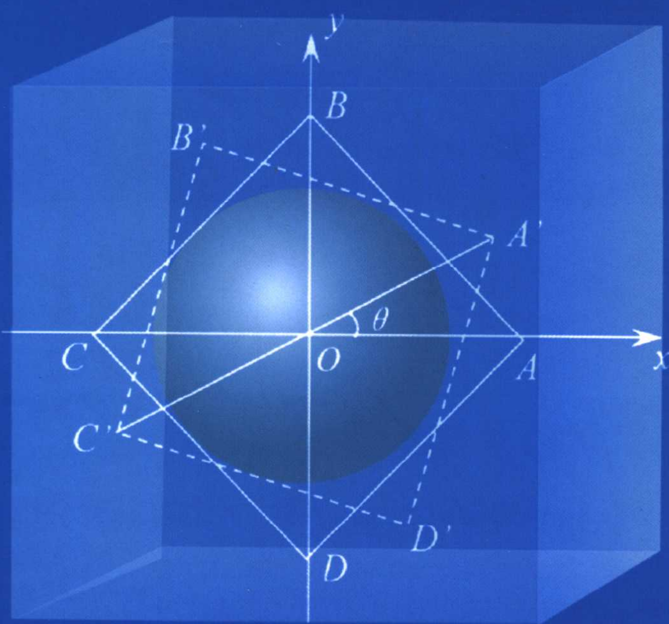
高职高专院校教学用书



数学建模

蔡锁章 主编

SHUXUE JIANMO

中国林业出版社

高职高专院校教学用书

数学建模

蔡锁章　主　编

范庆安
张洪斌　副主编

中国林业出版社

内容简介

本书内容包括初等模型、微分与差分方程模型、代数模型、数学规划模型、随机模型、图与网络模型、其它模型，简单介绍了Maple和MATLAB两种常用数学软件、科学论文的写作规范和近年来全国大学生数学建模竞赛大专组优秀论文选评。各章附有习题。

本书可作为高等专科学校和高等职业技术学校数学建模课程的教材，也可作为参加数学建模竞赛的辅导教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模/蔡锁章主编.—北京：中国林业出版社，2003.7
ISBN 7-5038-3510-9

Ⅰ.数… Ⅱ.蔡… Ⅲ.数学模型—高等学校：专科学校和技术学校—教学用书 Ⅳ.O22

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第065981号

出版：中国林业出版社（100009 北京西城区刘海胡同7号）
E-mail：cfphz@public.bta.net.cn 电话：66184477
发行：新华书店北京发行所发行
印刷：华北工学院印刷厂
版次：2003年7月第1版
印次：2003年7月第1次
开本：787mm×1092mm 1/16
印张：26.5
字数：672千字
印数：1～3300
定价：35.00元

前　言

众所周知，人类已经进入了以计算机、网络、数码、光纤、多媒体为主要标志的信息时代。数学与电子计算机技术相结合，已经形成一种重要的、可以实现的技术。“高科技本质上是一种数学技术”的提法，愈来愈得到人们的认可。

要使数学在实际问题中发挥作用，首先要建立该问题的数学模型。在实验、观察和分析的基础上，对实际问题的主要方面作出合理假设和简化，明确变量和参数，应用数学的语言和方法形成一个明确的数学问题，然后用数学或计算的方法精确或近似求解该数学问题，检验结果是否能说明实际问题的主要现象，甚至能否对实际问题做出预测、预报，这样的过程多次反复进行，直到较好地解决问题。以上就是数学建模的全过程。

数学建模是对大学生的专业知识和数学理论的掌握，分析和解决问题的能力，以及计算机和运算能力的全面考验，是对创新能力和实践能力进行素质培养的有效手段，从1993年教育部决定在全国大学生中开展数学建模竞赛作为大学生的课外科技活动以来，这项活动健康、迅速地向前发展，受到广大同学的热烈欢迎，大学生的聪明才智和创新精神得到充分发挥，这一活动有力地促进了高等院校的数学教学改革，并对中学教育产生深刻的影响。目前很多高等院校已经把数学建模课程列为必修或选修课程，为适应课堂教学的需要，本科层次的数学建模教材已出版不少。由于数学建模活动是培养工程意识和创新意识的最有效手段之一，数学建模竞赛也逐步为高职高专层次所接受，从1999年开始，全国大学生数学建模竞赛组织委员会，专门设立了适合大专院校学生参加的数学建模竞赛（文科和农、林、医科的本科也可参加这一竞赛），各高职高专院校也准备开设数学建模课程，但适合这一层次的教材尚不多见。为了适应这一形势发展的需要，在有关方面的倡导和支持下，我们编写了《数学建模》这本教材。

本书由蔡锁章教授（华北工学院）任主编，负责审阅全稿和最后定稿，范庆安（山西省教育厅）、张洪斌（太原理工大学）任副主编，负责审阅部分章节。参加本书编写的有张洪斌、樊孝仁（华北工学院分院）、梁赛良（山西财税专科学校）、李海增（晋东南师范专科学校）、刘方（吕梁高等专科学校）、尚肖飞（太原大学）等。雷英杰（华北工学院）参加了部分章节的修改工作。

编写过程中，在采用资料、选择案例等方面，我们博采众长，吸收了一些精典教科书、参考书的内容。在此，对这些书的作者们顺表谢意。

限于水平，书中难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

编者

2003年6月

目　录

第一章　数学建模概论 …… (1)

1.1　两个数学模型例子 …… (1)

1.2　数学模型概念 …… (3)

1.3　建立数学模型的一个实例——除雪机除雪问题 …… (4)

1.4　建立数学模型的思维方法 …… (6)

第二章　初等模型 …… (8)

2.1　Fibonacci 数 …… (8)

2.2　商人们怎样安全过河 …… (9)

2.3　雨中行走问题 …… (11)

2.4　椅子问题 …… (12)

2.5　公平席位分配 …… (13)

2.6　实物交换 …… (15)

2.7　围棋中的数学模型 …… (17)

2.8　跑步与走路时如何节省能量 …… (20)

2.9　核武器竞赛 …… (22)

2.10　血管分支 …… (25)

2.11　量纲分析 …… (26)

习题二 …… (30)

第三章　微分与差分方程模型 …… (31)

3.1　预备知识 …… (31)

3.2　人口模型 …… (33)

3.3　新产品的推销与广告 …… (35)

3.4　污染问题 …… (38)

3.5　传染病的传播模型 …… (40)

3.6　Lanchester 作战模型 …… (42)

3.7　可再生资源的管理模型 …… (45)

3.8　香烟过滤嘴的作用 …… (48)

3.9　交通流问题模型 …… (51)

3.10　经济活动中的差分方程模型 …… (57)

习题三 …… (60)

第四章　代数模型 …… (61)

4.1　幻方问题 …… (61)

4.2　森林管理问题 …… (65)

4.3　基因分布和遗传模型…… (68)
4.4　效益分配和费用分担…… (73)
4.5　投入产出模型…… (78)
习题四 …… (89)
第五章　数学规划模型 …… (92)
5.1　线性规划模型…… (92)
5.2　非线性规划模型 …… (101)
5.3　动态规划模型 …… (111)
5.4　电梯系统的数学模型 …… (115)
5.5　乒乓球赛的布阵问题 …… (124)
习题五…… (127)
第六章　随机性模型…… (130)
6.1　概率知识简介 …… (130)
6.2　几个概率模型 …… (141)
习题六…… (148)
第七章　图与网络模型…… (151)
7.1　图论基本知识 …… (151)
7.2　路径问题 …… (156)
7.3　其它相关问题 …… (162)
7.4　数学建模实例 …… (169)
习题七…… (184)
第八章　其它模型…… (186)
8.1　层次分析法模型 …… (186)
8.2　数据拟合与插值 …… (197)
8.3　模糊数学模型 …… (205)
8.4　Monte Carlo 方法 …… (221)
习题八…… (228)
第九章　常用数学软件简介…… (230)
9.1　概述 …… (230)
9.2　Maple 计算机代数系统简介 …… (232)
9.3　MATLAB 简介 …… (292)
习题九…… (324)
第十章　数学建模竞赛论文范例…… (329)
10.1　科学论文写作规范…… (329)
10.2　1999 年中国大学生数学建模竞赛大专组优秀竞赛论文选评 …… (339)
10.3　2000 年中国大学生数学建模竞赛大专组优秀竞赛论文选评 …… (366)
10.4　2001 年中国大学生数学建模竞赛大专组优秀竞赛论文选评 …… (381)
习题十…… (417)
参考文献…… (420)

第一章　数学建模概论

随着信息时代的到来和现代科学技术的迅猛发展，运用数学工具分析和解决所遇到的实际问题越来越为人们所重视。很显然，要实现用数学分析和研究问题，第一步应当把要考察的实际问题归结为一个数学问题，即建立所谓数学模型。例如，对人口控制、股票走势、投资决策、疾病传播、彩票发行、环境治理等问题，只有建立起相关的数学模型，通过数学方法对模型求解和论证，才能确定相应的解决办法和方案。那么，什么是数学模型呢？本章我们先给出两个实例，然后介绍数学模型的基本概念及建立数学模型的方法。

1.1　两个数学模型例子

1.1.1　微波炉销售模型

在生活水平日益提高的今天，微波炉越来越受到人们青睐。对于微波炉生产厂家，应该对产品销售的变化规律进行研究，以科学制定生产计划和促销策略。下面给出微波炉销售模型。

设$x(t)$为t时刻购买该产品的人数，$\overline{x}$表示潜在消费者总数。因微波炉是耐用产品，故可假定人们不会重复购买，产品累积销售量认为是购买者人数。

在时间$[t,t+\Delta t]$内，由于厂家广告宣传和人们到商店看到实物，购买者增量Δx应与已购买者人数和未购买者人数之积成正比，即

$$\Delta x = ax(t)(\overline{x}-x(t))\Delta t \qquad (a>0\text{ 为比例系数})$$

两端除以Δt，并令$\Delta t \to 0$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax(t)(\overline{x}-x(t))$$

取$x(0)=b$，这就是微波炉销售量的数学模型。

求解这一微分方程，得

$$x(t)=\frac{\overline{x}}{1+\frac{\overline{x}-b}{b}\mathrm{e}^{-a\overline{x}t}}$$

显然，随着t的增大，$x(t)\to\overline{x}$，我们可根据经验数据确定a值，给出销售量增长曲线，并对销售情况作出短期和长期的预测。

1.1.2　生产计划模型

某工厂与客户签订了生产A、B两种型号产品的合同，根据产品性能要求，每台产品的装配和检验工时消耗和销售利润如表1-1所示。

工厂每日可用于装配和检验工序的劳动工时分别为240h和82h，同时每台型号B的产品需装入外单位生产的配件1只，每天最多供应40只，其它部件和材料不受限制。

确定A、B两种型号产品每天的产量，要求在工厂劳动工时总量和外单位配件供应量允许条件下，厂方销售盈利最大。

表1-1 每台产品的工时消耗和销售利润

产品型号	工时消耗定额(h/台)		销售利润(元/台)
	装　配	检　验	
A	1.2	0.5	200
B	4.0	1.0	500
劳动工时总量(h)	240	82	

这一问题称为线性规划问题。下面给出数学模型，设A、B两种产品的日产量分别为x_1台和x_2台，根据问题所给的条件和要求，有

(1)装配工时限制：$1.2x_1+4.0x_2\leqslant 240$

(2)检验工时限制：$0.5x_1+1.0x_2\leqslant 82$

(3)某配件供应限制：$x_2\leqslant 40$

此外，A、B的生产量不可能为负：$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$

目标函数：$\max Z=200x_1+500x_2$

这里x_1, x_2是要求确定的日产量，称决策变量，不等式(1)～(3)称约束条件。

上述数学模型带有不等式约束条件，求解不能搬用微积分中极值问题的方法。在只有两个决策变量情况下，可用下面的图解法找出最优解。

首先由三个约束条件(1)～(3)和两个非负条件组成一封闭凸多边形$OABC$，这一凸多边形称为可行解域，即当解落在该区域内，必然满足各约束条件要求，因而是可行的和有意义的。当解落在区域之外必不能保证满足全部约束条件，是不可行的。

其次，画出目标函数的等值线。所谓目标函数等值线是指在此直线上的任意点的坐标处，目标函数值都相等。例如，对目标函数$Z=200x_1+500x_2$，可先给出任意一个目标函数值，如设$Z=15000$，则$200x_1+500x_2=15000$，该直线过两点(0,30)和(75,0)，就得到一条目标函数等值线(图1-1)。

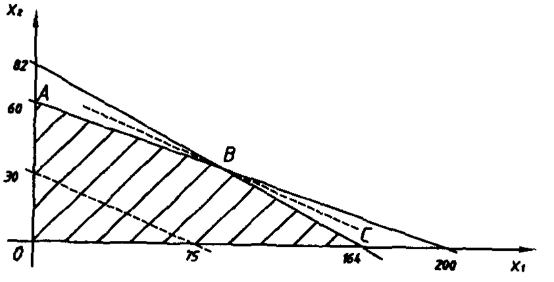


图1-1　线性规划求最优解的图解法

最后求最优解。所谓最优解，就是在可行解域内，使目标值达到最大的解，这只须将目标函

数的等值线按其斜率不变平移，使其远离坐标原点，且保持与可行解域至少有一个公共点。从图1-1看出这点为B点，即B点为最优解，此时$x_1=110$，$x_2=27$。就是说，A产品每天生产110台，B产品每天生产27台，工厂销售利润最大：

$$Z=200\times110+500\times27=35500(\text{元})$$

1.2 数学模型概念

从上节两个实例，我们对什么是数学模型有所了解，现给出一个较为明确的描述：

所谓数学模型，就是针对某一实际问题，用数学符号、公式、图表来刻划这一问题特征及内在规律的数学结构表达式，即数学模型是对所研究对象的数学模拟。

在前面的两个例子中，所给出的数学表达式就是问题的数学模型。

许多情况下，建立与问题实际情形完全吻合的数学描述是难以做到的。理想的数学模型通常有着如下特点：

(1)能反映事物的本质关系和主要特征，非本质的联系一般忽略不被考虑；

(2)简单、清楚，便于分析、讨论、研究和计算；

(3)具有可操作性，可方便结果的检验和模型进一步修改。

由于上述这些特点，要给出一个实际问题的数学模型，首先应对所给实际问题做出一些必要的简化和假设，使得问题容易用数学关系式加以描述和表达。基于这一点，也可以说数学模型是用数学工具表述的一种假定情况。

数学模型可根据不同分类原则分成不同的类型。例如，根据所使用的数学方法可以分为初等模型，微分方程模型，优化模型，控制模型等，根据所研究的实际问题可分为人口发展模型，交通模型，生态模型，经济模型等，根据变量不同性质可分为确定性和随机性模型，离散性和连续性模型等，此外还有其它类型的模型。了解这些不同类型的模型及构建过程，会对我们建立实际问题的数学模型有很大帮助和借鉴作用。

构建实际问题的数学模型，对解释事物发生的原因及预测未来发展具有重要意义。但建立数学模型一般并没有一定模式。下面给出建立数学模型的主要步骤，并指出要注意的问题，主要是使在构造数学模型时掌握一些规律和要点。

建立数学模型的主要步骤：

(1)了解问题，明确目的。在建模前要对实际问题的背景进行深入细致的了解和观察，明确所解决的问题的目的和要求，收集必要的数据，为建立数学模型做好基础准备工作。

(2)对问题进行简化和假设。这是建立模型的关键步骤。一般情况下，一个问题涉及的方面很多，如果把实际现象的各个因素都考虑进去，势必使问题复杂化，造成数学处理上的困难。因此，要根据建模的目的，舍去一些次要因素，对问题进行适当的简化，并给出必要的假设，不同的假设会得到不同的模型，如何作出合理的假设，重要在于考察所作假设是否能反映问题的特征和本质，如果假设过于简单，即过多忽略一些因素，模型就会与实际问题不相吻合，则应对假设作出修改。

(3)建立模型。在所作简化和假设基础上，选择适当的数学工具来刻划描述问题的各种变量之间关系，用公式、图形、表格给出数学结构表达式，建模时要注意下面几点：

1° 恰当使用数学工具。如果变量是确定性的，多用微积分，微分方程，差分方程，线性规

划，网络理论；如果变量是随机性的，多用概率，统计，排队论，决策论等等。

2° 推理要严密。这主要是为保证模型的正确性。

3° 有足够的精确度。

(4)模型求解。运用有关的数学工具，对建立起来的数学模型进行分析、推理和计算。求解过程，应尽可能使用计算机语言进行计算。

(5)模型的检验和修改。对模型的结果与实际问题进行比较，验证模型的合理性。如果差别较大，则要重新对问题的主次因素进行分析，检查是否将不该忽略的因素忽略了。修改模型时，可考虑使用调整参数，改变变量性质，改变约束关系，变换函数形式等方法。一般情况下，模型要经过多次修改才能成功。

(6)模型应用。用建立起来的模型分析和解释已有的现象，并对事物未来发展趋势进行预测或提供决策依据。

建立模型的主要步骤如图 1-2 所示。

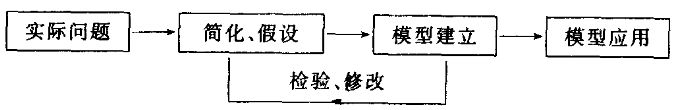


图 1-2 建立数学模型主要步骤

1.3 建立数学模型的一个实例
——除雪机除雪问题

冬天的大雪常使公路上积起厚雪影响交通，有条 10km 的公路积雪由一台除雪机负责清扫。每当路面积雪平均厚度达到0.5m 时，除雪机就开始工作。但问题是开始除雪后，大雪仍下个不停，使路上积雪越来越厚，除雪机工作速度逐渐减慢，直到无法继续工作。降雪的大小直接影响除雪机的工作速度，那么除雪机能否完成这 10km 路程的除雪任务，当雪下多大时除雪机无法工作？

了解到的有关情况和部分数据：

(1)降雪持续下了一个小时；

(2)降雪速度随时间变化，但下得最大时，积雪厚度的增量是每秒 0.1cm；

(3)当雪厚度达到 1.5m 时，除雪机将无法工作；

(4)除雪机在没有雪的路上行驶速度为 10m/s。

问题分析：首先考虑与除雪机除雪有关的因素。显然影响除雪机工作的因素主要有：下雪速度，积雪厚度，除雪机工作速度及下雪持续时间。

其次作出适当假设，为使问题简化，假设(1)下雪速度保持不变；(2)除雪机工作速度与积雪厚度成反比。

设置变量，记下雪速度为 R(cm/s)，积雪厚度为 d(m)，除雪机工作速度为 σ(m/s)。

建立模型：

(1)下雪厚度模型。在下雪速度保持不变情况下，积雪在 t 秒内厚度增量 $\Delta d=\dfrac{1}{100}Rt$，因此 t 秒时积雪厚度公式为

$$d(t)=0.5+\frac{Rt}{100} \tag{1.3.1}$$

(2)除雪机工作速度模型。由问题所作的假设，并注意到$d=0$时，$v=10$；$d=1.5$时，$v=0$，可建立如下关系式

$$v(t)=10(1-\frac{2}{3}d(t)) \qquad 0.5\leqslant d(t)\leqslant 1.5$$

将(1.3.1)式代入上式，得t秒时除雪机工作速度公式

$$v(t)=\frac{10}{3}(2-\frac{Rt}{50}) \tag{1.3.2}$$

利用上述公式，可确定除雪机被迫停止工作的时间，由$v(t)=0$，得

$$t_0=\frac{100}{R} \tag{1.3.3}$$

也可求出除雪机工作t秒时的行驶距离

$$S(t)=\int_0^t v(u)\mathrm{d}u=\frac{10}{3}\int_0^t(2-\frac{Ru}{50})\mathrm{d}u=\frac{20}{3}t-\frac{R}{30}t^2 \tag{1.3.4}$$

现根据上面得到的几个公式分析以下两种情形：

情形A　大雪以每秒0.1cm的速度持续1h。

一个小时内，积雪新增厚度是$\frac{0.1\times 3600}{100}=3.6$(m)，再加上原来雪深0.5m，已远超过1.5m。只能考虑除雪机从雪厚0.5m到雪厚1.5m时工作时间和除雪距离。

从式(1.3.3)可算出：

$$t_0=\frac{100}{R}=\frac{100}{0.1}=1000(\mathrm{s})\approx 16.67(\mathrm{min})$$

即除雪机只能除雪16.67min就得停止工作，其行驶距离由式(1.3.4)，算出为

$$S(t_0)=S(1000)=\frac{20\times 1000}{3}-\frac{0.1\times(1000)^2}{30}$$
$$\approx 3333.33(\mathrm{m})=3.33(\mathrm{km})$$

除雪机在行驶了1/3路程时，雪深可达1.5m。

情况B　下雪速度以每秒0.025cm持续1h。

1h内，积雪新增加厚度恰是情形A的$\frac{1}{4}$，为0.9m，加上原来厚度0.5m，雪深超不过1.5m，除雪机始终可以工作。

现来考虑除雪机除雪10km所需时间，将$S=1000\times 10$m代入(1.3.4)式，有

$$10000=\frac{20}{3}t-\frac{0.025}{30}t^2$$
$$0.0025t^2-20t+30000=0$$

解方程求得　$t=2000(\mathrm{s})\approx 33.33(\mathrm{min})$，即只需33.33min除雪机就可清除完10km的积雪。

模型修改：原为问题简化，假设下雪速度保持不变，实际上，持续下1h的雪，下雪速度不可能恒定不变。现从实际问题出发，把假设做得更合理些。

假设下雪速度在前30min均匀增大到最大值0.1cm/s，在后30min逐渐减小到零速度。下雪速度变化情形如图1-3所示。

用$r(t)$表示t时刻下雪的速度，则

$$r(t)=\begin{cases}\dfrac{0.1t}{1800} & 0\leqslant t\leqslant 1800\\ a-\dfrac{0.1t}{1800} & 1800< t\leqslant 3600\end{cases}\tag{1.3.5}$$

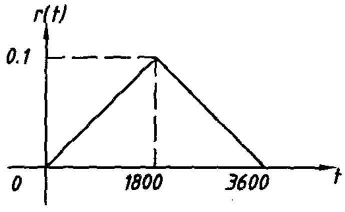


图 1-3 下雪速度变化图形

式中$r(t)$的单位为cm/s。利用在$t=1800$处$r(t)$的连续性，可知参数$a=0.2$。

对下雪速度积分就得到积雪厚度函数。当$t\leqslant 1800$s 时，有

$$d(t)=0.5+\frac{1}{100}\int_0^t\frac{0.1u}{1800}\mathrm{d}u=0.5+\frac{0.001}{3600}t^2\tag{1.3.6}$$

且$d(1800)=0.5+\dfrac{0.001\times(1800)^2}{3600}=0.5+0.9=1.4(\mathrm{m})$

即除雪机工作 30min 时，积雪厚度达到 1.4m。

当$t>1800$s 时，有

$$d(t)=1.4+\frac{1}{100}\int_{1800}^t\left(0.2-\frac{0.1u}{1800}\right)\mathrm{d}u=0.01\left(0.2t-\frac{0.1}{3600}t^2\right)-1.3\tag{1.3.7}$$

把$t=3600$s 代入，得

$$d(3600)=0.01\left(0.2\times 3600-\frac{0.1\times(3600)^2}{3600}\right)-1.3=2.3(\mathrm{m})$$

这表明在雪还下时除雪机已停止工作。

利用式(1.3.7)，取$d(t)=1.5$m，就可算出除雪机可以工作的时间

$$t\approx 35(\mathrm{min})$$

至于清理积雪的路程可由公式$v(t)=10\left(1-\dfrac{2}{3}d(t)\right)$建立除雪速度函数，再在$[0,35\times 60]$上积分即可求出。

本模型的关键是确定除雪机推进速度与积雪厚度的关系式，我们这里简单处理为是反比关系。如果考虑更复杂一些，还可建立更与实际接近的数学模型。

1.4 建立数学模型的思维方法

建立数学模型是一种创造性的思维过程，需要较好的观察能力、概括能力和综合分析能力。同时建模又经常是以小组为单位的集体活动，培养良好的交流、合作和表达能力也十分重要。

首先要学会应用集体思考法。就是让同伴畅所欲言，出主意，想办法，一条原则：对别人的意见不予批评和否决。在开放的环境中，充分交流，相互启发，吸取别人的长处，实现对建模方案的完善。特别重要的是善于交流，学会倾听。让对方把话说完，思考后再发表自己的意见。倾听时要努力把握对方讲话要点，做好笔记，用反馈方式确认自己是否真正理解对方思路，切忌武断评价，轻易使用“根本行不通”等词句。

其次，从逻辑推理角度来看，建模常用的思维方法有：抽象、归纳、演绎、类比、模拟等。

抽象就是忽略每个具体事物的特殊性，寻找事物发展变化的一般规律。这里主要是把一个实际问题如何抽象成为一个数学问题，即用数学语言表述给出的实际问题。

归纳是从特殊的、具体的认识推进到一般认识的一种思维方法，实际问题往往都已给出一

些观察数据或实验数据，归纳就是要用这些已知数据推断事物的内在联系和结构，常用的归纳法有数学归纳法、回归分析法和时序分析法等。

演绎是从抽象定义、定理出发，得到具体公式和定理的一种推理方法，这一方法有助于把蕴涵的内在性质揭示出来，帮助解决实际问题，例如赛程安排问题，在给出规划情况下，应用演绎法就可以设计出赛程的具体编排。

类比是在两类不同事物之间进行对比，找出若干相同或相似之处后，推测在其它方面也存在相同或相似的一种思维方法。在建模时经常会碰到这样情形：这一问题与我们熟悉的什么问题相同或相似。实际上，许多不同领域的问题在数学上有着相同数学结构。例如高大建筑的振动就可类比于弹簧振动。需要注意的是由于类比是从人们所掌握的事物的属性，来推测正在研究中的事物的属性，类比结果往往是猜测的，不一定可靠，但类比方法具有发现功能，是建模的重要思维方法。

模拟是仿照事物的结构特性和变化过程来研究其变化情形的思维方法，许多随机问题一般是用模拟方法加以处理。例如排队服务问题。计算机是实现模拟模型最好的工具，它的高速计算能力使模拟具有实用性和灵活性。要注意的是，模拟是一种仿真，本质上是试验性的，设计模拟模型只是为了解系统和收集信息，因此需要多设计模拟方式，使研究的问题得以较好解决。

使用好上述思维方法，除去平时多阅读一些有关数学建模书籍外，更主要的是在建立数学模型过程中勤于思考，勇于实践，在干中学，逐步增长自己的才干和能力。

第二章　初等模型

2.1　Fibonacci 数

“有小兔一对，若第二个月它们成年，第三个月生下一对小兔，以后每月生产一对小兔，而所生小兔亦在第二个月成年，第三个月生产另一对小兔，以后亦每月生产小兔一对。假定每产一对小兔必为一雌一雄，且均无死亡，试问一年后共有小兔几对？”

这是意大利数学家斐波那契(Fibonacci)在1202年所著《算法之书》(又译《算盘书》(Liberabaci))中的一个题目。首先观察一下头7个月的情况，为此，引入下述记号，用R_0表示原来的一对兔子，$R_{0i}(i=1,2,\cdots,12)$表示R_0第i个月生的一对小兔子，R_{0ij}表示第i对小兔子两个月以后又生的第j对小兔子，依次类推，可得表2-1。

表 2-1

月份		对数
1	R_0	1
2	R_0	1
3	R_0R_{01}	2
4	$R_0R_{01}R_{02}$	3
5	$R_0R_{02}R_{03}$ $R_{01}R_{011}$	5
6	$R_0R_{03}R_{04}$ $R_{01}R_{011}R_{012}$ $R_{02}R_{021}$	8
7	$R_0R_{04}R_{05}$ $R_{02}R_{021}R_{022}$ $R_{03}R_{031}$ $R_{01}R_{012}R_{013}$ $R_{011}R_{0111}$	13

从表2-1可知，七月份共有兔子13对；还可看出，从三月份开始，每月的兔子总数恰好等于它前面两个月的兔子总数之和。按这规律可写出数列：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144 可见一年后共有兔子144对。

这是一个有限项数列，按上述规律写出的无限数列就叫做Fibonacci 数列，其中的每一项

为Fibonacci数。

若设$F_1=1,F_2=1,F_3=2,F_4=3,F_5=5,F_6=8,\cdots\cdots$

则此数列就有下面的递推关系：

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\qquad(n=2,3,\cdots)$$

这个关系可用数学归纳法来证明，其中的通项

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

是由法国数学家比内(Binet)求出的。

与Fibonacci数列紧密相关的一个重要极限是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\tag{2.1.1}$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618\tag{2.1.1'}$$

表面上看，Fibonacci数列似乎是一种游戏，实际上，这个数列在许多自然和社会现象中频频出现，植物的叶序、菠萝的鳞片、树枝的生长、蜜蜂进蜂房的路线、钢琴键盘、经济复兴和衰退的规律、证券市场的涨跌幅度等等都与这个数列密切相关，被人称为Fibonacci之谜。

可以证明，由Fibonacci数列F_n所形成的数列$\left\{\frac{F_{n-1}}{F_n}\right\}$有极限。令

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=\lambda$$

则由$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$得

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{F_n}{F_{n-1}+F_n}=\frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_n}+1}$$

令$n\to\infty$，得

$$\lambda=\frac{1}{\lambda+1}$$

即

$$\lambda^2+\lambda-1=0$$

解此方程得

$$\lambda=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$$

在优化方法中，为了求搜索区间，可以采用0.618法或Fibonacci法。0.618法实际上是用不随n而变的0.382和0.618来代替随n而变的F_{n-1}/F_{n+1}和F_n/F_{n+1}，有关这方面内容在非线性规划课中均有论述。

2.2 商人们怎样安全过河

三名商人各带一个随从乘船渡河，现有一只小船只能容纳两个人。由他们自己划行。若在

河的任一岸的随从人数多于商人，他们就可能抢劫财物。但如何乘船渡河由商人决定。试给出一个商人安全渡河的方案。

这类智力游戏经过一番逻辑思索就可以找出解决问题的方法，但如果建立一种数学模型可用来解决更为广泛的同类问题。

该问题可视为一个多步决策过程，每一步在保证安全（两岸的商人数不少于随从人数）的前提下做出决策，在有限步内使所有人全部过河。

1．模型建立

设x、y和z分别表示此岸的商人、随从和船的数量，则x、y取值为0,1,2,3；z取值为0,1。用三维数组(x,y,z)表示状态，安全渡河条件下的状态集合称为允许状态集合，记为S，则

$$S=\{(x,y,z)\mid x=0,\ 3\ \text{或}\ x=y=1,2\} \tag{2.2.1}$$

允许决策集合记为D，由小船的容量可知

$$D=\{(x,y,1)\mid x+y=1\ \text{或}\ 2\} \tag{2.2.2}$$

则第k次状态$S_k=(x_k,y_k,z_k)\in S$与第k次决策$d_x=(x_k,y_k,1)\in D$的变化规律为

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^k d_k \tag{2.2.3}$$

式(2.2.3)为状态转移律，这样制订安全渡河方案归结为如下各步决策问题：

求决策$d_k\in D$，$k=1,2,\cdots,n$，使状态$S_k\in S$，按照转移律(2.2.3)，由初始状态$S_1=(3,3,1)$经n步到状态$S_{n+1}=(0,0,0)$。

2．模型求解

根据式(2.2.1)～(2.2.3)可编程用计算机求解，对这个简单问题可直接求解。

第一步决策d_1可取(0,1,1)、(0,2,1)、(1,1,1)，如取(0,1,1)，则d_2只能是d_1，又回到S_1，故可取d_1为(0,2,1)或(1,1,1)，则d_2为(0,1,1)或(1,0,1)。下面是解答之一。

$$S_1=(3,3,1)\xrightarrow{d_1=(0,2,1)}(3,1,0)\xrightarrow{d_2=(0,1,1)}(3,2,1)\xrightarrow{d_3=(0,2,1)}(3,0,0)\xrightarrow{d_4=(0,1,1)}(3,1,1)\xrightarrow{d_5=(2,0,1)}(1,1,0)\xrightarrow{d_6=(1,1,1)}(2,2,1)\xrightarrow{d_7=(2,0,1)}(0,2,0)\xrightarrow{d_8=(0,1,1)}(0,3,1)\xrightarrow{d_9=(0,2,1)}(0,1,0)\xrightarrow{d_{10}=(0,1,1)}(0,2,1)\xrightarrow{d_{11}=(0,2,1)}(0,0,0)=S_{12}$$

3．图解法求解

在xoy平面坐标系中，画出图2-1那样的方格，方格点表示状态$S(x,y)$，允许状态用圆点标出。允许决策d_k是沿方格移动1或2格，规定：

1）k为奇数时，向左或下方移动；

2）k为偶数时，向右或上方移动；

3）每次移动必须落在允许状态即点“·”上。

图2-1给出了一种状态转移过程，经过决策$d_1,d_2\cdots\cdots d_{11}$实现了$S_{12}(0,0)$。按这个结果容易制定出过河方案，细心的读者会发现，应有4种状态转移过程。

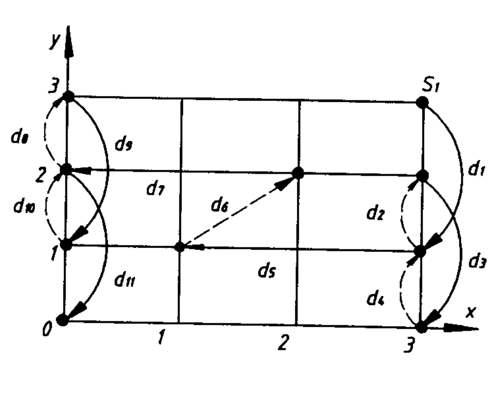


图2-1

2.3 雨中行走问题

人们在外出行走，途中遇雨，未带雨伞势必淋雨。自然就会想到，走多快才会少淋雨呢？

严格说来此问题比较复杂，我们这里只讨论简单情形，只考虑人在雨中沿一直线从一处向另一处行进时，雨的速度已知，问行人走的速度多大才能使淋雨量最少？

为了使问题解决时简单，适当选择坐标系，用$(u,0,0)$表示人的速度，(v_x,v_y,v_z)表示雨速，l表示行走的距离，则行走的时间为l/u。由于人体外表形状比较复杂，我们假设人体为长方体，其前、侧、顶的面积之比为$1:L:T$。则单位时间淋雨量为

$$(|u-v_x|,|0-v_y|,|0-v_z|)\cdot(1,L,T)=|u-v_x|+|v_y|L+|v_z|T$$

总淋雨量为

$$R(u)=\frac{l}{u}(|u-v_x|+a)$$

其中　　$a=|v_y|L+|v_z|T>0$

因此，雨中行走问题可抽象成下述数学问题：

已知，l,v_x,a，求u为何值时$R(u)$最小？

下面分几种情况讨论：

(1) $v_x>0$时

$$R(u)=\begin{cases}\dfrac{l}{u}(v_x-u+a)=\dfrac{l(v_x+a)}{u}-l & (u\leqslant v_x)\\[2ex]\dfrac{l}{u}(u-v_x+a)=\dfrac{l(a-v_x)}{u}+l & (u>v_x)\end{cases}$$

当$v_x>a$时，$R(u)-u$的图形如图2-2

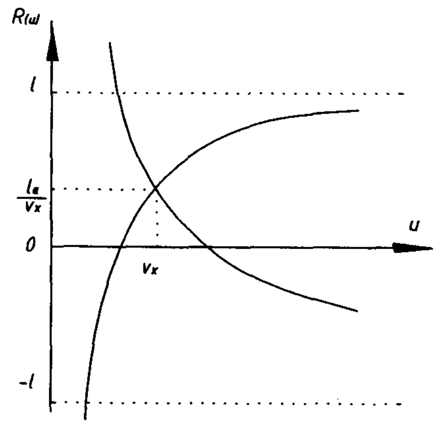


图2-2

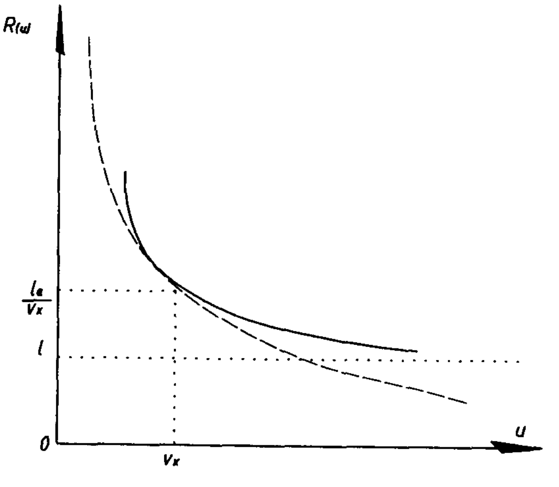


图2-3

当$v_x<a$时，$R(u)-u$的图形如图2-3。易知，仅当$v_x>a$时，$u=v_x$才使$R(u)$取最小值

$$R_{\min}=la/v_x$$