College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

华中科技大学数学系

概率论与数理统计
学习辅导与习题全解

华中科大·二版

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

概率论与数理统计
学习辅导与习题全解

华中科大·二版

华中科技大学数学系

万建平　刘次华

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习辅导与习题全解：华中科大:/华中科技大学数学系. —北京：高等教育出版社，2003.8
ISBN 7-04-011954-4

Ⅰ.概… Ⅱ.华… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 055764 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	煤炭工业出版社印刷厂		
开　　本	880×1230　1/32	版　　次	2003 年 8 月第 1 版
印　　张	12.75	印　　次	2003 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	360 000	定　　价	16.00 元

前　　言

概率论与数理统计是大学理工科、经济学、管理学等非数学类专业的基础课，也是硕士研究生入学考试的必考科目．为了帮助在校大学生学习及考研的同学复习好概率论与数理统计，我们依据国家教育部制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》及最新的《全国工科、经济学硕士生入学考试数学考试大纲》，并结合华中科技大学数学系主编的教材《概率论与数理统计》（第二版）（高等教育出版社 2003 年出版）而编写了本学习辅导与习题全解参考书．

全书紧扣教材，共分九章，内容包括：随机事件和概率；随机变量及其分布；多维随机变量分布；数字特征；极限定理；数理统计的基本概念；参数估计；假设检验；方差分析与回归分析．每章包括下列四个部分：

一、**基本要求与内容提要**　基本要求和内容提要力求做到基本要求明确，内容提要简练、重点突出，以便读者系统掌握基本知识；

二、**典型例题与解题方法**　本书所选典型例题包括历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的试题，以及某些典型性题目，并对题型分类，再紧接给出解题要领和分析思路，这样的安排有助于读者掌握基本概念和基本理论，开拓解题思路，提高分析能力；

三、**教材习题同步解析**　教材习题同步解析对主教材《概率论与数理统计》（第二版）中的全部习题给出了详尽的解答，方便读者在学习过程中进行对照分析，起到了释疑解难的作用；

四、**自测题**　自测题为读者设计了一套反映该章内容的重点的综合性试题，旨在提高读者的综合解题和应试能力，巩固和提高学习效

果.

本书可供广大学习概率论与数理统计的高等院校、成人教育的学生参考,也可供有关的教师和科技工作者参考.

由于编者水平有限,错误在所难免,敬请读者批评指正.

编 者

2003年7月于华中科技大学

策划编辑　徐　可

责任编辑　徐　可

封面设计　王凌波

责任绘图　朱　静

版式设计　杨　明

责任印制　杨　明

目　　录

第一章　随机事件和概率

1.1　基本要求与内容提要

1.1.1　基本要求

1. 熟练掌握事件的描述方法及事件的运算和相关性质.

2. 掌握概率的公理化定义及概率的性质,应能灵活运用这些性质于概率的有关计算问题之中.

3. 掌握一般的古典概型及几何概型的计算方法及相关技巧.

4. 牢固掌握超几何分布、条件概率、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式,并能灵活运用这些公式于有关的概率计算的问题之中.

5. 能判别事件的独立性及不相容性,能运用独立性的有关结论解决某些概率的计算问题.

1.1.2　内容提要

一、随机试验

1. **随机试验**:1° 相同条件下可重复试验;2° 每次试验结果不唯一;3° 试验的全部可能结果已知,但试验之前不知究竟哪一个结果出现.

2. **样本空间**:随机试验所产生可能结果的全体称为样本空间,一般记为 Ω. Ω 中的元素称为样本点,也称为基本事件. 样本点的集合称为随机事件,简称为事件. 必然事件记为 Ω,不可能事件记为 $\varnothing$.

二、事件的关系及其运算

1. **事件的包含与相等**:设 A、B 为两事件,若事件 A 发生必导致事件 B 发生,则称 A 包含于B,记作 $A \subset B$. 若 A、B 相互包含,则称 A 与

B 相等,记作 $A = B$.

2. 事件的和(并)与积(交):设 A、B 为两事件,A 和 B 之和(并)是指 A 或 B 至少有一个发生,记作 $A \cup B$.若 n 个事件 A_i,$i = 1,2,\cdots,n$ 至少有一个发生,则记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.此可推广为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,表示 $A_1, A_2,\cdots, A_n,\cdots$ 至少有一个发生.$A \cap B$(或 AB)表示 A 和 B 同时发生,称为 A 和 B 的积(交).同理 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生.

3. 互不相容事件和对立事件:若 A、B 不能同时发生,即 $AB = \varnothing$,则称 A 与 B 为互不相容或互斥事件.若 $AB = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$,则称 A 和 B 为对立事件或互为逆事件,记作 $A = \overline{B}$,或 $B = \overline{A}$.

4. 事件之差:A 发生而 B 不发生称为 A 与 B 之差,记作 $A - B$.

5. 事件关系的性质:

$A \subset A \cup B$;　$B \subset A \cup B$;　$A \cup A = A$;

$A - B \subset A$;　$A - B = A\overline{B}$;　$(A - B) \cup A = A$;

$(A - B) \cup B = A \cup B$;　$(A - B) \cap B = \varnothing$;

$\overline{\overline{A}} = A$;　$A \cup \overline{A} = \Omega$;　$A\overline{A} = \varnothing$;

$A \cap A = A$;　$A \cup \varnothing = A$;　$A \cup \Omega = \Omega$;

$A \cap \Omega = A$;　$A \cap \varnothing = \varnothing$.

6. 事件的运算性质:

1°　交换律:$A \cup B = B \cup A$;$A \cap B = B \cap A$.

2°　结合律:$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;$(AB)C = A(BC)$.

3°　分配律:$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$.

$$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C).$$

4°　De Morgan 对偶律:$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$;　$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$;

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

三、事件的概率及其计算

1. 概率的统计定义:$P(A) = n_A/n$,其中 n 表示试验的总次数;n_A 表示 n 次试验中 A 出现的次数.

2. 古典概型:(1) 样本空间中样本点总数有限;(2) 每次试验中各个基本事件出现的可能性相同.对古典概型的随机事件 A 有如下计算公式:

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点数}}.$$

3. 加法原理:设事件 A 有 n 类方法出现,若第 i 类方法包含 m_i 种方法,则 A 一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法出现.

4. 乘法原理:设事件 A 有 n 类方法出现,以后另一事件 B 对每一种A 的出现方法又有m 种不同的方法出现,则事件 AB 以nm 种不同方法出现.

5. 几何概型:若随机试验 E 的样本空间Ω 为欧氏空间中的一个区域,且每个样本点的出现具等可能性,则称此试验对应几何概型.此时事件 A 的概率由下式计算:

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

注:若 A 表示 $\mathbf{R}^1$ 中的区间、$\mathbf{R}^2$ 中的区域或 $\mathbf{R}^3$ 中的区域,$\mu(A)$ 分别表示区间的长度,区域的面积或体积.类似理解 $\mu(\Omega)$.

四、概率的公理化定义及性质

1. 概率公理化定义:设随机试验 E 的样本空间为Ω,则称满足下列性质且定义在事件集上的函数 $P(\cdot)$ 为概率:

(1) $\forall A\in\Omega, 0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容,则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

2. 概率的性质:

1° $P(\varnothing)=0$.

2° 若 $A_1,\cdots,A_n$ 互不相容,则 $P\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

3° $P(\overline{A})=1-P(A)$.

4° $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

5° $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

五、条件概率与事件的独立性

1. 条件概率:若 $P(A)>0$,称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为 A 发生的条件下 B 发生的条件概率.同理定义 $P(A|B)$.

注:对条件概率有如下公式成立:$P(AB|C)=P(A|BC)P(B|C)$.

2. A 与 B 独立:若 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称 A 与 B 独立.显然此时 B 与 A 独立,故称 A 与 B 相互独立.

3. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立:若对任意的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2\cdots,A_n$ 相互独立.

注 1: $A_1,A_2\cdots,A_n$ 中两两相互独立不蕴含 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,但反之成立.

注 2: $\{A,B\},\{\overline{A},B\},\{A,\overline{B}\},\{\overline{A},\overline{B}\}$ 四对事件中有一对相互独立,则其它三对亦相互独立.

注 3:设 $P(A)>0,P(B)>0$,则

A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$.

六、有关公式

1. 乘法公式:若 $P(A_1)>0,P(A_2)>0$,则

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P(A_2)P(A_1|A_2).$$

一般地,若 $P(A_1),P(A_2),\cdots,P(A_n)>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

2. 全概率公式：设样本空间 Ω 的一个划分为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，且 $P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$(即完备事件组)，则对任一事件 $B\subset\Omega$，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i).$$

3. 贝叶斯公式：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，对任意 $B\subset\Omega$，若 $P(B)>0$，则

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B\mid A_j)P(A_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

注 1：一般地，若某事件发生涉及多个事件共同发生时，应找到这种联系并使用乘法公式.

注 2：全概率公式可形象地理解为由因到果，使用的关键是找到划分 $\{A_i\}, i=1,2,\cdots,n$.

注 3：贝叶斯公式也可形象地理解为由果到因，同样，使用的关键是找到划分 $\{A_i\}, i=1,2,\cdots,n$.

七、有关排列、组合的公式

1. 排列：从 n 个不同元素任取 $m(m\leqslant n)$ 个按一定顺序排成一列，这样全部排列种数为

$$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!},$$

$P_n^n=n!$；若排成一圈，则排列数为 $(n-1)!$.

2. 重复排列：若从 n 个不同元素中有放回地取 m 个按照一定顺序排列，则全部排列种数为 $N=n^m$.

3. 不全相异的排列：设 n 个元素中有 m 类，i 类中含 k_i 个元素，$i=1,\cdots,m$. 且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$. 则 n 个元素的全部排列总数为

$$N=\frac{n!}{k_1!k_1!\cdots k_m!}.$$

4. 组合：从 n 个不同元素中任取 m 个元素，这样一个取法称为一个组合，全部组合总数为 $C_n^m=\dfrac{P_n^m}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

1.2　典型例题与解题方法

题型 1　有关事件的表述、化简及等式的证明

要领:从事件关系、运算的定义及性质入手,将某一事件按事件的含义及事件的运算性质进行等价表示.

例 1.1　关系(　)成立时,A 为 B 的逆事件.

(A) $AB=\varnothing$;　　(B) $A\cup B=\Omega$;

(C) $A\cup\overline{B}=\Omega$;　　(D) $\overline{A}$ 为 $\overline{B}$ 的逆事件.

解　$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互为逆事件 $\Leftrightarrow \overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing,\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega$,由 $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$ 有 $A\cup B=\Omega$,由 $\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega$ 有 $AB=\varnothing$,所以应选(D).

注:A,B 互为逆事件,则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互为逆事件.但不能得出$\{\overline{A},B\}$,互为逆事件及$\{A,\overline{B}\}$ 互为逆事件的结论.而$\{A,B\}$ 相互独立 $\Leftrightarrow\{A,\overline{B}\}$ 相互独立 $\Leftrightarrow\{\overline{A},\overline{B}\}$ 相互独立 $\Leftrightarrow\{\overline{A},B\}$ 相互独立.注意这种区别.

例 1.2　设 A_1,A_2,A_3 为三个事件,则(　)表示至少一个事件发生.

(A) $A_1A_2A_3$;

(B) $\Omega-(A_1\cup A_2\cup A_3)$;

(C) $A_1\cup(A_2-A_1)\cup((A_3-A_2)-A_1)$;

(D) $A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

解　因为

$$
\begin{aligned}
&A_1\cup(A_2-A_1)\cup((A_3-A_2)-A_1)\\
&=A_1\cup A_2\overline{A_1}\cup(A_3\overline{A_2})\overline{A_1}\\
&=[(A_1\cup A_2)(A_1\cup\overline{A_1})]\cup(A_3\overline{A_2})\overline{A_1}\\
&=A_1\cup A_2\cup(A_3\overline{A_2})\overline{A_1}=[A_1\cup(A_3\overline{A_2})\overline{A_1}]\cup A_2\\
&=[(A_1\cup\overline{A_1})(A_1\cup A_3\overline{A_2})]\cup A_2=(A_1\cup A_3\overline{A_2})\cup A_2\\
&=[(A_1\cup A_3)(A_1\cup\overline{A_2})]\cup A_2\\
&=A_1\cup A_2\cup A_3,
\end{aligned}
$$

故选(C).

注:A_1,A_2,A_3至少有一个发生一般表示为$A_1\cup A_2\cup A_3$,而(C)是两两互不相容事件的表示.

例 1.3 指出下列关系中哪些成立,哪些不成立.

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B=A\cup B\overline{A}$;

(2) $\overline{A}B=A\cup\overline{B}$;

(3) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$;

(4) $AB\cup A\overline{B}=\Omega$;

(5) 若 $AB=\varnothing$,且 $C\subset A$,则 $BC=\varnothing$;

(6) 若 $A\overline{B}=\varnothing$,则 $A\subset B$;

(7) 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$;

(8) 若 $\overline{A}\subset\overline{B}$,则 $A\supset B$;

(9) $\overline{(A-B)}=\overline{A}-\overline{B}$;

(10) $\overline{(A\cup B)C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

解 (1) 成立.因为 $A\overline{B}\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=A\cup B$.同理可证 $A\cup B=A\cup B\overline{A}$.

(2) 不成立.因为左边不含 A 而右边含 A.

(3) 成立.因为 $B,\overline{B}$ 不同时发生,从而 AB 与 $A\overline{B}$ 也不同时发生.

(4) 不成立.因为 $AB\cup A\overline{B}=A(B\cup\overline{B})=A$.

(5) 成立.若 $BC\neq\varnothing$,又 $C\subset A$,则 $BA\neq\varnothing$,此与条件矛盾.

(6) 成立.因为 $A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}=AB\subset B$.

(7) 成立.若 $A\subset B$,则 $A\cup B\subset B$,但 $B\subset A\cup B$.所以 $A\cup B=B$.

(8) 成立.若 B 发生不导致 A 发生,则导致 $\overline{A}$ 发生,而 $\overline{A}\subset\overline{B}$.即导致 $\overline{B}$ 发生,从而 $B\subset\overline{B}$,矛盾.

(9) 不成立.因为$\overline{(A-B)}=\overline{(A\overline{B})}=\overline{A}\cup B$,而$\overline{A}-\overline{B}=\overline{A}B$.

(10) 不成立.因为$\overline{(A\cup B)C}=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{C}$.

例 1.4 设 $\Omega=\{x:\ 0<x<12\}$,$M=\{x:\ 1<x<9\}$,$N=\{x:\ 0<x<5\}$,求(1)$M\cup N$,(2)$M\cap N$,(3)$\overline{M}\cap\overline{N}$,(4)$M-N$.

解 (1)$M\cup N=\{x:\ 0<x<9\}$.

(2)$M \cap N = \{x:\ 1 < x < 5\}$.

(3) $\overline{M} = \{x:\ 0 < x \leqslant 1 \cup 9 \leqslant x < 12\}$,

$\overline{N} = \{x:\ 5 \leqslant x < 12\}$.

所以 $\overline{M} \cap \overline{N} = \{x:\ 9 \leqslant x < 12\}$.

(4)$M - N = \{x:\ 5 \leqslant x < 9\}$.

例 1.5 设某公司参入竞标,A = {第一次竞标成功};B = {第二次竞标成功}.求如下事件的表示:

C = {两次竞标成功}, D = {两次竞标失败},

E = {恰有一次竞标成功}, F = {至少有一次竞标成功}.

解 $C = AB, D = \overline{A}\,\overline{B}, E = A\overline{B} \cup \overline{A}B, F = A \cup B$.

例 1.6 任取 $A_{m\times n}$ 矩阵及 n 维列向量 b,构成方程组

$$\begin{cases} AX = 0 & (1) \\ AX = b & (2) \end{cases}$$

且事件 B、C、D、E 表示为:

B = {(2) 有无穷多解}; C = {(1) 有非零解};

D = {(2) 有唯一解}; E = {(1) 只有零解}.

则下列关系成立的为( ).

(A) $C \subset B$; (B) $B \subset C$;

(C) $E \subset D$; (D) $DE = \varnothing$.

解 (B) 成立.

例 1.7 以 A 表示事件"甲产品畅销,乙产品滞销",则 $\overline{A}$ 为( ).

(A) "甲产品滞销,乙产品畅销";

(B) "甲、乙产品均畅销";

(C) "甲产品滞销";

(D) "甲产品滞销,或乙产品畅销".

解 B = {甲产品畅销},C = {乙产品畅销}.则 $A = B\overline{C}$,所以 $\overline{A} = \overline{B\overline{C}} = \overline{B} \cup C$. 所以(D) 入选.

注:此处(A) 表示 $\overline{B}C$.

例 1.8 若 A,B,C 为随机事件,说明下列关系的含义:

(1) $ABC = A$,(2) $A \cup B \cup C = A$,(3) $AB \subset C$,

(4) $A \subset \overline{B}$,(5) $A \subset \overline{B} \cup \overline{C}$.

解 (1) $ABC = A \Rightarrow BC \supset A \Rightarrow B \supset A$ 且 $C \supset A$,从而 A 发生则 B 与 C 必同时发生.

(2) $A \cup B \cup C = A \Rightarrow B \cup C \subset A \Rightarrow B \subset A$ 及 $C \subset A$,从而 B 发生或 C 发生均导致 A 发生.

(3) $AB \subset C \Rightarrow A$ 与 B 同时发生必导致 C 发生.

(4) $A \subset \overline{B} \Rightarrow A$ 发生必导致 $\overline{B}$ 发生,从而 A 发生则 B 必不发生.

(5) $A \subset \overline{B} \cup \overline{C} \Rightarrow A \subset \overline{B \cap C}$,即 A 发生必导致 B 与 C 不会同时发生.

例 1.9 设 X_n 表示某种群第 n 代数目,记 $E_n = \{X_n = 0\}$,$n = 1, 2, \cdots$,问 E_n 与 E_{n+1} 有何关系?

解 $E_n \subset E_{n+1}$.

例 1.10 设甲、乙两人各有 $(n+1)$ 个和 n 个硬币,双方投掷后进行比较,求甲掷出的正面数多于乙掷出的正面数的概率.(设掷一个硬币出正面、反面等可能.)

解 令

$$A = \{甲掷出正面数 > 乙掷出正面数\},$$
$$B = \{甲掷出反面数 > 乙掷出反面数\},$$

由于 $\overline{A} = \{甲掷出正面数 \leqslant 乙掷出正面数\}$,设 $\overline{A}$ 发生,则当乙掷出 n 次正面,甲至多掷出 n 次正面,即说明乙掷出 0 次反面时,甲至少掷出 1 次反面.从而甲掷出反面数 $>$ 乙掷出反面数.若乙掷出 $n-1$ 次正面,则甲至多掷出 $n-1$ 次正面,即说明乙掷出 1 次反面,甲至少掷出 2 次反面,从而也有甲掷出反面数 $>$ 乙掷出反面数.以下情形分析类似,从而有

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \{甲掷出正面数 \leqslant 乙掷出正面数\} \\ &= \{甲掷出反面数 > 乙掷出反面数\} = B,\end{aligned}$$

所以

$$P(A) + P(B) = P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

由于 $P(A) = P(B)$,所以 $P(A) = \dfrac{1}{2}$.