数学哲学

数　学　哲　学

〔美〕保罗·贝纳塞拉夫
希拉里·普特南　编

朱水林　应制夷　凌康源　张玉纲　译

应制夷　王善平　校

商　务　印　书　馆

2003年·北京

图书在版编目(CIP)数据

数学哲学/[美]贝纳塞拉夫,[美]普特南编;朱水林等译.—北京:商务印书馆,2003
ISBN 7-100-03383-7

Ⅰ.数… Ⅱ.①贝…②普…③朱… Ⅲ.数学哲学—文集 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第070205号

SHÙXUÉ ZHÉXUÉ

数 学 哲 学

[美] 保罗·贝纳塞拉夫 希拉里·普特南 编

朱水林 应制夷 凌康源 张玉纲 译

应制夷 王善平 校

商 务 印 书 馆 出 版
(北京王府井大街36号 邮政编码 100710)
商 务 印 书 馆 发 行
北 京 冠 中 印 刷 厂 印 刷
ISBN 7-100-03383-7/B·511

2003年2月第1版 开本 850×1168 1/32
2003年2月北京第1次印刷 印张 21 1/4
印数 5 000

定价: 36.00 元

第 二 版 序

只要将本书第二版与第一版的目录随便比较一下，就可以发现它们之间既有重大差异，又有许多重复之处。总的说来，这一选本是由两种力量促成的。(1)第一版的使用者(以及第二版的可能使用者)的评论;(2)我们自己对这门学科在过去二十多年间的进展方向的认识。

我们感谢许多朋友和同事。他们指出了自己所认为的第一版中哪些内容有用，哪些内容不大有用，并指出他们觉得哪些内容可以加进书中。由于人数众多，恕不一一道谢。他们的意见非常宝贵，虽然选择内容的任务主要仍在我们身上。

不用说，我们原可以简单地重出第一版，再补上一本第二卷。但是我们想两卷书费用过高，会影响读者购买，遂打消了此意。于是不得不作出妥协:重新选编一本书，删去一些原有的内容，另外增加一些新内容。对于很多删除的材料(最显著的是维特根斯坦的材料和“经验论的两个教条”)来说，由于它们大都很容易获得，删除了也不会觉得有多少损失。其余内容则不是如此。选择新材料相当困难，因为这些年来，无论是有关的半技术性的成果方面，还是哲学研究方面，都是特别丰产。

和以前一样，我们将选材限于我们认为受过哲学教育的读者——他们具有充分的逻辑背景，足以理解对于二十世纪某些逻辑成果的阐释——所能够接受的范围。(一个重要例子是康托尔连续统假设的独立性。)出于同样考虑，我们还试图把选本中所讨论的哲学问题的范围缩小，达到最容易地被认为与数学哲学有关的

程度。这些被公认的宽松原则都只用作向导;但一旦企图遵照这些原则行事,必然会使可供考虑的文献范围受到约束。除了这些粗略的经验原则之外,我们最终遵循的贯穿一切的原则不是别的,就是按我们的判断,使所选内容在连起来阅读时有趣味。

第二版与第一版的另一个重大差别,就是新版的末尾有长长的参考文献目录。编制这份目录时,我们首先选用了第一版的参考文献,其次加上了我们认为原来遗漏掉的许多文献,最后则是把本书选定的文章所引用的文献补充进去。略去许多重要文献是不可避免的——在本书付印时,我们必须抵制把它们追加进去的强烈要求。我们愿意在这里表示我们的谢意:再次感谢乔治·布罗斯编制了原先的参考文献目录;感谢雅伽沙瓦帮助我们扩充了这份目录;感谢安·盖琛、詹姆斯·卡皮奥和安·艾文斯对完成这份目录和编写原稿作出的宝贵贡献。

最后说一下体例。通过把所有参考文献汇编成一个总的参考文献目录,我们就为本书全部的参考文献从整体上设定了标准形式。这意味着,大量引用性的脚注可以删掉(这就便于我们把它们包括在正文中),其他许多脚注则可缩短。此外,我们还找出涉及到本选集内容的引用,插入所引用内容在本书中的页码。但凡可行,我们都保留作者对原始资料的引用,只是加上它们在本书中的位置。我们希望这种努力是有回报的:使本书好用得多。

保罗·贝纳赛拉夫

希拉里·普特南

新泽西州普林斯顿和马萨诸塞州坎布里奇

1982年11月

目　录

导　言

1. 一般述评

很难说数学哲学究竟包括什么内容——哪些问题、观点和一般领域应该包括在像这样的一本书内。以此自解，我们并不试图汇编一部全面覆盖该领域的文选。我们只是想选辑这样一些论文，它们就其自身来说是引人入胜的，而当集中在一起阅读时，又能提供有意义的对比。当然其中所讨论的问题，在大多数情况下必须是对这领域极为重要的。如果我们能取得成功的话，那么我们确信这将给在数学哲学方面的读者一个适当的指引。

我们采用的划分，正如以后的论述所指明的那样，在极大程度上是带有任意性的。因此不必深究一篇文章之划归入这一部分而不是那一部分。说到此，我们可以把章节编排的动机粗略叙述如下：第一编中包括这样一些选文，它们集中在关于数学本性的三个传统的重要观点：逻辑主义、直觉主义和形式主义。这并不是说本书中的其他文章与这些观点无关。例如第三编中亨佩尔的文章，就是一篇逻辑主义的清晰说明。但是，与第三编中其他文章一样，它是在（数学上）不怎么专门的水平上讨论其观点的，因而对缺乏逻辑的正式训练的人来说，要比第一编中的文章容易接受。这样，对上述三个观点的讨论，就成了贯穿称为"数学基础"的第一编的一条主线。

涉及数学存在性的问题（在此我们并不想解决这样的问题：数学上的存在究竟是事物的一种不同存在，还是一种不同事物的存在，或者两者都是，或者两者都不是），主要是在第二编讨论。但

是，任何对这些问题略有所知的人都清楚，直觉主义是关于数学存在的一种观点，至少就它提出关于什么应被算作一些数学结构、实体等的存在的证明的条件而言是如此。所以对这些问题的充分考察（充分是指了解其主要观点）还应包括第一编的文章。

前三编的内容还有进一步的交叉，第三编“数学真理”中，除了上面提到的亨佩尔的文章外，还包含庞加莱的准直觉主义的文章。奎因（“约定真理”）讨论的约定主义，也是第二编卡尔纳普在他的文章中联系到数学的存在性和真理性时表述过的一种观点，而第二编中贝纳塞拉夫的文章“数不能为何物”讨论的则是逻辑主义的核心问题——数的本性。

我们感到这样的交叉是不可避免的。按问题分类至多只能为读者引路。显然，人们对数学真理（如果确实存在着这样一个怪物）的本性的看法，会影响他对数学存在的看法，并且构成对“数学基础”的一种见解。

虽然有这样的交叉，但我们还可以指出进一步的分类，这对于整理本书介绍的一系列观点可能是有益的：第一编中的文章与第二、三编中的文章之间有一条启发性的界线（我们将会看到，第四编完全超越出这条界线）。第一编包含我们很想称之为“数学认识论”方面的文章。也许弗雷格和罗素的选文除外，这些文章的作者花很多精力研究一个可接受的数学应该是什么样的问题：什么样的方法、实践、证明等等是合法的，因而可以被正当使用。他们并不把现存的数学和数学活动看作不可侵犯的和无可挑剔的；他们认为，数学中有正当的和非正当的方法，而可接受的结果是指可用正当的方法得到的。事实上，数学家应把大部分努力，用于把直觉有价值的和可接受的结果重新铸成最终可接受的形状。如果这位作者是一个直觉主义者，那么他就会持诸如此类的观点：实分析中任何不能用直觉主义方法得到的部分都应该被抛弃掉。但是在大

多数场合,极重要的是不断探求至今尚未获得的经典定理的直觉主义证明。

我们所看到的直觉主义者是如此,形式主义者(希尔伯特、冯·诺伊曼、柯里)也是如此。此组的成员关心的是在数学中使用无限汇集(collections)、结构等的合法性。特别是这种关心采取一种担心的形式,即由于被使用的东西是这样远离我们所能经验的范围,说不定会导致矛盾(因为隔着如此的距离,直觉之烛只会放出暗淡的火)。因此对形式主义者来说,重要的是设法证明这些"无限论"方法能形成一个一致的整体。当然,证明中一定不能采用这些有问题的方法。这样,在这里也出现对数学中被赞许的方法的限制。其他作者的情况也是如此。标志着这一组成员的另一个特征是,他们主要是数学家而不是哲学家。我们这样说,毫无贬低他们对哲学的贡献之意,正如我们同样没有倾向于否定另一组成员对数学作出的贡献之意,这第一组的成员主要由批判他们的学科的基础本身的数学家组成。他们是"认识论者"。(如果我们从庞加莱和贝奈斯的大部分著作来判断的话,他们确实属于第一组,但是我们所选择的几篇文章,使他们显得与第二组更为相近;另一方面,杜麦特虽然基本上是一个哲学家,但他却撰文为直觉主义观点提供哲学依据,因此把他列入第一组较为恰当。)

与"数学认识论者"相反,有着那样一些人,他们认为,数学即使不是神圣不可侵犯的,也至少不属于他们批评的领域。他们的任务是另一回事:他们并不想去宣布哪些数学方法是可以接受的,他们想要描述已被接受的数学方法。数学是给定之物,应该加以说明、解释和准确描述。对于他们来说,认识论并不是帮助区分好坏数学的工具——它是数学本身必须适应的一个图式("数学命题是分析的","数学陈述按约定是真的",等等)。刻划这两组之间差异的一种方法是说,对一组而言,认识论原则比数学的大部分具体

细节处于更优先或更重要的地位,因而可以用作批判的工具;对另一组而言,情况恰好相反:现存的数学被用作检验认识论构成的试金石,这种认识论的合格条件之一是具有把一切数学都安放于适当位置的能力。说得粗鲁点,如果某些数学内容不适合这一图式,那么第一派的作者将倾向于丢弃数学,而第二派的作者将倾向于丢弃图式。

当然,事情并不完全那么干脆。对于两组来说,在认识论原则与数学活动之间都经常存在着相互影响。第一组的成员有时会以某些可接受数学的实践的范例(paradigm cases)作为出发点(例如直觉主义者和形式主义者都以数论的某部分内容作为出发点),然后试图达到能说明这个出发点的有效性的原则。而这些原则或被用来批判与它们不一致的东西,或被用作建立一些标准的指南,这些标准是进一步的证明所必须符合的,特别是那些已"证明过"但又不是"可接受地"证明过的"定理"的证明。类似地,说第二组会接受数学家可能作出的一切也是太夸大的。他们对数学的考察将会迫使他们把某些数学内容作为不可接受的而予以放弃的谴责。不过总的来说不大可能如此。艾耶尔、亨佩尔、希罗斯、贝纳塞拉夫和普特南都准备尽量接受数学的现状。罗素和"数学基础的逻辑主义"一文中的卡尔纳普提出了一个问题,它依赖于人的对恶性循环原则和非直谓词定义的讨论的认真程度。毫无疑问在"经验论、语义学和本体论"中,卡尔纳普已经放弃了认识论的任何批判功能。奎因处于边缘情况,这几乎是出于职业性的了。但是,就他放弃了本体论疑虑而言,他没有提出问题。且不管那些跨在边界线两边的边缘情况。海廷、布劳威尔、希尔伯特、冯·诺伊曼、柯里和庞加莱(可惜在另一些没有被我们收录的篇章之中)十分清楚地站在另一边。克雷塞尔如果有所属的话,是属于这第一组的,因为他有强烈的构造主义倾向。这里插入"如果有所属",是因为克雷

塞尔的作用曾是或多或少地重建该组成员的哲学观点并使之具有数学意义。完全可以想象，他希望搞清楚，在这样或那样的限制下，究竟能得到多少尚存的数学，而并不在意人们是否采用这些限制。可以说这将使他的任务成为一个元任务（metatask）。

第四编的文章将这两组观点编织成一个无法解开的结。这是不足为奇的，因为这一部分的题材是与哲学有着与生俱来的紧密联系的数学分支——集合论。自从它在康托尔（—弗雷格）的手中骤然降生，在罗素的笔下度过狂飚突起的青春期以来，它一直是许多哲学论争的战场。它经受住了种种伤害，以及哥德尔和保罗·科恩发现独立性结果的打击。目前，哲学家和数学家都在仔细考察它的历史和渊源，以剖析使它幸免于难的活力和几乎使它夭折的先天不足。于是，不可避免地，改革者和辩护者们在这里交汇了。

但是两组的差别是含糊的，我们也不想过多地讨论它。它虽然含糊，我们希望它还是有启发性的；它将多少有助于理解，本选集中的作者所写作品是怎样联系着的。有意思的是，一旦看到了这种差别，人们就可以把包含在本书中的讨论看作是相互衔接的。初看时，甚至可能会感到，两组不是讨论相同的问题。但是应该看到，希尔伯特之关注“数学真理”的决定性因素，丝毫不亚于，比如说，艾耶尔虽然他们所取的论点大不相同，但是二者都应作为讨论相同问题或几乎相同问题的著作加以阅读。哥德尔也是如此。当哥德尔讨论连续统假设时，他关注的只是一个特定的数学命题，和能够证明它为真或假的方法。亨佩尔关于数学真理本性的论述，如果有说服力的话，应该与这一讨论有关。选入本书的其余文章也是如此。

因此我们认为，我们选来供研究的问题是密切相关的。而且，讨论这些问题的作者整个来说所关心的是十分相同的问题，不同之处只是表面的差异。这些差异表明观点上和解决问题的方法上

的不同，而不是简单地所关切的内容上的不同。我们深信，这些不同观点的相互比较，将大有益于所有这些问题的讨论——不过首先必须弄清楚，是什么把它们统一成对相同问题的讨论的。我们希望把这些文章集中在一起阅读能有助于此。

开头就说这些。导言的其余部分将由对一些问题的述评组成，其中有些被作者讨论得较充分，有些只是触及一下。我们希望这些述评将使读者较易于理解选文和涉及的问题。

还有一点需要预先说明。在以下各节中，我们不打算对我们所讨论的所有问题和作者提出一种统一的观点。相反，我们将根据许多种不同的、而且往往是不相容的观点进行叙述。这样做有两个原因：第一，在这里我们侧重的是提出有用而且有趣的问题，而不是力图去解答它们。第二，未必会有一种观点我们可能一致同意，或者甚至同意暂时取得一致。因此，在从导言的一节看到另一节时，甚至在同一节内，细心的读者能察觉到重点和观点的转移。我们希望这种情况不致使读者感到迷惑，而且由于它们提供了关于所讨论的极为复杂的问题的各种不同的看法，能对读者有所助益。

2. 实无限与形式主义

尽管本选集并未包含题为“数学中的无限”的章节，但任何读过在“数学基础”这个总标题下的布劳威尔、海廷和希尔伯特的文章的人，很快会明白，无限结构、无限集合、无限量等在经典数学中所起的作用，与数学哲学中不同“学派”之间的论战大有关系。同样，柯西和魏尔施特拉斯成功地采取措施在微积分中消除“无限量”，与从数学中完全去除无限的思想也大有关系，这种思想为像希尔伯特和希劳维尔那样的具有互相对立看法的思想家所共有。

但是，为什么人们认为在数学中必须避免提及无限呢？有时

听到人们——甚至包括希尔伯特在内——说,提及无限是"无意义的"。然而为什么人们会这样想呢?经典哲学家——特别是休谟——曾在把可理解的东西和可形象化的东西等同起来的基础上,讨伐过无限这个概念(与无限可分有联系);但是"脑中映象"的意义说似乎不再站得住脚,因此对无限概念的攻击必须依赖较此更为合理的论据,如果这攻击是认真的。

事实上,对这个问题很难找到合理的、甚至是稍为详尽的论证。"实无限"的反对者们倾向于认为,证明的责任应在另一方。他们似乎说,"请给我们证明这概念是有意义的,"而有意义的标准似乎是在于可用他们的术语表达。我们不能在这里讨论这个问题,只须说一下,同情古典经验主义者对一切概念"从经验导出"才合法的要求的读者,或许会发现自己倾向于同情那些怀疑关于无限结构的任何概念有清晰性的人,而具有较多的实在主义倾向或较多的实用主义倾向的读者,要看出"这一片混乱是怎么回事"可能是困难的。

但是,假定我们认为关于无限结构的陈述是"有意义"的。那么,我们所谈及的这样的结构事实上是否存在呢?希尔伯特有说服力地论证说,物理学并未为这种结构的存在提供明确证据:事实上,正如他所指出的,物理学的进展已经将有限性和间断性引入了曾一度被无限性和连续性所统治的一个个领域中。今天,甚至"物理时间"的起点(和终点)的可能性也正在物理学家中间讨论着。因此我们必须同意希尔伯特的看法:如果数学要独立于暧昧的经验假定的话,那它绝不应把有关无限结构存在性的断言建立在物理的考虑之上。

、对这个问题罗素回答说(在略有不同的上下文中),数学并不涉及(物理的)存在,而只涉及存在的可能性。因此在《数学原理》(Principia Mathematica 以后简称 PM)第二版中,罗素和怀特海并

没有采纳断言在论域中存在无限多对象的所谓无限公理，而只是明确地把它列入需要用它来证明的每条“定理”的假设之中。如果T是所说的“定理”，那么怀特海和罗素只断言：“如果无限公理成立，那么T成立”。

但是无限总体的可能存在是清楚的吗？如果无限公理导致矛盾，那么以无限公理为假设的定理一定不会怎么令人感兴趣。由于这些定理构成数学的大部内容（至少就罗素和怀特海所重构的来说）难道不应对无限公理（不管是作为系统的公设，还是作为一大批重要定理的假设）的一致性有某种证明吗？

这里我们来到了数学哲学的一个十字路口。罗素和他的追随者们显然把无限多个对象的可能存在，如果不是实际存在，看作是自明的；而对希尔伯特和形式主义者们来说，这个假定的一致性必须得到证明。并且必须用“有限论”方法来证明——就是说，这个假定本身显然不得——即使是隐蔽地——出现在一致性证明的假定之中。读者将会看到，这类问题有点像一个政治问题——它不是一个“纯理论”的即对实践不会产生任何影响的问题，而会影响人们在数学中所依循的标准和人们作为数学家的纲领。希尔伯特并没有设想PM系统实际上很可能是不一致的；他只是感到，不加证明地承认它的一致性、或即使是初等数论的一致性，是过分降低了数学严谨性的标准，并且将来还要冒不愉快的风险。

以下是希尔伯特的另一种观点，它可能有助于理解他对无限论经典数学一致性证明的执着追求。

希尔伯特把某些类型的数学论断看作是哲学上（即认识论上）无疑问的。这些论断的真假可根据组合演算，即根据对可通过直接感知加以确定的组合事实的观测来确定。它们被称为“基本命题”——例如，一个（有限）符号串是否比另一个长。必须依赖无限汇集才能作出的论断，则由于它们不具备以可观测的组合事实为

依据的有限可证实性(或有限可证伪性),而被视为严格地讲是无意义的。希尔伯特认为,将它们引进数学能大大简化许多定律的陈述,从而使理论优美动人得多。因此,他把这比作引进理想元素,例如射影几何中的无限远点,或 i。

可是这样做安全吗?

希尔伯特认为,只要能证明接受它们是无害的,不会使人证明谬误、即证明假的基本命题,它们就可被引进数学。不借助无限汇集而对经典数学作出的一致性证明正好能做到这一点。如果这样的证明只用到有限论(即安全的)原则,那么无限汇集的合理性便在有限论的基础上得到了证实。这样,它就可被看作只是一种精致的表达方式,从而可以大胆使用而不担风险。

3. "潜无限"和直觉主义

直觉主义者对无限的看法是另一样的。给出一组描述无限结构的陈述,可以产生两种疑问。第一,人们可以对陈述的一致性置疑,这是希尔伯特所担心的。第二,人们可以怀疑这些陈述是否"拣出"唯一的、明确定义的数学结构。直觉主义者有时在他们的著述中好像说,甚至一个"任意有限量"的概念都不是事先完全确定的[①]。我们确实知道 1,2,3 是整数。我们也知道某些作用于整数的运算例如加法、乘法和取幂的结果仍是整数。但是从这还不能推得,我们对于"任何整数"有完全确定的概念——因为这涉及重复一个运算(比如"加 1")任意有限次的设想,而我们不必承认,我们对其涵义有清楚的概念。当然,直觉主义者并没有提出取消"整数"概念,那样做将意味着把数学统统抛弃。他们倒是建议(参阅海廷阐述布劳威尔的思想并使之形式化的文章)发展一种命题演算,以处理不一定对应于良好定义的总体的那些概念(以及不一定具有真值的"陈述")。这种态度往往被描写为"支持潜无限但不

支持实无限。"它可以归结为：

1. 一个关于无限结构——比如由 0 与 1 组成的无限序列——的陈述如果得到证明，便可视为真，如被反驳，则为假，但在所有其他场合，则非真非假。

2. 由于这结构并不被认为是明确定义的，因此一个关于它的陈述，仅当它对于一个大得多的结构类被证明了，才能被证明。事实上，为了证明一个关于无限结构的陈述，我们必须以可证实的陈述为基础来证明它，即或者是关于结构的某个有限部分(例如序列的前十位)的陈述，或者是关于逐次产生结构的有限初始片段的规则(如果有的话)的陈述。

举一个例子可能有助于使这种观点更清楚。考察这样一个论断：前 n 个奇数之和$(1+3\cdots\cdots+(2n-1))$总是一个完全平方(实际上是 n^2)。前一个奇数之和，即 1，是完全平方，因为 $1=1^2$。如果前 n 个奇数之和是 n^2，那么 $n+1$ 个奇数之和必定是$(n+1)^2$，或 n^2+2n+1(因为第 $n+1$ 个奇数是$(2n-1)+2$，等于 $2n+1$)。因此我们已经对于 1 证明了这定理，而且如果我们对于 n 证明了这定理，我们就能对于 $n+1$ 证明它。据此，直觉主义者像经典数学家一样，断定这定理对于每个数都成立。哲学上的差别在于，直觉主义者并不假定这些数是明确定义的总体。不过在这里，这没有什么关系。(虽然在许多场合，直觉主义者由于他们的观点而拒绝经典地有效的证明；例如假定每一有关无限总体的陈述非真即假——这相当于假定这总体是明确定义的——的证明，是被直觉主义者所拒绝的。)因为即使我们把整数的概念扩充的包含一个新"对象"，如果所有按前述方式证明的定理对于所有原先视为整数的事物都成立(注意，在任一给定时刻只需要有限多个这些事物)，并且如果这"新"整数总是"1 加上"原先视为整数的某事物，那么所谈及的定理对这个"新"整数也将成立。