极限的基本理论与方法

甘肃人民出版社

极限的基本理论与方法

王仲春　何平　刘夫孔

甘肃人民出版社

一九八二·兰州

责任编辑　王水汀
封面设计　杜海涛

极限的基本理论与方法

王仲春　何干　刘夫孔

甘肃人民出版社出版
（兰州第一新村51号）
甘肃省新华书店发行　　兰州新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32　印张6.625　字数139,000
1983年7月第1版　1983年7月第1次印刷
印数 1—8,000
书号：13096·86　　定价：0.56元

前　言

《极限的基本理论与方法》一书，着重于对极限论中的基本概念、基本理论以及方法，作比较系统的阐述。同时，对其中重要的概念、性质、原理，以及它们的特征、意义、应用，都作了评注和说明。

本书是在西北师范学院数学系主任郑宪祖教授直接指导下编写的。西北师范学院数学系副主任丁传松副教授对本书提出过宝贵的修改意见，在此一并致谢。

编　者

一九八二年四月

内 容 简 介

本书对极限论中的基本概念、基本理论和方法作了比较深入而系统的阐述，对一些应该注意的问题作了评注与说明。可供大、中学师生参考。对一般学习微积分的读者也有一定的参考价值。

目 录

§1 极限方法的基本思想及其重要意义

一 极限方法的基本思想

极限是描述数列和函数在无限过程中的变化趋势的重要概念．极限方法是微积分中的基本方法，它是人们从有限认识无限、从近似认识精确、从量变认识质变的一种数学方法．

早在两千多年前，在庄子的《天下篇》里引惠施的话说，“一尺之棰，日取其半，万世不竭”．就是把一根一尺长的木棒，第一天截取半尺余半尺；第二天从第一天所剩下的半尺截取一半，即截取$\frac{1}{4}$尺，余$\frac{1}{4}$尺；第三天又从第二天所剩下的$\frac{1}{4}$尺截取一半，即截取$\frac{1}{2^3}$尺，余$\frac{1}{2^3}$尺；如此继续下去，直至第n天．我们把逐日截取的量记为a_n，余下的量记为r_n，逐日截取量积累起来的和记为S_n，列入下表。

当n越来越大时，数列$\{a_n\}$或$\{r_n\}$的项随着n的增大而越来越小．但无论n多么大，所截取的量和余下的量总还有$\frac{1}{2^n}$尺，这就是所谓的万世不竭．万年虽然漫长，毕竟有限，如果我们把“日取其半”不断进行下去，当天数n无限制增

天次(n)	1	2	3	…	n
逐日截取量(a_n)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	…	$\frac{1}{2^n}$
积累和(S_n)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$ $=1-\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$ $=1-\frac{1}{2^3}$	…	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+$ $\cdots+\frac{1}{2^n}$ $=1-\frac{1}{2^n}$
余量(r_n)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	…	$\frac{1}{2^n}$

大（记成$n\to\infty$）时，直观上很明显，a_n或$r_n=\frac{1}{2^n}$将无限制地变小，只要天数足够多，它就可以任意接近于零，但它又不是真正的等于零，这说明随着n的变大，变量a_n或r_n的变化有一种趋势——越变越小，可以小到任意地接近于零，我们把0就叫做数列$\{r_n\}$：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

的极限。记为

$$\lim_{n\to\infty} r_n=0\ 或\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

再来考察数列$\{S_n\}$：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n},\ \cdots$$

的变化趋势，S_n表示逐日截取的量积累起来的和，假若指定某一天次（n），不妨设$n=100$，则$S_{100}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$

$=1-\frac{1}{2^{100}}$. 这是一个有限和，用初等数学的方法总是可以计算出来的. 问题是一尺之棰要日复一日地截取下去，随着天次的增长，我们就要计算一个无限和：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

如何计算这个无限和呢？由构成的积累和S_n的意义，只有研究数列$\{S_n\}$在n无限增大的过程中的变化趋势了. 由于在第$(n-1)$天与第n天截取的量分别为$\frac{1}{2^{n-1}}$和$\frac{1}{2^n}$，于是在第n天积累的量S_n比第$(n-1)$天积累的量S_{n-1}要多$\frac{1}{2^n}$，即

$$S_{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=S_n.$$

这说明$\{S_n\}$有逐日增大的趋势，但它又不是增大得无法估计，因为

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}=1-a_n<1,$$

当n无限增大时，a_n与0任意地逼近. 所以，当n无限增大时，数列$\{S_n\}$愈到后来的项就愈逼近于1，故有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

这说明极限概念是从数量上描述变量在无限过程中的变化趋势的. 为了正确地理解极限方法的基本思想，再看下面两个例子.

1　面积问题

在面积的计算问题中，对某些规则的平面图形，如三角

形、梯形等，可以运用相应的面积公式．但是对某些“曲”边或“不规则”的平面图形，在初等数学中就没有理想的面积公式可用．于是只好将曲的或不规则的图形分割成规则的图形，实际上是把整体分成了许多局部．就整体来说，其周界是曲的或不规则的，但就其局部来说，小段曲线可以用直线段去近似代替，即在局部的小段曲线或不规则的部分上可以近似地“以直代曲”．再把这些局部的图形加起来就近似地得到整体．分得越细，所得的近似值就越精确．

例 1　求抛物线$y=x^2$、直线$x=1$和x轴围成的曲边三角形OAB的面积．

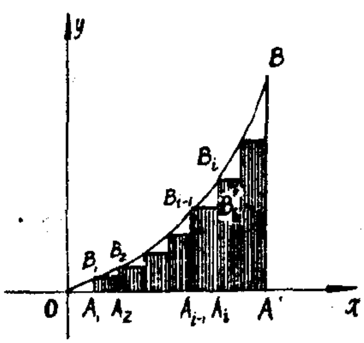

图　1—1

把曲边三角形OAB分成n个小曲边梯形，再把每一个小曲边梯形的曲边 $B_{i-1}B_i$ 以直线段 $B_{i-1}B_i$代之，这样就得到若干个与相应的小曲边梯形面积近似的小矩形．具体来说，就是分 OA 为n个相等的小段，分点A_i（$i=1，2，\cdots，n-1$）的横坐标为

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n},$$

每一小段的长为$\frac{1}{n}$，于是以$f(\frac{i}{n})$($i=0,1,2,\cdots,n-1$)为高，得到n个小矩形，其面积的总和

$$S_n=0\cdot\frac{1}{n}+(\frac{1}{n})^2\cdot\frac{1}{n}+(\frac{2}{n})^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+(\frac{n-1}{n})^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

是曲边三角形OAB面积的近似值。当n增大时，相应地得到一串近似程度随着提高的近似值。考虑这些近似值的变化趋势，当$n \to \infty$时，$\frac{1}{2n}$和$\frac{1}{6n^2}$都趋于O，所以曲边三角形OAB的面积为

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

求曲边三角形 OAB 的面积问题，在这里实际上是考察数列

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

（其中 $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$）当n 无限增大时的变化趋势问题。

2 速度问题

下面再来讨论变速运动的速度问题。

对作匀速运动的物体，它的速度V的求法是以运动所需的时间t去除物体所移动的距离S，即

$$V = \frac{S}{t}. \tag{1}$$

但对变速运动，由于在整个过程中，其速度是时时在变化着的，因此，所说的速度是指运动物体在某一时刻的瞬时速度，而用公式（1）去求，求出来的只是在某段时间内的平

均速度。如何求变速运动的速度呢？下面以自由落体运动为例，分析这种速度的求法。

例 2　设物体在初始时是静止的，据实验知，如果忽略空气阻力的作用，在时间t内物体下落的路程S为

$S=\frac{1}{2}gt^2$（其中g是重力加速度）问自由落体在其路程中的每一点上速度有多快？此即物理上自由落体的瞬时速度问题。

设物体在时刻t_0经过某一点M_0（图1—2），现在要求的就是物体在时刻$t=t_0$的速度。

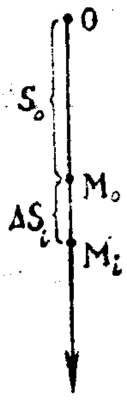

图1—2

如果用t_0去除$S_0=\frac{1}{2}gt_0^2$，得到的结果为$\frac{1}{2}gt_0$，它是从运动开始到t_0这段时间内的平均速度，并非物体在点M_0的速度。

假若令物体在时刻$t_0+\Delta t_i$经过某一点M_i（其中$\Delta t_i=\frac{1}{10^i}$秒，代表从$t_0$开始所经过的时间，$i=0,1,2,\cdots,n$），那么落体在$\Delta t_i$这段时间内所走过的路程为

$$\Delta S_i=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t_i)^2-\frac{1}{2}gt_0^2$$

$$=gt_0\cdot\Delta t_i+\frac{1}{2}g\cdot(\Delta t_i)^2,\quad 则$$

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}=\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t_i)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t_i}$$

$$=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t_i$$

是落体在 t_0 到 $t_0+\Delta t_i$ 这段时间内的平均速度，令$\Delta t_i=1$秒，$\frac{1}{10}$秒，$\frac{1}{10^2}$秒，…，$\frac{1}{10^n}$秒，代入上式，将所得的结果列入下表

Δt_i	ΔS_i	$\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}$
1	$gt_0+\frac{1}{2}g$	$gt_0+\frac{1}{2}g$
0.1	$\frac{gt_0}{10}+\frac{g}{2\cdot 10^2}$	$gt_0+\frac{g}{2\cdot 10}$
0.01	$\frac{gt_0}{10^2}+\frac{g}{2\cdot 10^4}$	$gt_0+\frac{g}{2\cdot 10^2}$
0.001	$\frac{gt_0}{10^3}+\frac{g}{2\cdot 10^6}$	$gt_0+\frac{g}{2\cdot 10^3}$
0.0001	$\frac{gt_0}{10^4}+\frac{g}{2\cdot 10^8}$	$gt_0+\frac{g}{2\cdot 10^4}$
0.00001	$\frac{gt_0}{10^5}+\frac{g}{2\cdot 10^{10}}$	$gt_0+\frac{g}{2\cdot 10^5}$
⋮	⋮	⋮
$\overbrace{0.00\cdots0}^{n-1\text{个}}1$	$\frac{gt_0}{10^n}+\frac{g}{2\cdot 10^{2n}}$	$gt_0+\frac{g}{2\cdot 10^n}$

象前面处理曲边三角形一样，虽然在整段过程内速度是变的，对于每一个 Δt_i，平均速度$\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}$确实不能确切地反

映物体在时刻t_0的速度，但是当Δt_i越来越小时，在局部很小的一段时间内，变速可以近似地看成匀速，即近似地“以匀速代变速”。根据这个观念，从上表可以看出，如果让Δt_i依次取1，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，…，$\frac{1}{10^n}$，一方面$t_0+\Delta t_i$就越来越接近时刻t_0，另一方面相应的平均速度$\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}$也就越来越接近时刻$t_0$的速度，那么剩下来的就是从近似过渡到精确的问题了。

为了从近似过渡到精确，由于$\Delta t_n=\frac{1}{10^n}$，可以让n无限制地增大，当$n\to\infty$时，$\Delta t_n$无限制地变小，由上表容易看出$\frac{g}{2\cdot 10^n}$也无限制地变小，那么$\frac{\Delta S_n}{\Delta t_n}$就和$gt_0$无限制地接近，即

$$V_0=\lim_{\Delta t_n\to 0}\frac{\Delta S_n}{\Delta t_n}=\lim_{\Delta t_n\to 0}\left(gt_0+\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{10^n}\right)$$
$$=gt_0.$$

这就是自由落体在时刻t_0的瞬时速度。

上面列举的面积问题，实质上是积分学中的问题；变速运动的瞬时速度问题，又是微分学中的问题。我们在讨论这些典型问题的时候，一个最基本的观点，就是变化的观点，这是辩证法在数学中的运用。如果没有这种变化的观点，就无法认识圆的面积、曲边三角形的面积、曲线的切线、变速运动的瞬时速度等等。如在圆面积问题中，我们把圆面积看成圆内接多边形的边数无限增加时正多边形面积的极限，对曲边三角形面积的看法也不例外。在求变速运动的瞬时速

度问题中，在小段时间内，以匀速近似代替变速，再从这小段时间内的平均速度的变化当中去认识瞬时速度。所讨论的面积和速度问题，虽然各个问题的具体内容不同，但都是要实现从有限过渡到无限、从近似过渡到精确、从量变过渡到质变。如何实现？只有让n无限地增大（在速度问题中让Δt_n无限地减小）。随着n无限地增大，相应地就得到一连串越来越精确的近似值，然后再考察这些近似值的变化趋势，这就是极限方法的基本思想。

二　从微积分的历史发展看极限方法的重要意义

十七世纪，随着生产力和科学技术的发展，牛顿（Newton）和莱布尼兹（Leibniz）在总结前人经验的基础上，创立了微积分。这门新的科学一出现，就发挥了它强大的生命力的作用，在生产和科学技术上得到了广泛的应用。但是，正当人们欢呼它的伟大胜利的时候，却发现了微积分的基础有毛病，逻辑推导自相矛盾。下面我们以求自由落体的瞬时速度为例加以说明。

为了求自由落体 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 在时刻 $t=t_0$ 的瞬时速度，首先，退一步求出区间 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 上的平均速度

$$\overline{V}=\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}=gt_0+g\cdot\Delta t,$$

然后，让$\Delta t=0$，可得在时刻$t=t_0$的瞬时速度

$$V(t_0)=gt_0。$$

显然这里产生了一个很大的问题：倘若$\Delta t \neq 0$，则平均速度永远是平均速度；倘若 $\Delta t = 0$，就出现$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{0}{0}$这个没有意义的"怪物"．

微积分创始人牛顿和莱布尼兹，为了摆脱这个困境，分别提出了好几种说法，譬如：

其一，因Δt无限小，无限小又不为零，故可作除法．但和有限量比较起来，无限小又可以忽略，因此，$gt_0 + \frac{1}{2}g \cdot \Delta t$可写成$gt_0$，这就是历史上所谓的"无限小"方法．

其二，称$\frac{gt_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}g \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2}g \cdot \Delta t$的极限为$gt_0$，但极限又是什么呢？并未给出极限的确切定义．

其三，干脆硬性规定gt_0就是t_0的瞬时速度．

如此等等的说法，都是试图解决下列矛盾而提出的．

(i) 要使$\frac{gt_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}g \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t}$有意义，只有$\Delta t \neq 0$．

(ii)要使瞬时速度为gt_0，又必须$\Delta t = 0$．

这两个互相矛盾的任务，要由同一个数Δt同时担负起来，这在数学上当然是不能允许的．由此可见，牛顿和莱布尼兹的种种解释，不但不能自圆其说，反而把微积分"神秘"化了．

围绕微积分的基础问题，展开了激烈的争论．包括贝克莱在内的一批神学家和唯心论哲学家，对微积分进行了严厉