高等学校数学系列教材

概率统计辅导与习题精解

哈尔滨工程大学应用数学系 编

哈尔滨工程大学出版社

高等学校数学系列教材

概率统计辅导与习题精解

哈尔滨工程大学应用数学系　编

施久玉　主审

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计辅导与习题精解/哈尔滨工程大学应用数学系编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2003

ISBN 7-81073-501-2

Ⅰ.概…　Ⅱ.哈…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 060544 号

内 容 简 介

本书是为配合哈尔滨工程大学应用数学系编写的《概率论与数理统计》教材而编写的。每章内容包括:基本内容、典型例题、练习题和习题解析。基本内容归纳得既简洁又翔实,使读者明确要求,抓住学习重点;选编的例题和习题较为典型,广泛而不重复,与教材紧密衔接,练习题均给出了简答;每章末给出了教材中习题的详尽解析,读者可在独立思考的基础上,进行对照参考。

本书可作为高等工科院校师生的数学参考书,也可作为报考硕士研究生的数学复习资料。

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行
哈尔滨市南通大街145号　哈工程大学11号楼
发行部电话(0451)82519328　邮编:150001
新　华　书　店　经　销
肇 东 粮 食 印 刷 厂 印 刷

*

开本　850mm×1 168mm　1/32　印张 8.25　字数 208 千字
2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—5000 册
定价:12.00 元

前　　言

《概率论与数理统计辅导》是哈尔滨工程大学高等学校数学辅导系列丛书之一。概率统计是高等工科院校数学基础课程，也是硕士研究生入学考试数学必考科目，为了配合哈尔滨工程大学应用数学系编写的《概率论与数理统计》教材，适应广大读者学习和复习的需要，我们编写了本书。

本书每章由基本内容、典型例题、练习题及其简答和教材中习题解析组成。本书旨在帮助、指导广大读者把握基本概念和基本解题方法。在此基础上能触类旁通，融会贯通。全书内容丰富，题型基本，题目的选取精典且富有启发性，与教材紧密衔接，是课堂教学内容的补充和提高。编者相信，读者只要认真阅读演练本书，会有不小裨益。

本书可作为高等工科院校师生的教学参考书，亦可作为硕士研究生入学数学考试的复习参考资料。

本书由哈尔滨工程大学应用数学系陈林珠（第一章），王锋（第二章），郑晓阳（第三章），沈艳（第四章），张晓威（第五、六章），于涛（第七、八章）集体编写，全书由王锋统稿，施久玉教授主审。

本书在编写过程中，得到了哈尔滨工程大学应用数学系广大教师的关心和热情支持，编者在此表示衷心的感谢。本书中有难免存在不妥之处，恳切各位同行和读者多提宝贵意见，以便再版时修改。

编　者

2003 年 7 月

目　　录

第一章

随机事件及其概率

第一节　基本内容

一、样本空间　随机事件

1. 随机试验

具有以下特点的试验称为随机试验：

(1) 在相同条件下可重复进行；

(2) 全部可能的结果是明确的；

(3) 事先无法确定试验的哪个结果会出现.

我们常用字母 E 表示随机试验.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为样本空间，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果称为样本点，记为 e. 此时样本空间可记为 $S = \{e\}$.

3. 随机事件

在每次试验中可能发生也可能不发生的现象称为随机事件. 用大写字母 A、B、C 等记之. 随机事件是样本空间 S 的子集. 在每次试验中，当且仅当某一子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生.

由一个样本点组成的单点集称为基本事件. 样本空间 S 包含所有的样本点，在每次试验中它总是发生，称为必然事件. 空集 $\varnothing$ 中不包含任何样本点，它也是样本空间的一个子集，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

4. 事件间的关系与事件的运算

事件的表达	事件的关系、运算
A 发生必导致 B 发生	$A\subset B$
A 与 B 中至少有一个发生	$A\cup B$
A 与 B 都发生	$A\cap B$,(或 AB)
A 发生而 B 不发生	$A-B$,(或 $A\bar{B}$)
A 与 B 不能都发生(互不相容)	$AB=\varnothing$
A 的对立事件发生,A 不发生	$\bar{A}$,$(A\cup\bar{A}=S)$
A 与 B 恰好有一个发生	$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$

5. 事件的运算规律

交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

德·摩根律(对偶律)　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

二、频率与概率

1. 频率

在相同条件下,随机事件 A 在进行 n 次重复试验中出现的次数,称为事件 A 发生的频数,记为 n_A. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率,记作 $f_n(A)$.

频率的基本性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(S)=1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两不相容的事件，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} f_n(A_i)$$

当 n 相当大时，频率 $f_n(A)$ 稳定在某个常数附近，这个常数称为事件 A 发生的概率.

2. 概率

设 E 是一个随机试验，S 是其样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，且 $P(A)$ 满足下列条件：

(1) 对每个事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$(非负性)；

(2) $P(S) = 1$(规范性)；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \text{(可列可加性)}$$

3. 概率的性质

(1) $P(\varnothing) = 0$；

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \text{(有限可加性)}$$

(3) 若事件 A、B 满足 $A \subset B$，则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geqslant P(A)$$

(4) 对任一事件 A，$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$；

(5) 对任两事件 A、B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

上式称为加法公式，特别地当事件 A 与 B 互不相容时有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(6) 对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k)$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

三、等可能概型(古典概型)

1. 等可能概型

若随机试验 E 具有以下特点:

(1) 样本空间只有有限个样本点;

(2) 每个样本点(基本事件)发生的可能性相同.

称这种试验为等可能概型或古典概型.

2. 等可能概型中事件概率的计算

设事件 A 为等可能概型中的任一事件,若样本空间 S 中含有 n 个样本点,A 中含有 m 个样本点,则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

即

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点数 } m}{\text{样本空间所包含的样本点总数 } n}$$

3. 几何概率

设点必落在平面区域 S 中,且落在 S 中各处的可能性都相同,区域 g 是 S 的一部分,则点落在区域 g 中的概率定义为 g 的面积与 S 的面积之比

$$P(\text{点}\in g)=\frac{g\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}$$

注:若 S 是区间,则公式中的面积是指区间的长度;若 S 是空间区域,则公式中的面积是指空间区域的体积.

计算古典概率时,要弄清样本空间是怎样构成的,判断有限性和构成样本空间的每个基本事件出现一定要是等可能的,忽视了这一点,将会导致错误的结果.

例如:同时掷两颗骰子,求出现的点数之和为 7 的概率.

解 设 A 表示“出现点数之和为 7”的事件.

方法 1:用同时掷两颗骰子的点数之和构成样本空间,为

$$S_1=\{2,3,4,5,6,7,\cdots,12\}$$

共有 11 个样本点，而 $A = \{7\}$，所以 $P(A) = \dfrac{1}{11}$.

方法 2：把两颗骰子标上号码 1 号和 2 号，如用 (1,4) 表示 1 号骰子出现点数 1，2 号骰子出现点数 4，则试验结果构成的样本空间为

$$S_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\}$$

共有 36 个样本点，而

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,3),(6,1)\}$$

所以
$$P(A) = \frac{7}{36}$$

上述两种做法中方法 2 是正确的，而方法 1 是错误的，作为古典概率，S_1 中各样本点的出现不是等可能的. 而 S_2 中各样本点的出现是等可能的.

四、条件概率

1. 条件概率

设 A、B 为两个事件，且 $P(A) > 0$，称

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率.

条件概率符合概率的三个条件：

(1) $P(B \mid A) \geqslant 0$;

(2) $P(S \mid A) = 1$;

(3) 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$，为两两互不相容事件，则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \mid A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_n \mid A)$$

显然关于概率的性质都适用于条件概率.

2. 乘法公式　设 $P(A) > 0$，则有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$$

设 A_1,A_2,A_3 为三个事件,且 $P(A_1A_2)>0$,则有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)$$

更一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 为 n 个事件,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

求 $P(AB)$ 与求 $P(B\mid A)$ 的问题的区别在于:

(1) 计算 $P(AB)$ 的样本空间为 S,计算 $P(B\mid A)$ 的样本空间为 A;

(2) 凡涉及事件 A 与 B"同时"发生用 $P(AB)$,有"包含"关系或主从条件关系的用 $P(B\mid A)$.

3. 全概率公式

(1) 样本空间的一个划分

设 S 为试验 E 的样本空间,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件.若 $B_i\cap B_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=S$,则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.

对每次试验而言,事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中必有且只有一个发生.

(2) 全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的一个事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(B_i)>0(1,2,\cdots,n)$,则有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

由诸多原因可引发某种结果,而该结果又不能简单地看作这诸多事件的和,这样的概率问题属于全概类型,用全概率公式求解的概率问题关键在于寻找划分 $B_1,\cdots,B_n$.而 $B_1,\cdots,B_n$ 都是导致 A 发生的原因之一,所以用找原因的方法找 $B_1,\cdots,B_n$ 比较方便.

4. 贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一

个划分,且 $P(A)>0, P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

在全概率公式和贝叶斯公式中,B_i 是导致结果 A 的原因:由因溯果用全概率公式,由果溯因用贝叶斯公式.

五、独立性

1. 设 A, B 是两个事件,若有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A, B 为相互独立的事件.

2. 设 A、B、C 为三个事件,若下面等式成立:

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{cases}$$

则称此三事件两两独立.

当 A、B、C 三事件两两独立时,不一定成立下式.

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

3. 当 A、B、C 两两相互独立,且有

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

时,称 A、B、C 三事件相互独立.

4. 推广到更一般情形:设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件.若对于所有可能的 $1 \leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r \leqslant n(r=2,3,\cdots,n)$ 成立等式

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_r})=P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_r})$$

则称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 相互独立.

在实际应用中,事件的独立性往往不只是根据定义,而是根据实际意义来判断.

注意:

(1)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立$\Rightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立.

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立$\nRightarrow A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(2) 四对事件 $A,B;\bar{A},B;A,\bar{B};\bar{A},\bar{B}$ 之中有一对相互独立,则另外三对也相互独立.

(3) 独立与互不相容(互斥)的区别:若 $P(A)>0,P(B)>0$,则 A,B 相互独立与互不相容不能同时成立.

第二节　典型例题

一、单项选择题

例 1　设 A,B,C 为三事件,下述运算关系错误的是(　　).

A.若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则 $A=B$

B.若$(A\cup B)\subset C$,则 $A=C-B$

C.$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$

D.$(AB)(A\bar{B})=\varnothing$

解　显然应选 B.

例 2　设 A,B 为两事件,且已知 $P(B)=0.5,P(A\cup B)=0.7$,则 $P(A\bar{B})=($　　$)$.

A.0.4　　　B.0.3　　　C.0.2　　　D.0.1

分析:由于 $AB\subset A$,且 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,所以 $P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)=0.7-0.5=0.2$.

解　应选 C.

例 3　设 A,B,C 三事件两两独立,则 A、B、C 相互独立的充要条件是(　　).

A. A 与 BC 独立　　　　B. AB 与 $A\cup C$ 独立

C. AB 与 AC 独立　　　　　D. $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 独立

分析:由题设知

$$P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C)$$
$$P(BC) = P(B)P(C)$$

所以 A、B、C 相互独立的充要条件是

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$
$$\Leftrightarrow P(ABC)$$
$$= P(A)P(BC) \Leftrightarrow A \text{ 与 } BC \text{ 独立}.$$

解　选 A.

例 4　设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$. A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A) = (\quad)$.

A. 1　　　　B. $\frac{8}{9}$　　　　C. $\frac{1}{3}$　　　　D. $\frac{2}{3}$

分析:由题设有 $P(AB) = P(A)P(B), P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$,且 $P(\bar{A}\,\bar{B}) = \frac{1}{9}$,所以有

$$P(\bar{A}\,\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{9}$$
$$P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB) \Rightarrow P(A) = P(B)$$
$$1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = \frac{1}{9}$$
$$\Rightarrow 1 - 2P(A) + P^2(A) = \frac{1}{9}$$
$$\Rightarrow P(A) - 1 = \pm\frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

(这是由于 $P(A) \leqslant 1$)

解　应选 D.

二、填空题

例1 掷三颗骰子,则3个点数能排成公差为1的等差数列的概率为________.

分析:由于每个骰子有6个点数,因此基本事件共有$6\times6\times6=216$个.而掷出点数能构成公差为1的等差数列由1,2,3或2,3,4或3,4,5或4,5,6组成,于是所求概率为$\frac{4\times3!}{216}=\frac{1}{9}$.

解 应填$\frac{1}{9}$.

例2 设10件产品中有4件不合格品,从中任取两件,已知所取两件产品中有一件是不合格品,则另一件也是不合格产品的概率为________.

分析:设事件A表示所取两件产品中有一件是不合格品的事件,B表示另一件也是不合格品的事件,则AB表示所取两件产品都是不合格品的事件

$$P(A)=[C_4^1C_6^1+C_4^2]/C_{10}^2\quad P(AB)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$$

由条件概率公式知

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

解 应填$\frac{1}{5}$.

例3 设工厂甲和工厂乙生产的产品的次品率分别为1%和2%,现从甲厂和乙厂的产品分别占60%和40%的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该产品属甲厂生产的概率是________.

分析:设A为抽到次品事件,B_1,B_2分别是甲厂和乙厂产品,则由全概公式有

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)$$

$$= P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2)$$
$$= 0.6 \times 0.01 + 0.4 \times 0.02 = 0.014$$

再由贝叶斯公式有

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A)}$$
$$= \frac{0.06}{0.014} = \frac{3}{7}.$$

解 应填$\frac{3}{7}$.

例4 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立,$P(A_i) = p_i, i = 1,2,\cdots, n$. 则$A_1, A_2, \cdots, A_n$中一个也不发生这一事件的概率是________.

分析:$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A})_n = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$.

解 应填$\prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$.

三、计算题

例1 设两事件A、B满足条件$P(AB) = P(\bar{A}\,\bar{B})$,且$P(A) = p$,求$P(B)$.

解 $P(\bar{A}\,\bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$$

由已知$P(\bar{A}\,\bar{B}) = P(AB)$代入上式,得

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - p$$

例2 将4个红球和4个黄球随机地分别装在两个盒中,每盒4球,求每盒中各有2个红球的概率.

分析:从8个球中任取4个放在一盒中,其余球自然放在另一盒中,所以基本事件都有C_8^4种,而从4个红球中任取两个,从黄球中任取2个事件有$C_4^2C_4^2$种.