

21世纪高等学校数学系列教材

# 高等数学

GAODENG SHUXUE

上

湖南省21世纪数学系列教材编写组

总主编 黄立宏

主审 庾建设



北京邮电大学出版社  
www.buptpress.com

21 世纪高等学校数学系列教材

# 高等数学

(上)

湖南省 21 世纪数学系列教材编写组

主编 黄立宏 周展

主审 庾建设

北京邮电大学出版社

## 内 容 简 介

本教材是在面向 21 世纪数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下,由湖南省 21 世纪数学系列教材编写组的编者根据多年的教学实践经验,结合《高等数学课程教学基本要求》编写而成的。

本书分为上、下两册.上册含集合与函数、函数的极限和连续性、一元函数的导数和微分、一元函数微分学的应用、一元函数的积分、定积分的应用、常微分方程、无穷级数、积分表等内容.下册含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数微分学的应用、多元函数积分学、对坐标的曲线和曲面积分、向量函数与场论、傅立叶分析等内容.每章均配有习题,书末附有习题参考答案,便于教与学.

本书可供综合性大学、高等理工院校、高等师范学(院)校(非数学专业)学生使用.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上/黄立宏,周展主编.一北京:北京邮电大学出版社,2003

ISBN 7-5635-0634-9

I.高... II.①黄...②周... III.高等数学—高等学校—教材 IV.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 067789 号

---

书 名: 高等数学(上)

策 划 人: 荣 华

主 编: 黄立宏 周 展

责任编辑: 陈露晓

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(100876)

电话传真: 010-62282185(发行部)010-62283578(FAX)

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 国防科技大学印刷厂印刷

开 本: 787mm×960mm 1/16

印 张: 21.25

字 数: 364 千字

版 次: 2003 年 8 月第 1 版 2003 年 9 月第 2 次印刷

---

ISBN 7-5635-0634-9/O·47

定价(上下册):48.00 元

如有质量问题请与发行部联系

版权所有 侵权必究

# 21 世纪高等学校数学系列教材

湖南省 21 世纪数学系列教材编写组

总主编 黄立宏

高等数学(上)	主编	黄立宏	周展
	主审	庾建设	
高等数学(下)	主编	高纯一	周勇
	主审	黄云清	
线性代数	主编	刘金旺	夏学文
	主审	刘振海	
概率论与数理统计	主编	韩旭里	杨润生
	主审	邹捷中	

## 序

为了适应“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的需要,湖南省多所高等学校的数学行家们,在湖南省数学学会的指导下,根据“教育部高等院校工科数学教学大纲”的要求,编写并推出了这套数学系列教材,该系列教材包括《高等数学》(上、下)、《线性代数》、《概率论与数理统计》。

数学是严谨的科学,数学教学不但要教给学生数学知识,培养学生应用数学知识解决实际问题的能力,还要提高他们的数学修养,养成良好的思维品格。一套好的教材无疑是达到上述目标的基本条件,本套教材就是遵循这一目标而编写的。

与其他教材相比,本套教材具有以下几个明显特点:

### 1. 科学性

内容安排上由浅入深,符合认知规律,理论严谨、叙述明确简练、逻辑清晰,尽可能通过实际背景引入数学概念,便于学生理解和掌握。

### 2. 先进性

本套教材充分考虑了内容的更新,选入了一些新颖的、能反映相应学科的新思想、新趋势的材料,充实教材内容,以适应教育发展和教学改革新形势的需要。

### 3. 适用性

教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具。所以本套教材对概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排,以及例题、习题的选配等方面,都是从教学的实际要求出发而做出的,使其遵循教学活动自身的规律性,方便教师教与学生学。

参加本套系列教材编写的作者们都是多年从事数学教学和研究的教授、学者,他们紧紧扣住教学大纲的要求,密切联系工科院校数学教学的实际,认真研究了国内各种版本的同类教材,取长补短,编出了新意和特色。相信这套教材在数学教学和教学改革中定能发挥相当的作用,同时也希望它在教学实践中不断地完善。

应作者之嘱托,谨作此序。



## 前 言

数学是科学和技术的基础,数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用.高等学校作为培育人才的摇篮,数学课程的开设也就具有其特别重要的意义.

近年来,随着我国高等教育的迅速发展,湖南省高等教育也进入了一个飞速发展时期,多所专科院校升格为本科高校.办学规模不断扩大,数学课程开设的专业覆盖面也不断增大.为了适应这一发展需要,经湖南省境内多所高校部分数学教师多次研究讨论,联合编写了一套高质量的高等学校非数学类专业的数学系列教材.该系列教材包括《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率论与数理统计》.整套教材由黄立宏教授任总主编.

本系列教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的,也可为各类需要提高数学素质和能力的人员使用.教材中,概念、定理及理论叙述准确、精炼,符号使用标准、规范,知识点突出,难点分散,证明和计算过程严谨,例题、习题等均经过精选,具有代表性和启发性.

《高等数学》教材分上、下两册.上册含集合与函数、函数的极限和连续性、一元函数的导数和微分、一元函数微分学的应用、一元函数的积分、定积分的应用、常微分方程、无穷级数等内容.下册含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数微分学的应用、多元函数积分学、对坐标的曲线和曲面积分、向量函数与场论、傅立叶分析等内容.本册《高等数学》(上册)由黄立宏、周展主编,参加讨论和编写的人员有:刘碧玉、孟益民、彭亚新、邓爱珍、戴国枝、段卫龙等.刘楚中教授对本册教材的编写给予了许多支持与帮助,湖南大学的庾建设教授认真审查了此书,并提出许多宝贵意见,在此表示衷心感谢.

教材中难免会有不妥之处,希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见.

本系列教材编写得到湖南省数学学会的大力支持,在此一并致谢.

湖南省 21 世纪数学系列教材编写组  
2003 年 7 月

# 目 录

第一章 集合与函数	(1)
第一节 集合与映射	(1)
一、集合的概念(1) 二、集合的运算(2) 三、区间与邻域(3)	
四、映射的概念(4)	
第二节 函数的概念与基本性质	(6)
一、函数的概念(6) 二、复合函数与反函数(8) 三、函数的几种特性(11)	
四、函数应用举例(13)	
第三节 基本初等函数与初等函数	(15)
一、基本初等函数(15) 二、初等函数(21)	
第四节 双曲函数与反双曲函数	(21)
一、双曲函数(21) 二、反双曲函数(22)	
习题一	(23)
第二章 函数的极限和连续性	(26)
第一节 数列的极限	(26)
一、数列极限的定义(26) 二、数列极限的性质(28) 三、收敛准则(30)	
第二节 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限	(31)
第三节 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	(32)
一、 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限(32) 二、函数极限的性质(34)	
第四节 无穷大量与无穷小量	(35)
一、无穷大量(35) 二、无穷小量(36) 三、无穷大量与无穷小量的关系(36)	
四、无穷小量的运算定理(36)	
第五节 极限的运算法则	(38)
一、极限的四则运算法则(38) 二、复合函数的极限(41)	
第六节 极限存在准则	(41)
一、夹逼定理(41) 二、函数极限与数列极限的关系(42)	
三、柯西收敛准则(43)	
第七节 两个重要极限	(43)

	一、重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (43)	二、重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ (45)
第八节	无穷小量的比较 .....	(47)
第九节	函数的连续性 .....	(49)
	一、函数的连续性(49)	二、函数的间断点(51)
第十节	连续函数的基本性质 .....	(54)
	一、连续函数的保号性(54)	二、连续函数的四则运算(55)
	三、连续函数的反函数的连续性(55)	四、复合函数的连续性(55)
	五、初等函数的连续性(57)	
第十一节	闭区间上连续函数的性质 .....	(58)
	一、根的存在定理(零点存在定理)(58)	二、介值定理(58)
	三、最大最小值定理(59)	
习题二	.....	(60)
<b>第三章 一元函数的导数和微分</b>	.....	(64)
第一节	导数的概念 .....	(64)
	一、导数的定义(64)	二、函数四则运算的求导法(68)
	三、导数的几何意义(69)	四、左导数、右导数(71)
第二节	求导法则 .....	(72)
	一、复合函数求导法(72)	二、反函数求导法(74)
	三、参数方程求导法(75)	
	四、隐函数求导法(76)	五、取对数求导法(77)
第三节	函数的微分 .....	(78)
	一、微分的概念(78)	二、微分的运算公式(79)
第四节	高阶导数与高阶微分 .....	(81)
	一、高阶导数(81)	二、高阶微分(85)
第五节	微分中值定理 .....	(86)
第六节	泰勒公式 .....	(90)
第七节	罗必达法则 .....	(93)
	一、 $\frac{0}{0}$ 型不定式(93)	二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式(94)
	三、其他不定式(96)	
习题三	.....	(98)
<b>第四章 一元函数微分学的应用</b>	.....	(106)
第一节	函数的单调性与极值 .....	(106)
	一、函数单调性的判别(106)	二、函数的极值(107)
第二节	函数的最大(小)值及其应用 .....	(110)



第三节	曲线的凹凸性、拐点 .....	(113)
第四节	曲线的渐近线、函数作图 .....	(116)
	一、渐近线(117) 二、函数图形的描绘(117)	
第五节	微分学在物理学中的应用举例——相关变化率 .....	(121)
第六节	微分学在几何中的应用举例——曲率、曲率半径 .....	(123)
	一、弧微分(123) 二、曲率(124) 三、曲率圆与曲率半径(127)	
第七节	微分学在经济学中的应用举例 .....	(129)
	一、边际函数(129) 二、函数的弹性(129) 三、增长率(130)	
习题四	.....	(132)
<b>第五章 一元函数的积分</b>	.....	(136)
第一节	定积分的概念 .....	(136)
	一、曲边梯形的面积(136) 二、定积分的概念(137) 三、定积分的性质(139)	
第二节	原函数与微积分学基本定理 .....	(143)
	一、原函数与变限积分(143) 二、微积分学基本定理(147)	
第三节	不定积分与原函数求法 .....	(148)
	一、不定积分的概念和性质(148) 二、求不定积分的方法(152)	
第四节	积分表的使用 .....	(165)
第五节	定积分的计算 .....	(166)
	一、换元法(167) 二、分部积分法(170) 三、有理函数定积分的计算(172)	
第六节	广义积分 .....	(174)
	一、无穷积分(174) 二、瑕积分(177) * 三、广义积分的收敛原理(181)	
	* 四、广义积分的柯西主值(182)	
习题五	.....	(183)
<b>第六章 定积分的应用</b>	.....	(188)
第一节	微分元素法 .....	(188)
第二节	平面图形的面积 .....	(189)
	一、直角坐标情形(189) 二、极坐标情形(193)	
第三节	几何体的体积 .....	(194)
	一、平行截面面积为已知的立体体积(194) 二、旋转体的体积(196)	
第四节	曲线的弧长和旋转体的侧面积 .....	(198)
	一、平面曲线的弧长(198) 二、旋转体的侧面积(201)	
第五节	定积分在物理学中的应用 .....	(202)
	一、变力作功(202) 二、液体静压力(204) 三、引力(206) 四、平均值(207)	

第六节	定积分在经济学中的应用	(209)
	一、最大利润问题(209) 二、现金流的现值与终值(210)	
习题六		(211)
<b>第七章</b>	<b>常微分方程</b>	(214)
第一节	常微分方程的基本概念	(214)
第二节	一阶微分方程及其解法	(216)
	一、可分离变量方程(216) 二、齐次方程(218) 三、可化为齐次方程的方程(220) 四、一阶线性微分方程(222) 五、贝努利方程(224)	
第三节	微分方程的降阶法	(225)
	一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型方程(225) 二、不显含未知函数的方程(226) 三、不显含自变量的方程(227)	
第四节	线性微分方程解的结构	(228)
	一、函数组的线性相关与线性无关(229) 二、线性微分方程解的结构(229)	
第五节	二阶常系数线性微分方程	(235)
	一、二阶常系数齐次线性微分方程(235) 二、二阶常系数非齐次线性微分方程(237)	
* 第六节	$n$ 阶常系数线性微分方程	(241)
	一、 $n$ 阶常系数齐次线性微分方程的解法(242) 二、 $n$ 阶常系数非齐次线性微分方程的解法(242)	
* 第七节	欧拉方程	(244)
习题七		(246)
<b>第八章</b>	<b>无穷级数</b>	(249)
第一节	常数项级数的概念和性质	(249)
	一、常数项级数的概念(249) 二、常数项级数的性质(252) * 三、柯西审敛原理(254)	
第二节	正项级数敛散性判别法	(255)
第三节	任意项级数敛散性判别法	(261)
	一、交错级数收敛性判别法(261) 二、绝对收敛与条件收敛(263)	
第四节	函数项级数	(266)
	一、函数项级数的概念(266) * 二、函数项级数的一致收敛性(268) * 三、一致收敛级数的判别法(269) * 四、一致收敛级数的基本性质(270)	
第五节	幂级数	(273)
	一、幂级数及其收敛性(273) * 二、幂级数的一致收敛性(278) 三、幂级数的和函数的性质(278) 四、幂级数的运算(280)	

第六节 函数展开成幂级数.....	(281)
一、泰勒级数(281) 二、函数展开成幂级数(284)	
三、函数的幂级数展开式在近似计算中的应用(289)	
习题八.....	(292)
附录 I 几种常用的曲线.....	(296)
附录 II 积分表.....	(299)
习题参考答案.....	(309)

# 第一章 集合与函数

微积分研究的主要对象是函数. 为了准确而深刻地理解函数概念, 集合与映射的知识是不可缺少的. 本章将简要地介绍集合、映射的一些基本概念, 在此基础上重点介绍函数概念.

## 第一节 集合与映射

### 一、集合的概念

集合是数学中的一个最基本的概念, 它在现代数学和工程技术中有着非常重要的作用. 一般地, 我们将具有某种确定性质的事物的全体叫做一个集合, 简称集. 组成集合的事物称为该集合的元素. 例如, 某大学一年级学生的全体组成一个集合, 其中的每一个学生为该集合的一个元素; 自然数的全体组成自然数集合, 每个自然数是它的元素, 等等.

通常我们用大写的英文字母  $A, B, C, \dots$  表示集合; 用小写的英文字母  $a, b, c, \dots$  表示集合的元素. 若  $a$  是集合  $A$  的元素, 则称  $a$  属于  $A$ , 记作  $a \in A$ ; 否则称  $a$  不属于  $A$ , 记作  $a \notin A$  (或  $a \bar{\in} A$ ).

含有限个元素的集合称为有限集; 不含任何元素的集合称为空集, 用  $\emptyset$  表示; 不是有限集也不是空集的集合称为无限集. 例如, 某大学一年级学生的全体组成的集合是有限集; 全体实数组成的集合是无限集; 方程  $x^2 + 1 = 0$  的实根组成的集合是空集.

我们常用下面的方法来表示集合. 一种是列举法, 即将集合的元素一一列举出来, 写在一个花括号内. 例如, 所有正整数组成的集合可以表示为  $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ . 另一种表示方法是指明集合元素所具有的性质, 即将具有性质  $p(x)$  的元素  $x$  所组成的集合  $A$  记作

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p(x)\}.$$

例如, 正整数集  $N$  也可表示成

$$N = \{n | n = 1, 2, 3, \dots\};$$

所有实数的集合可表示成

$$R = \{x | x \text{ 为实数}\}.$$

又如

$$A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x, y \text{ 为实数}\}$$

表示  $xOy$  平面单位圆周上点的集合.

## 二、集合的运算

设  $A, B$  是两个集合, 若  $A$  的每个元素都是  $B$  的元素, 则称  $A$  是  $B$  的子集, 记作  $A \subseteq B$  (或  $B \supseteq A$ ), 读作  $A$  被  $B$  包含 (或  $B$  包含  $A$ ); 若  $A \subseteq B$ , 且有元素  $a \in B$ , 但  $a \notin A$ , 则说  $A$  是  $B$  的真子集, 记作  $A \subsetneq B$ . 对任何集  $A$ , 规定  $\emptyset \subseteq A$ . 若  $A \subseteq B$ , 且  $B \subseteq A$ , 则称集  $A$  与  $B$  相等, 记作  $A = B$ . 由属于  $A$  或属于  $B$  的所有元素组成的集称为  $A$  与  $B$  的并集, 记作  $A \cup B$ , 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由同时属于  $A$  与  $B$  的元素组成的集称为  $A$  与  $B$  的交集, 记作  $A \cap B$ , 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由属于  $A$  但不属于  $B$  的元素组成的集称为  $A$  与  $B$  的差集, 记作  $A - B$ , 即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

两个集合的并集, 交集, 差集如图 1-1 所示阴影部分.

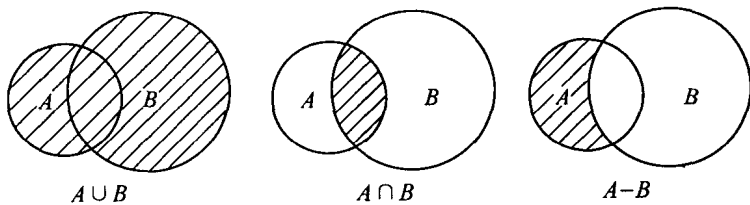


图 1-1

差集  $A - B$  不要求  $B \subseteq A$ . 如果  $B \subseteq A$ , 则称差集  $A - B$  为  $B$  在  $A$  中的补集 (或余集), 记作  $\complement_A B$ . 在研究某个问题时, 如果所考虑的一切集都是某个集  $X$  的子集, 则称  $X$  为基本集.  $X$  中的任何集  $A$  关于  $X$  的余集  $X - A$  常简称为  $A$  的补集 (或余集), 记作  $\complement A$ .

两个集的并集与交集可以推广到任意多个集的并集与交集. 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则称  $A$  与  $B$  不相交; 若  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则称  $A$  与  $B$  相交.

集合的交、并、余的运算满足下列运算法则

定理 1 设  $A, B, C$  为三个任意集合, 则下列法则成立:

- (1) 交换律  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ ;  
 (2) 结合律  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$   
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;  
 (3) 分配律  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$   
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$   
 $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$ ;  
 (4) 幂等律  $A \cup A = A, A \cap A = A$ ;  
 (5) 吸收律  $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$

定理 2 设  $A_i (i=1, 2, \dots)$  为一列集合, 则下列法则成立:

- (1) 若  $A_i \subseteq C (i=1, 2, \dots)$ , 则  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq C$ ;  
 (2) 若  $A_i \supseteq C (i=1, 2, \dots)$ , 则  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq C.$

定理 3 设  $X$  为基本集,  $A_i (i=1, 2, \dots)$  为一列集合, 则

$$\begin{aligned} C\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \bigcap_{i=1}^{\infty} C A_i, \\ C\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \bigcup_{i=1}^{\infty} C A_i. \end{aligned}$$

以上法则根据集合的并集, 交集, 差集及集合相等的定义即可证明. 这里只证明定理 3 的第一个结论, 其余证明留给读者练习.

设  $x \in C\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ , 则  $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , 从而  $x \notin A_i (i=1, 2, \dots)$ , 即  $x \in C A_i (i=1, 2, \dots)$ , 于是  $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C A_i$ , 故  $C\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} C A_i$ .

反之, 设  $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C A_i$ , 则  $x \in C A_i (i=1, 2, \dots)$ , 从而  $x \notin A_i (i=1, 2, \dots)$ , 即  $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , 于是  $x \in C\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ , 故  $\bigcap_{i=1}^{\infty} C A_i \subseteq C\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ , 因此  $C\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} C A_i$ .

### 三、区间与邻域

设  $a$  和  $b$  都是实数, 将满足不等式  $a < x < b$  的所有实数组成的数集称为开区间, 记作  $(a, b)$ . 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

$a$  和  $b$  称为开区间  $(a, b)$  的端点, 这里  $a \notin (a, b)$  且  $b \notin (a, b)$ .

类似地, 称数集

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

为闭区间,  $a$  和  $b$  也称为闭区间  $[a, b]$  的端点, 这里  $a \in [a, b]$  且  $b \in [a, b]$ .

称数集

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\} \text{ 和 } (a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

为半开半闭区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数  $b - a$  称为区间的长度. 此外还有无限区间:

$$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\} \doteq \mathbf{R},$$

$$(-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\},$$

$$(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\},$$

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\},$$

$$(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\},$$

等等. 这里记号“ $-\infty$ ”与“ $+\infty$ ”分别表示“负无穷大”与“正无穷大”.

邻域也是常用的一类数集.

设  $x_0$  是一个给定的实数,  $\delta$  是某一正数, 称数集:

$$\{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

为点  $x_0$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(x_0, \delta)$ . 称点  $x_0$  为这邻域的中心,  $\delta$  为这邻域的半径. (如图 1-2).

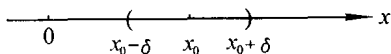


图 1-2

称  $U(x_0, \delta) - \{x_0\}$  为  $x_0$  的去心  $\delta$  邻域, 记作  $\dot{U}(x_0, \delta)$ . 即

$$\dot{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

记

$$\dot{U}(x_0^-, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0\},$$

$$\dot{U}(x_0^+, \delta) = \{x | x_0 < x < x_0 + \delta\},$$

它们分别称为  $x_0$  的去心左  $\delta$  邻域和去心右  $\delta$  邻域. 当不需要指出邻域的半径时, 我们用  $U(x_0)$ ,  $\dot{U}(x_0)$  分别表示  $x_0$  的某邻域和  $x_0$  的某去心邻域.

#### 四、映射的概念

定义 1 设  $A, B$  是两个非空的集合, 若对  $A$  中的每个元素  $x$ , 按照某种确定的法则  $f$ , 在  $B$  中有惟一的一个元素  $y$  与之对应, 则称  $f$  是从  $A$  到  $B$  的一个

映射,记作

$$f: A \rightarrow B, \text{ 或 } f: x \mapsto y, x \in A,$$

称  $y$  为  $x$  在映射  $f$  下的像,  $x$  称为  $y$  在映射  $f$  下的原像. 集合  $A$  称为映射  $f$  的定义域,  $A$  中所有元素  $x$  的像  $y$  的全体所构成的集合称为  $f$  的值域, 记作  $f(A)$ , 即

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}.$$

定义中  $x$  的像是惟一的, 但  $y$  的原像不一定惟一, 且  $f(A) \subseteq B$ .

映射概念中的两个基本要素是定义域和对应法则. 定义域表示映射存在的范围, 对应法则是映射的具体表现.

**例 1** 设  $A$  表示某高校大学一年级学生所构成的集合, 用一种方法给每一个学生编一个学号,  $B$  表示该校一年级学生学号的集合,  $f$  表示编号方法, 于是确定了从  $A$  到  $B$  的一个映射  $f: A \rightarrow B$ .

**例 2** 设  $A = \{1, 2, \dots, n, \dots\}, B = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$ .

令

$$f: n \mapsto 2n \quad (n=1, 2, \dots),$$

则  $f$  是一个从  $A$  到  $B$  的映射.

**例 3** 设  $A = [0, 1], B = \{(x, y) \mid y = x, x \in A\}$  (如图 1-3). 对  $x \in A$ , 令

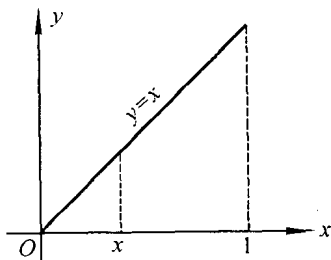


图 1-3

$$f: x \mapsto (x, x) \in B,$$

则  $f$  是一个从  $A$  到  $B$  的映射.

设有映射  $f: A \rightarrow B$ . 若  $B = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ , 则称  $f$  是满射. 若  $f$  将  $A$  中不同的元素映射到  $B$  中的像也不同, 即若  $x_1, x_2 \in A$  且  $x_1 \neq x_2$ , 则  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称  $f$  是单射. 若  $f$  既是满射又是单射, 则称  $f$  是从  $A$  到  $B$  的一一映射. 若  $A$  与  $B$  之间存在一一映射, 则称  $A$  与  $B$  是一一对应的. 上面的例 1, 例 2 与例 3 的两个集合都是一一对应的. 有趣的是例 2 中的  $B$  是  $A$  的真子集, 但  $A$  与  $B$  却是一一对应的, 这是无限集的一种特性.



定义 2 设有映射  $g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ , 于是对  $x \in A$  有

$$x \xrightarrow{g} u = g(x) \xrightarrow{f} y = f(u) = f(g(x)) \in C$$

这样, 对每个  $x \in A$ , 经过  $u \in B$ , 有惟一的  $y \in C$  与之对应, 因此, 又产生了一个从  $A$  到  $C$  的新映射, 记作  $f \circ g: A \rightarrow C$ , 即

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), x \in A,$$

称  $f \circ g$  为  $f$  与  $g$  的复合映射(图 1-4).

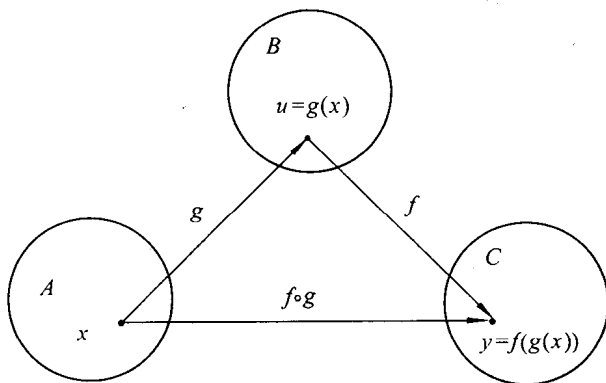


图 1-4

两个映射的复合可推广到有限个映射复合的情形.

定义 3 设有映射  $f: A \rightarrow B, B = f(A)$  若存在一个映射  $g: B \rightarrow A$ , 对每个  $y \in B$ , 通过  $g$ , 有惟一的  $x \in A$  与之对应, 且满足关系  $f(x) = y$ , 则称  $g$  是  $f$  的逆映射, 记作  $g = f^{-1}$ .

定理 4 若映射  $f: A \rightarrow B$  是一一映射, 则  $f$  必存在一个从  $B$  到  $A$  的逆映射  $f^{-1}$ .

证 由  $f$  是从  $A$  到  $B$  的满射知, 对每个  $y \in B$ , 必有  $x \in A$  与之对应; 又  $f$  是从  $A$  到  $B$  的单射, 故对每个  $y \in B$ , 必有惟一的  $x \in A$  与之对应, 且满足  $y = f(x)$ , 故  $f$  存在一个从  $B$  到  $A$  的逆映射.

## 第二节 函数的概念与基本性质

### 一、函数的概念

函数是客观世界中变量之间的一种依赖关系. 本节利用映射概念来定义函数.