爛的內容，請趕快繙看諸位先生的大作。

梅 貽 琦 四十五年十月十日於臺北

二十世紀之科學

自然科學

目次

二十世紀之數學 周鴻經譯

第一節	代數 數論 羣論	(數 2).....2
第二節	解析學 位相幾何學 幾何學 數學基礎	(數 12)..... 12

二十世紀之物理學 戴運軌 23 |

二十世紀之化學 張儀尊

緒論	(化 1)..... 40
第一節 歷史的背景	(化 3)..... 51
第二節 原子結構和原子彈	(化 11)..... 59
第三節 原子核化學	(化 18)..... 66
第四節 二十世紀的理論化學	(化 22)..... 70
第五節 有機化學的進展	(化 33)..... 81
第六節 生物化學	(化 49)..... 97

二十世紀之動物學 陳兼善

前言	(動 1).....103
第一節 十九世紀的動物學	(動 1).....103
第二節 二十世紀的動物學	(動 5).....107

二十世紀之植物學 李亮恭

第一節 導言	(植 1).....151
第二節 植物形態上的基本問題	(植 5).....155
第三節 植物解剖學的新境界	(植 9).....159
第四節 原子時代的植物生理學	(植 14).....164
第五節 植物分類的新趨向	(植 36).....186
第六節 植物學的應用	(植 39).....189

二十世紀之天文學 張雲

引言	(天 1).....	193
第一節 近代發展過程述要	(天 1).....	193
第二節 光度與遠鏡	(天 5).....	197
第三節 一顆最近的恆星—太陽	(天 14).....	206
第四節 恆星通性與銀河系	(天 21).....	213
第五節 河外星系	(天 34).....	226
第六節 電波天文學	(天 40).....	232

二十世紀之地質學 王超翔 阮維周

第一節 什麼是地質學	王超翔.....(地 1).....	239
第二節 歷史的一段回顧	阮維周.....(地 8).....	246
第三節 岩層中的史料	王超翔.....(地 14).....	252
第四節 大陸的成長	王超翔.....(地 18).....	256
第五節 地史的輪廓	王超翔.....(地 23).....	261
第六節 大陸邊緣	王超翔.....(地 32).....	270
第七節 海洋深處	王超翔.....(地 36).....	274
第八節 尋求地殼變動之源	王超翔.....(地 41).....	279

二十世紀之心理學 陳雪屏

第一節 前言	(心 1).....	287
第二節 實驗心理的開始	(心 4).....	290
第三節 研究範圍的擴大和方法的改進	(心 9).....	295
第四節 心理學的應用	(心 19).....	305
第五節 結語	(心 32).....	318

二十世紀之數學

Hermann Weyl 著
周鴻經 譯

(一)緒論 公理系統

除天文學外，在所有的科學中，數學是最年長的。一個人如若不知道前幾代以及古代希臘所發現與擴展的概念、方法、與結果，就不能了解過去五十年數學的目標與成就。數學被稱為無窮的科學；的確，數學家發明有限的構造，性質涉及無窮的問題由是決定。那是數學家的光榮。克爾克格得 (Kierkegaard) 有一次說過，宗教無條件討論與人有關的事。相反地（不過同樣言過其實），我們可以說數學討論與人毫不相干的東西。數學有同星光一樣的超凡性質，他燦爛、銳利、而無熱情。但是，這似乎是造物的顛倒，人的心靈知道他怎樣能處理的更好，如若他所探討的東西與他生存的中心距離更遠。因此，我們在知識關涉最少的地方最聰明：如在數學中，尤其是在數論中。在任何一門科學中，就精審與複雜言，沒有能與數學中的理論——如代數極場的理論——相倫比的東西。儘管在本世紀中，物理學的發展像一道洪流沖向一個方向，數學則與尼羅河三角洲相類似，他的水道伸向各方。祇要看數學歷史之悠久，品格之超俗，門類之多，變化之繁，要想將過去五十年數學家的作為作一顯豁的報導，幾乎是一件不能希望的事。在本文中，我所能勉力去做的，先略述此時期中數學發展的一般趨勢，接着詳細說明此時期中所產生最出色的數學觀念，並列舉比較重要且已被解決的數學問題。

在二十世紀中，數學的最顯著表現之一是公理系統愈來愈重要。儘管公理系統以前

祇用於奠立數學基礎，現在已經成為具體的數學研究工具。他在代數中的成就最大。一看實數系統就可以知道。他像詹納 (Janus) 的頭一樣，有兩面對着兩個方向：一個方向是代數運算加與乘的區域；另一個方向是連續複合形，其各部分互相接合，以免彼此孤立。一是代數的，另一是數的位相面。近代公理系統是如此頭腦簡單（與近代政治相比較），他並不是將和平與戰爭混為一談，而是將兩方面清楚地予以分開。

要想了解數學的複雜情況，最好就其性質將數學的各方面分開，使每一方面祇包含一羣比較窄狹而容易檢討的觀念，以及由這些觀念所得來的事實，最後再適當地將各部分聯合而歸成總體。最後的綜合是機械的。技巧在前一段，即在適當的分割與總括之分析。前十年的數學沉潛在總括與形成之中。如若有人以為總括的目的就是總括，即不能了解此一趨勢。真正的目的是簡化：每一自然的總括皆可以簡化數學的內容，因為他將已有的設理減少。總括與分割是由什麼組成的，頗不易說。對於這一點，除了豐富的收穫之外，並無別物可作最後的裁判：成功決定一切。按此程序，各個研究者多少都要受顯著的類似結果和天生的識別精華的能力所領導，這是從以前累積的研究經驗所獲得的。在整理系統的時候，步伐不期然而然地走向公理的研究。此時我們所說的基本觀念與事實變為含有這些觀念與事實的無定義名詞與公理。現在我們可以處理從這些假設成立的公理所推演出

來的一羣陳辭，並不祇是在作觀念與公理之抽象的時候，而且在我們解釋將公理變為真實陳辭的基本名詞的時候。解釋衆多，題材遠異，乃是常見的事。

顯然各別的範圍之內部關係，可由公理的研究予以揭發，各範圍內的方法，可由公理的研究予以統一。幾門數學彼此結合成為一門的趨勢是數學近代發展的另一種顯著現象，與相反方面公理化的趨勢並肩前進。就像一個人人生在一種環境之中，並不是這種環境適合他，而是他在這種環境中已養成不能動搖的習慣和偏見，現在我們將他從此環境中領出來，在他獲得自由之後，讓他作更合於他的天性的聯合。

我不想用誇張之詞去說明公理方法的重要。如若沒有新發明的建造方法，數學家皆不能了解的很多。適當地說，公理系統與建造交互影響。試以代數為例。代數在本世紀中才脫離數的普遍系統的羈絆而獨立，在以往，這個數的普遍系統則是一切數學運算以及一切物理度量的基礎。在新得自由的代數中，無數種

類的「數場」已被研討，每一數場皆可作為一種運算的基礎；沒有人想將他們安放在一個系統 Ω 之內。公理限制數的概念的可能性；建造的方法產生出滿足公理的數場。

代數就這樣脫離他的主人（解析）而獨立，而且在幾門數學中他又成為主人。數學的這樣發展，與物理學之由正統物理學發展為量子物理學，差不多可以平行，因為量子物理學將可察物的系統或量的系統各歸於其物理結構。這些量遵守加法與乘法二代數運算；但因為他們的乘法不合交換定律，他們當然不能化為普通的數。

1900年希爾柏（David Hilbert）在巴黎世界數學會議中說過，問題是科學的生命之血；他提出來二十三個沒解決的問題，希望在二十世紀數學的發展中能扮演重要的角色。我們數學家常常看希爾柏所提出的那一個問題當時已被解決以測量數學的進步。此處若用希爾柏所列的表作為檢討的根據，很可引人入勝。我沒有這樣做，因為這樣做就須要講的很多。應請讀者原諒。

第一節 代數 數論 羣論

（二）環 場 理想數

講到此處，如若我不用一些最簡單的代數觀念去說明公理系統，我就不能講下去。有一些觀念同美蘇賽拉（Methuselah）一樣古老。就我們所知道的說，還有比自然數列更古老的麼？兩個自然數 a, b 可以相加與相乘（ $a+b, a \cdot b$ ）。創造數的次一步驟是將負整數與零加入正整數之中；在如此創造出來的

較寬廣之系統內，加法有唯一的逆算法，就是減法。我們並不就此停住：我們再將整數放進更寬廣的有理數（分數）系統。在有理數系統內，乘法的逆算法（除法）成為可能，祇有以零為除數是顯著的例外（因為對每一個有理數 $b, b \cdot 0 = 0, 0$ 沒有合於 $b \cdot 0 = 1$ 的逆數 b^{-1} ）。現在我將關於「加」與「乘」的基本事實寫成公理，列為下表：

T 表

(1) 加法交換律與結合律,

$$a+b=b+a,$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

(2) 乘法交換律與結合律,

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

(3) 加乘分配律,

$$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

(4) 減法公理: (4_1) 對每一個 a , 有一元素 0 , 「零」合於 $a+0=0+a=a$. (4_2) 對每一個 a , 有一數 $-a$ 合於 $a+(-a)=(-a)+a=0$.

(5) 除法公理: (5_1) 對每一個 a , 有一元素 e (1, 「一」) 合於 $a \cdot e = e \cdot a = a$. (5_2) 對每一個非 0 的 a , 有一數 a^{-1} 合於 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

由 (4_2) 與 (5_2) , 我們可以引入差 $b-a$ 與商 b/a , 前者用以表 $b+(-a)$, 後者用以表 $b \cdot a^{-1}$.

在希臘人發現正方形的對角線與一邊之比 $(\sqrt{2})$ 不能用有理數度量的時候, 數的概念須作更進一步的推廣。但是連續量的一切度量皆祇能是近似的, 常有若干差誤。因此, 有理數, 即使是十進小數, 祇有在被解釋為近似數的時候, 才可作度量之用, 而近似數的計算似乎是所有度量科學合用的數值工具。但是, 為次一步精密度量用的數學不能不有準備。例如討論電的現象, 如若我們能討論電子的電荷 e 的近似值, 我們已可滿意, 實驗科學家已經定出一個電荷 e 的正確數值的近似值, 甚為精密。從柏拉圖的時候起, 到十九世紀末年止, 兩千餘年之間, 數學家造出一個正確的數的概念 (即實數的概念), 成為自然科學理論的基礎。直到今天, 此概念中所包含的邏輯問題尚未被完全研究清楚。有理數祇是實數的一小部分。實數之滿足我們的公理同

有理數一樣, 不過實數系統有某種完備性而為有理數系統所無。這就是他們的「位相」形態, 乃為無窮和等以及一切連續論證之所根據者。以後將再詳論之。

最後, 在文藝復興時期, 複數已被引入數學。就本質言, 複數 $z = (x, y)$ 就是成對的實數 x, y , 就是被定義合於加法乘法公理的成對實數。根據定義, $e = (1, 0)$ 成為單元, 而 $i = (0, 1)$. 則滿足方程式 $i \cdot i = -e$. 一對數 z 中的 x 叫作 z 的實部, y 叫作虛部, 而 z 則常被寫為 $xe + yi$, 或簡寫為 $x + yi$. 複數的功用, 在每一個方程式 (係數是實數或複數) 在複數場內可解。複變數的解析函數為一內容豐富而和諧的論題, 這是十九世紀正統解析學的代表作。

若一組元素的運算 $a+b$ 與 $a \cdot b$ 滿足公理 (1) — (4), 此組元素叫作環; 若公理 (5) 也成立, 則此組元素叫作場。例如平常的整數成一環 $\mathbb{I}$; 有理數成一場 ω ; 實數成一場 (Ω) , 複數成一場 (Ω^*) . 但是, 這不是僅有的環或場。所有可能有的 h 次多項式

(1) $f = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_hx^h$, 若其係數為一已知環 R 內的元素, 叫作「 R 內的多項式」, 成為一環 $R[x]$. 此處的變數或未定數 x 被看為空洞的符號; 多項式祇是他的係數所成的數列 $a_0, a_1, a_2, \dots$. 但是將他寫成常用的形式 (1) 之後, 就可以看出多項式的加法定律與乘法定律, 此處不再重述。若將變數 x 換為 R 內的一個定元素 γ (「數」), 或換為以 R 為子環的環 P 內的一個定元素, 則 $R[x]$ 內的元素 f 易為 P 內的元素 α , $f \rightarrow \alpha$: 多項式 $f = f(x)$ 變為 $\alpha = f(\gamma)$, 此寫像 $f \rightarrow \alpha$ 名叫準同型寫像, 這就是說, 他保

持加法與乘法。事實上，於 x 被換為 γ 時，若多項式 f 變為 α ，多項式 g 變為 β ，則 $f+g$ 變為 $\alpha+\beta$ ， $f \cdot g$ 變為 $\alpha \cdot \beta$ 。

若一環內二元素的積，除有一個因子為零時，永不為零，我們說此環沒有零除子。以前所說的環皆是此類的環。場一定是沒有零除子的環。以由整數求分數為例，可知任何一有單元而無零除子的環 R 可安放在一場 k (商域)之內，使 k 內每一元素為 R 內二元素 a 與 b 的商 a/b ，其中的分母 b 不是零。

將 $a, a+a, a+a+a, \dots$ 等寫為 $1a, 2a, 3a, \dots$ ，我們用自然數 $n=1, 2, 3, \dots$ ，為一環內或一場內的元素的乘數。設此環沒有單元 e 。也許 e 的某一倍數 ne 等於零；由此我們可以知道，不論 a 是此環內的那一個元素， $na=0$ 。若此環沒有零元素，例如他是一場而 p 是此場內合於 $pe=0$ 的最小自然數，則 p 必定是像 2，或 3，或 5，或 7，或 11 那樣的素數。於是我們將素標數 p 的場與素標數 0 的場分開，在這樣的場內， e 的倍數永不為零。

將整數畫為一直線上等距離的點，令 n 是 ≥ 2 的自然數，而將此直線捲在一圓輪的周邊上。於是若任何二點 a, a' 相合，則其差 $a-a'$ 可被 n 除。[數學家寫為 $a \equiv a' \pmod{n}$ ；他們說 a 與 a' 以 n 為模數等餘。]應用此法，整數的環 I 變為祇有 n 個元素(輪周上的點)的環 I_n ，可以 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 為餘數。事實上，等餘的數在加法與乘法之下有等餘的結果： $a \equiv a', b \equiv b' \pmod{n}$ 包含 $a+b \equiv a'+b', ab \equiv a'b' \pmod{n}$ 。例如，若模數是 12，我們有 $7+8=3, 5 \cdot 8=4$ ，因為用 12 除 15，得餘數 3，用 12 除 40，得餘數 4。環 I_n 並不是

沒有零除子，因為 $3 \cdot 4$ 可被 12 除，但 3 與 4 皆不能被 12 除。但是，若 p 是一個自然素數，則 I_p 沒有零除子，而且是一場；就像古代希臘人用聰明方法(歐幾里得的算法)所證明的，對於任一個不能被 p 除的 a ，有一個 a' 合於 $a \cdot a' \equiv 1 \pmod{p}$ 。此歐氏定理是全部數論的基礎。此例說明有任一已知素標數 p 的場。

在任一環 R 中，我們可以像下面這樣加入單位與素元素的觀念。如若 a 在環內有一倒數 a' ，合於 $a \cdot a' = e$ ，則元素 a 叫作環的單位。若元素 a 可以分為兩個因子 $a_1 \cdot a_2$ ，而這兩個因子皆不是單位，則 a 叫作合成數。不是單位也不是合成數的數叫作素數。 I 的單位是 $+1$ 與 -1 。場 k 內多項式的環 $k[x]$ 的單位是 k 內異於零的元素(0 次多項式)。依照希臘人所發現 $\sqrt{2}$ 的無理性，多項式 x^2-2 在環 $\omega[x]$ 內為素元素，但是，在 $\Omega[x]$ 內， x^2-2 當然不是素元素，因為他可以分為兩個線性因子 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ 。歐氏算法也可以用於任一場內一變數的多項式 $f(x)$ 。因此他們合於歐氏定理：在環 $k[x]$ 內已知一個素元素 $p=p(x)$ 及 $k[x]$ 內不能被 $p(x)$ 除的一個元素 $f(x)$ ，則在 k 內有另一多項式 $f'(x)$ ，使 $\{f(x) \cdot f'(x)\} - 1$ 可被 $p(x)$ 除。 $k[x]$ 內任二元素 f 與 g 的合一，因其差可被 $p(x)$ 除，將環 $k[x]$ 變為一場，“以 p 為模數， $k[x]$ 的餘數場 κ ”。例如 $\omega[x] \bmod x^2-2$ 。(模數可視為 $\Omega(x) \bmod x^2+1$ 的餘數場的元素。)很奇怪，基本的歐氏定理對於兩個變數 x, y 的多項式並不成立。例如 $p(x, y) = x-y$ 是 $\omega[x]$ 的素元素，而 $f(x, y) = x$ 是不能被 $p(x)$ 除的元素。但等餘式