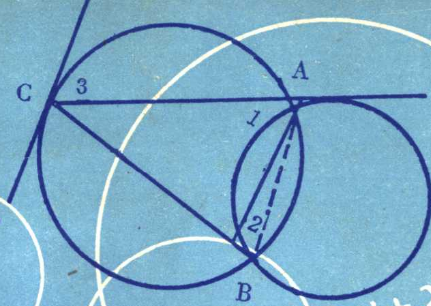
数理化基础知识

M



$$\begin{cases} x^2+xy+x=14 \\ y^2+xy+y=28 \end{cases}$$

13. 13-16/58

代　数

（三）

山东科学技术出版社

数理化基础知识

代　　数

（三）

烟台师专编写

山东科学技术出版社

一九八〇年·济南

内容提要

本书是《数理化基础知识》中的一本，主要介绍了排列与组合、二项式定理、概率初步、统计初步、复数、线性方程组、电子计算机、数的进位等基础知识。书中对重点、难点都做了较详细地说明，并附有较多的例题和习题，以提高广大读者分析问题和解决问题的能力。

本书可供中等业余学校作教材用，也可作为知识青年和干部的自学用书，还可供考大学的青年和在校学生学习参考。

数理化基础知识
代　数
（三）
烟台师专编写
*
山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本　9.75印张　201千字
1980年7月第1版　1980年7月第1次印刷
印数：1—86,200
书号 13195·29　定价 0.80 元

编者的话

数学、物理、化学是重要的基础学科。它已经渗透到人们的全部实践活动。纵览宇宙，运算天体，探索粒子之微，揭示生命之谜，从高深抽象的科学理论，到人们丰富繁杂的日常生活无处不用数理化。今天，在向四化进军中，越来越显示出学好数学、物理、化学的重要作用。

从提高整个中华民族的科学文化水平出发，为配合业余教育的全面开展，满足广大读者自学的急切需要，特别是为了帮助考大学的青年和在校学生加深对课本知识的理解，提高分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套《数理化基础知识》。其中，《代数》3册，《几何》、《三角》、《解析几何》、《微积分》各一册；《物理》4册；《化学》2册。

在编写过程中，我们根据成人和速成的特点，参照教育部现行中学教学大纲的内容，由浅入深，循序渐进，着重讲清数学、物理、化学的基本概念和基本知识，对每一章中的关键性问题都做了重点介绍，并重视了运算技巧的训练和分析总结解题规律。每册书都选有一定数量的综合性习题，在选习题时还注意了习题的典型性，以培养读者举一反三的能力。每章后有小结，难度大的习题有提示，每册书末有答案备查。

这套基础知识丛书，可供中等业余学校作教材用，也可作为知识青年和干部的自学用书，还可供考大学的青年和在校学生学习参考。

目　录

第九章　排列与组合

在生产斗争和科学实验中，经常遇到属于排列与组合一类的问题. 例如，5 个拨号的电话机能安排多少个电话用户，每一电话机的号码就是一个 5 个数的排列. 又如，苹果园中把不同苹果品种进行嫁接有多少种不同方法，等等.

排列与组合是一种重要的数学方法，本章在阐明排列与组合意义的基础上，引出求排列数和组合数的计算公式，并对一些典型问题的解法以及排列与组合的应用问题进行分析，以使读者能掌握这一数学方法.

§9·1　加法原理和乘法原理

在推导排列与组合的计算公式以及解决有关的应用问题时，要经常地用到加法原理和乘法原理. 只有首先掌握这两个原理，才能为进一步学习打下基础.

1.加法原理

【例 1】甲地到丙地必须绕过乙地，若从南边绕道有 3 条路可走，从北边绕道有 2 条路可走，问从甲地到丙地共有几种走法？

解　由图 9·1 可以看出，从甲地到丙地共有的走法是由南边绕道的走法与北边绕道的走法之和：

$$3+2=5.$$

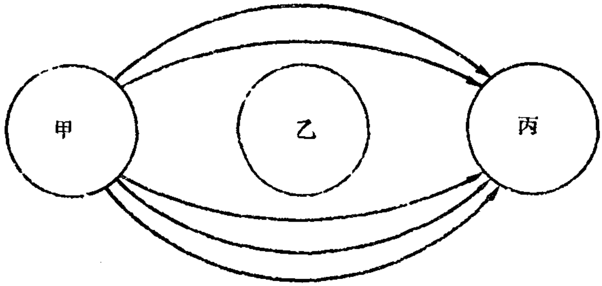


图 9·1

由此，启发我们作如下的一般结论．

加法原理：设完成一件事有 k 种不同的方式，只要选择任何一种方式中的一种方法，这件事就可以完成．如果已知其中第一种方式有 n_1 种方法，第二种方式有 n_2 种方法，……，第 k 种方式有 n_k 种方法，并且这 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 种方法里，任何两种方法都不相同，则完成这件事就有

$$N=n_1+n_2+\cdots+n_k$$

种不同的方法．

在例 1 中，$k=2$，即两种不同的方式（南边绕道，北边绕道），$n_1=3$（南边绕道 3 种走法），$n_2=2$（北边绕道有 2 种走法）．

2．乘法原理

【例 2】由甲地到丙地必须经过乙地，若从甲地到乙地有三条道路可走，从乙地到丙地有两条道路可走，问从甲地到丙地共有几种走法（图9·2）？

解 从甲地到乙地有三种走法，在此三种走法中选定一种走法到达乙地，而从乙地到达丙地还有两种走法，所以，对于从甲地到乙地的一种走法再到丙地就有两种走法，而从甲

地到乙地共有三种走法，因此，从甲地经乙地到丙地共有

$$3 \times 2 = 6$$

种走法.

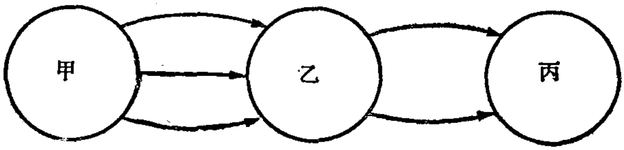


图 9·2

若用 A_1, A_2, A_3 表示从甲地到乙地的三种走法，用 B_1，B_2 表示从乙地到丙地的两种走法，则这六种不同走法就是

$$A_1—B_1, \ A_2—B_1, \ A_3—B_1,$$
$$A_1—B_2, \ A_2—B_2, \ A_3—B_2$$

由此，启发我们作如下的一般结论.

乘法原理：如果完成一件事，必须通过 k 个步骤，而完成第一步有 n_1 种不同方法，完成第二步有 n_2 种不同方法……，完成第 k 步有 n_k 种不同方法，那么完成这件事总共有

$$N = n_1 n_2 \cdots n_k$$

种不同方法.

在例 2 中，$K = 2$（第一步，从甲地到乙地；第二步，从乙地到丙地），$n_1 = 3$（从甲地到乙地共 3 条路可走），$n_2 = 2$（从乙地到丙地共 2 条路可走）.

必须注意分清加法原理和乘法原理的不同. 虽然都是完成一件事，但一种是用不同的方式，而每一方式都能完成这件事，这时求完成这件事的所有方法就用加法原理；另一种是分若干个步骤来完成，每一步骤的完成并没有把这件事完成，这时求完成这件事的所有方法就用乘法原理. 因此，何

时应用加法原理，何时应用乘法原理可按“分类加，分步乘”的口诀来定.

【例3】一位同志要从2本不同的政治理论书，3本不同的文艺书，4本不同的科技书中各选取一本，问共有多少种不同的选法？

解 要完成“从这三类书中各选一本”这件事，就必须连续完成“选取一本政治理论书”，“选取一本文艺书”，“选取一本科技书”这三步，因此，由乘法原理可得到，共有

$$2\times3\times4=24$$

种不同选法.

习 题 1

1．从甲地到乙地，可以坐火车，可以坐汽车，也可以乘轮船．一天中，火车有4班，汽车有2班，轮船有3班，问乘坐不同班次的车或船，共有几种走法？

2．如果不同性别（男、女），不同工种（共四个工种：车工、电工、锻工、其它）劳动保护用具也不同，那么，共要准备多少种劳动保护用具？

3．甲乒乓球队有队员10人，乙乒乓球队有队员8人，如果从两队中各选一人进行一场单打比赛，共有多少不同的选人方法？

4．有4个小组，每组10人，由每组选出一名代表去参加一次学术报告会，问共有多少种选法？

§9·2 排 列

1．定义

【例1】从写有数字2、4、6的三张卡片中，每次

取出两张来排成一个两位数，问能排成多少个两位数？

解 具体把这些两位数排出来就是：

24，42，62，

26，46，64.

上面的例子就是从 3 个不同的数字中，每次取出 2 个，按个位和十位的次序排成一个两位数．这些不同的数字称为元素．本例就是求从 3 个不同的元素中，每次取出两个元素排列起来，共有多少种不同排法的排列问题．

定义： 从 n 个不同元素中，每次取出 r（$1\leqslant r\leqslant n$）个元素，按照一定的顺序排成一排，叫做**从 n 个不同元素里每次取出 r 个元素的排列**．

（1）当 $r=n$ 时，称为全排列；

（2）当 $r<n$ 时，称为选排列．

上例中 $n=3$，$r=2$，由于 $r<n$，所以是选排列．

上例中，若每次取出 3 张来，问能排成多少个 3 位数？那就是全排列问题了．把这些 3 位数写出来就是：

246，426，624，

264，462，642.

全排列和选排列都是排列，所不同的是，全排列每次把全部元素都取出来排列；而选排列每次取部分元素来排列．

【例 2】飞行在北京——上海——广州航空线上的民航飞机要准备多少种不同的飞机票？

解 本题是从三个不同元素（北京、上海、广州）每次取出两个来按次序（起点站、终点站）的排列问题，一种排列就是一种飞机票．它们就是：

北京——上海，上海——北京，广州——北京，

北京——广州，上海——广州，广州——上海．

由排列的定义可知，从 n 个不同元素中，每次取 r 个元素的一个排列，就是要完成以下两步：

（1）取出 r 个元素来；

（2）把 r 个元素按一定顺序排列．那么，什么样的排列算是相同的排列，什么样的排列算是不同的排列呢？

不同的排列：元素不完全相同，或元素完全相同而顺序不同；

相同的排列：元素完全相同，且顺序也相同．

如例 1 中的排列，24，26，64等元素不完全相同是不同的排列，24 和 42 虽元素完全相同，但顺序不同也是不同的排列．

2．求排列数的计算公式

（1）实例．

【例 3】从 a,b,c,d 四个字母中，每次取出：①2个；②3 个；③ 4 个不同字母，问能组成多少种不同的排列？

解 ①每次取出 2 个字母来排列，可看成有两个位子

1　　2

把所取出的两个字母放到这两个位子上就是一个排列，所问的是这样的排列一共有多少种．我们可以这样来考虑：

先取一字母放到第一个位子上，a，b，c，d 四个字母都可取，共有 4 种方法，当第一个位子上的字母放好后，再取一字母放到第二个位子上就只有 3 种方法了，由乘法原理可得到

$$4 \times 3 = 12$$

种不同方法，即排列种数为12种.

采用记号 $A_4^2$① 来记从 4 个元素中每次取出 2 个的排列种数，即

$$A_4^2 = 4 \times 3 = 12.$$

把这12种排列写出来，就如图9·3所示.

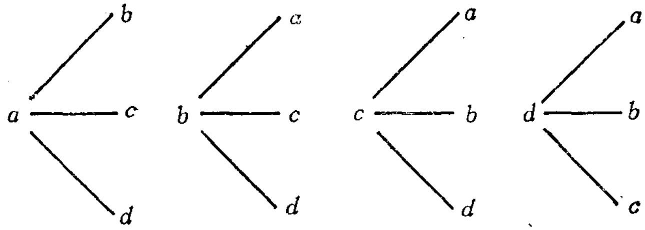
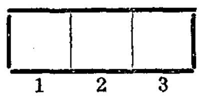


图 9·3

用这种图来写出所有的排列是很清楚的，它直观地告诉我们求排列种数为什么要用乘法. 我们称这种图为树图（象树一样的图），用树图写出所有排列，按次序一一写出，井然有序，不会遗漏，也不会重复.

②每次取出 3 个字母来排列，就有三个位子



排第一个位子有 4 种方法，再排第二个位子有 3 种方法，最后排第三个位子有 2 种方法，由乘法原理可得到

$$A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

---

① A是*Arrangment*的第一个字母.

用树图把这些排列写出来，就如图9·4所示。

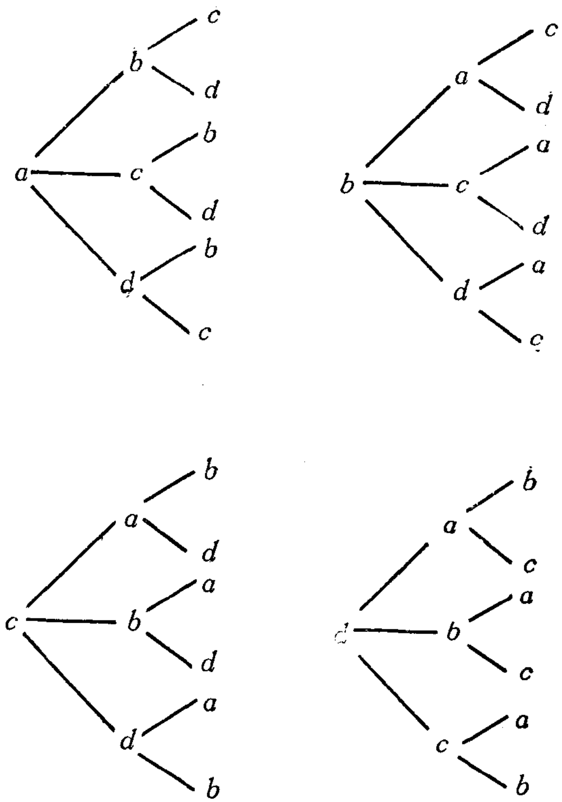


图 9·4

③每次取出 4 个字母来排列是全排列，求排列种数的思考方法和上面的选排列是相同的，共有

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

种排列。

4 个元素每次全取的排列种数用记号 P_4 ①来表示，即

$$P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

显然，P_4 就是 A_4^4，即 $P_4 = A_4^4$.

为简化全排列的写法，现引进阶乘的概念.

定义：从 1 直到 n 的自然数的连乘积，称为 n 的阶乘，记为 $n!$. 即

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

同时，规定：$0! = 1$.

由此，P_4 可简写为

$$P_4 = 4!.$$

(2) 现在来求出从 n 个不同元素中每次取出 r 个 $(1 \leqslant r \leqslant n)$ 元素的排列种数公式.

想象有 r 个位子

1	2	3	……	r

第一次取一元素放到第一个位子上有 n 种方法，当第一个位子放好后，第二次取一元素放到第二个位子上有 $(n-1)$ 种方法，当第二个位子放好后，第三次取一元素放到第三个位子上有 $(n-2)$ 种方法，……当第 $(r-1)$ 个位子放好后，第 r 次取一元素放到第 r 个位子上有 $[n-(r-1)] = n-r+1$ 种方法. 由乘法原理可得到

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad (1 \leqslant r \leqslant n).$$

由此可见，从 n 个不同元素中，每次取出 r 个元素的排列种数等于连续的 r 个自然数的连乘积，其中最大的一个是

---

① P 是 *Permutation* 的第一个字母.

n. 当 $r=n$ 时，成为全排列，这时公式就成为

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)$$
$$=n(n-1)(n-2)\cdots\times 2\times 1=n!;$$

∴ 全排列的种数公式为

$$p_n=n!.$$

(3) 为了以后解排列问题时计算上的需要，我们先熟悉一下关于 A_n^r，P_n 的运算。

【例 4】计算 $\dfrac{A_{16}^3}{2A_8^4}$ 的值。

解 $\dfrac{A_{16}^3}{2A_8^4}=\dfrac{16\times15\times14}{2\times8\times7\times6\times5}=\dfrac{3\times2}{6}=1$.

【例 5】计算 $\dfrac{8!-6!}{7!-6!}$ 的值。

解 $8!=8\times7\times6\times5\times\cdots\times2\times1=8\times7\times6!$,

$7!=7\times6\times5\times\cdots\times2\times1=7\times6!$.

分子分母中都含有 $6!$ 这一因数，可先约去 $6!$ 再计算，

$$\frac{8!-6!}{7!-6!}=\frac{8\times7\times6!-6!}{7\times6!-6!}=\frac{6!(8\times7-1)}{6!(7-1)}$$

$$=\frac{56-1}{7-1}=\frac{55}{6}=9\frac{1}{6}.$$

注：$(n+1)!=(n+1)n!=(n+1)n(n-1)!=\cdots$ 这种变换在计算中很有用，应该熟悉它。

【例 6】解方程 $A_9^x=6A_9^{x-2}$.

解 原方程为