$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

中学数学辅导丛书

极限与连续

方仲春　编

黑龙江科学技术出版社

极 限 与 连 续

Jixian Yu Lianxu

方 仲 春 编

黑龙江科学技术出版社

一九八四年 · 哈尔滨

责任编辑：张宪臣
封面设计：仁　之

极限与连续

方仲春　编

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号
黑龙江新华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本 787×1092 毫米 1/32·印张 2.625·字数 52 千
1984年8月第一版·1984年8月第一次印刷
印数：1—45,000

书号：13217·103　　定价：0.37元

前　　言

根据《全日制重点中学数学教学大纲（草案）》规定，中学数学教材增加了行列式、矩阵、向量、集合、逻辑代数、概率和微积分等内容，为了帮助广大中学师生正确理解和掌握这些新内容，我们组织编写了这套《中学数学辅导丛书》。它包括行列式、矩阵和线性方程组、向量、集合、逻辑代数、极限与连续、复合函数的导数、导数的应用、不定积分、定积分的应用、随机变量等。

这套丛书密切结合现行全日制六年制重点中学数学课本，全面地介绍了课本中增加的新内容，并适当地做了拓宽和加深，以利于教学使用。

由于我们编写丛书的经验不足和水平有限，不妥之处在所难免，敬请读者提出宝贵意见，以便今后改进，使本丛书成为广大中学师生有益的参考书。

葛　棠　戴再平　韩殿发

一九八二年十月

目　录

一、数列的极限

（一）数　　列

我们看下面的例子：

自然数的倒数按从大到小的顺序排列成的一列数

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\quad \frac{1}{n},\ \cdots$$

$\frac{1}{2}$的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，…，依次排列成一列数

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\quad \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

$\sqrt{2}$的精确到 1，0.1，0.01，…的不足近似值依次排列成一列数

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ \cdots$$

正的偶数按从小到大的顺序排列成一列数

$$2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 2n,\ \cdots$$

定义　按一定顺序排列的一列数叫做**数列**。一般写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \tag{1}$$

其中 a_1 叫做第 1 项，a_2 叫做第 2 项，…，a_n 叫做数列的第 n 项，它的下标 n 叫做**序号**，a_n 的下标 n 即为 a_n 的序号。数列(1)可以简记作$\{a_n\}$。

对数列的定义说明以下几点：

(1) 数列的每一项与它的序号有下面的对应关系：

序　　号　1，2，3，…，n，…

数列的项　a_1，a_2，a_3，…，a_n，…

因此，数列也可以这样定义：以自然数 n 为自变量，按自然数从小到大的顺序排列的一列函数值叫做**数列**；

(2) 定义中"按一定顺序排列"是指序号（下标）按自然数从小到大的顺序排列．因此，不排先后顺序的一个数集，如整数集合，不能称为一个数列．有先后顺序，但不是按自然数从小到大的顺序排列的一列数也不能构成一个数列，如

$$\cdots,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ \cdots$$

因为没有指出哪一项是数列的第 1 项，第 2 项，…，第 n 项所以，也不是一个数列．

现在我们来研究数列的分类：

(1) 从小到大排列的 100 以内的质数所构成的数列：

$$2,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 97$$

这个数列中 97 后面不存在任何项了．一个数列里，如果存在一项，它的后面不再有任何项，这样数列叫做**有穷数列**；

如果一个数列里，任何一项的后面还有跟随着的项，这样的数列叫做**无穷数列**，如数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

就是无穷数列．

(2) 一个数列$\{a_n\}$的项如果满足：

(i) 当 $a_n \leqslant a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$

称为**递增数列**，而当 $a_n < a_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 称为**严格递增数列**；

(ii) 当 $a_n \geqslant a_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

称为**递减数列**，而当 $a_n > a_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 称为**严格递减数列**。

递增数列、递减数列统称为**单调数列**。

(iii) 如果数列 $\{a_n\}$ 的各项都相等，称为**常数列**。如数列

$$5,\ 5,\ 5,\ \cdots,$$

就是一个常数列。

(3) 如果一个数列 $\{a_n\}$ 存在一个正数 M，数列每一项 a_n 都满足不等式

$$|a_n| \leqslant M,\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

称数列为**有界数列**。如果不存在这样的正数 M，称这样的数列为**无界数列**。

例如，数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\quad \frac{1}{n},\cdots$$

任何一项都不大于 1，所以它是有界数列；数列

$$2,4,6,\cdots,\quad 2n,\cdots$$

就是无界数列。

数列可以用下面两种方法来直观表示：一种是用坐标轴上的点来表示，一种是用坐标平面上的点来表示，现在说明如下：

(1) 数轴上的点表示法。

数列的每一项都可以用数轴上的点表示出，用一系列的点就可以将数列表示在数轴上．为了标明数轴上的点表示数列哪一项，一般可以在该点处标出它对应的项．如，数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$：

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\quad \frac{n}{n+1},\cdots$$

表示如图 1-1。

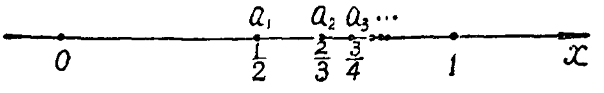

图 1-1

数列$\{2n\}$：

$$2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\quad 2n,\ \cdots$$

表示如图 1-2。

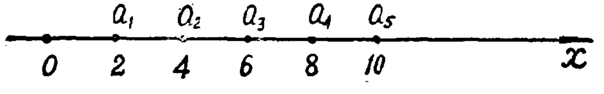

图 1-2

(2) 坐标平面上的点表示法。

数列$\{a_n\}$ 中，对每一个自然数 n，都对应着一项 a_n，这样，数列就可在坐标平面上用坐标为$(n,\ a_n)$的点集$(1, a_1)$，

$(2, a_2)$，$(3, a_3)$，…，(n, a_n)，…

来表示。如，数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$可以用点集

$$\left(1,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(2,\ \frac{2}{3}\right),\ \left(3,\ \frac{3}{4}\right),\ \cdots,\ \left(n,\ \frac{n}{n+1}\right),\cdots$$

表示如图 1-3。

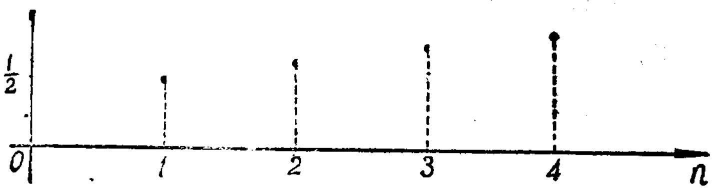

图 1-3

又如，数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$可以用点集

$$(1,\ -1),\left(2,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(3,\ -\frac{1}{3}\right),\cdots,$$

$$\left(n,\ \frac{(-1)^n}{n}\right),\cdots$$

表示如图 1-4。

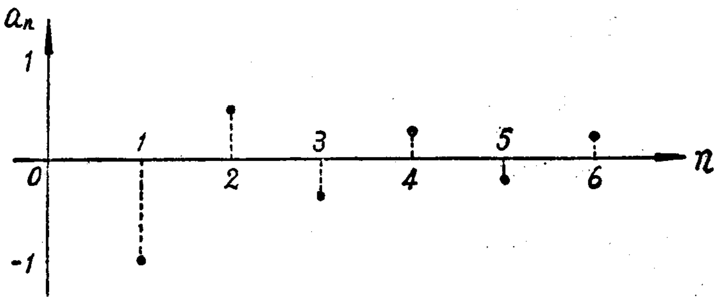

图 1-4

用数轴上的点或用坐标平面上的点表示数列，可以直观地反映数列的某些特征，如递增性、递减性、有界性等。

（二）数列的极限

我们考察下面几个数列，当n无限增大时，通项a_n的变化趋势。

（1）数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\cdots \qquad (1)$$

这个数列，当n无限增大时，$a_n=\frac{1}{n}$就无限趋近于0。我们将这个数列的前几项表示在数轴上（见图 1-5）。

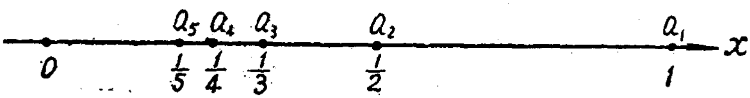

图 1-5

（2）数列$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$：

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\cdots \qquad (2)$$

这个数列，当n无限增大时，$a_n=\frac{n-1}{n}$就无限趋近于1。我们将这个数列的前几项表示在数轴上（见图 1-6）。

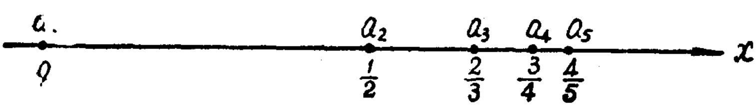

图 1-6

(3) 数列$\left\{2+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$:

$$2-1, 2+\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{3}, \cdots, \quad 2+\frac{(-1)^n}{n}, \cdots \tag{3}$$

这个数列，当n无限增大时，$a_n=2+\frac{(-1)^n}{n}$无限趋近于2。我们将这个数列的前几项表示在数轴上（见图1-7）。

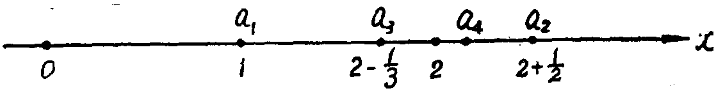

图 1-7

(4) 数列$\{(-1)^{n+1}\}$:

$$1, \ -1, \ 1, \cdots, \quad (-1)^{n+1}, \cdots \tag{4}$$

这个数列，当n无限增大时，$a_n=(-1)^{n+1}$重复相间的取1和-1，a_n不趋近于一个确定的数。

(5) 数列$\{n^2\}$:

$$1, \ 4, \ 9, \cdots, \quad n^2, \cdots \tag{5}$$

这个数列，当n无限增大时，$a_n=n^2$也无限增大，不趋近于任何定数。

(6) 数列$\{-n\}$:

$$-1, \ -2, \ -3, \cdots, \quad -n, \cdots \tag{6}$$

这个数列，当n无限增大时，$a_n=-n$的绝对值也无限增大，不趋近于任何定数。

上面几个数列，当n无限增大时，数列$\{a_n\}$的变化可以是各种各样的，但是，变化趋势可分为两大类：

第一类，当n无限增大时，a_n无限趋近于某一个定数，

如数列（1）中，随着 n 的无限增大，a_n 也无限趋近于 0；数列(2)中，随着 n 的无限增大，a_n 也无限趋近于 1；数列（3）中，随 n 的无限增大，a_n 也无限趋近于 2。

第二类，当 n 无限增大时，a_n 不趋近于某一个定数，如数列(4)，(5)，(6)。

我们把第一类数列叫做有极限的数列，或叫做**收敛数列**，把第二类数列叫做不存在极限的数列，或叫做**发散数列**。

由此，我们可以这样给出数列的极限定义：

定义 1　对于数列 $\{a_n\}$，如果当 n 无限增大时，a_n 无限趋近于一个确定的常数 A，就说数列 $\{a_n\}$ 为有极限的数列(或收敛数列)，常数 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限（或数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A），记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,\ \text{或记作}\ a_n \to A\ (n\to\infty).$$

这个式子读作“当 n 趋向无穷大时，a_n 的极限等于 A”。“$\to$”表示“趋向于”，“∞”表示“无穷大”，“$n\to\infty$”表示“n 趋向无穷大”，也就是 n 无限增大的意思。

对这个定义说明如下三点：

(1) 因为有穷数列不研究极限的问题，所以定义中的数列都是指无穷数列，本书以后凡提到数列的极限都是指无穷数列的极限；

(2) 因为数列的极限不能以变数作为极限，所以定义中的 A 是确定的常数；

(3) 数列的极限的这种定义叫做描述性定义，只能从考察数列有限项的变化趋势或借助几何直观，来“猜测”一个常

数A是这个数列的极限或者不是这个数列的极限，不能用这个定义证明定理或证明极限的性质等。

我们来分析定义1中的两句话："当n无限增大时"、"a_n无限趋近于A"。首先我们说a_n趋近于A，就是指a_n与A的"距离"$|a_n-A|$可以任意小，要多么小就可以多么小；其次我们说n无限增大，到底增大到什么程度呢？只要求n增大到能够使"距离"$|a_n-A|$要多么小就可以多么小的程度，就认为满足要求了。因此，我们这样给出数列极限的精确定义：

定义2　设$\{a_n\}$的一无穷数列。如果存在一个常数A，对于任意给定的正数ε，总存在自然数N，使得当$n>N$时，有不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立。我们说数列$\{a_n\}$有极限，常数A为数列$\{a_n\}$的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A$$

对于定义2说明如下几点：

(1) ε：它表示a_n与A无限靠近的程度的，具有二重性，一是"任意的"，二是"给定的"。只有给定的，才能具体确定出相应的N，使得当$n>N$时，有$|a_n-A|<\varepsilon$成立，只有任意小才能表示a_n与A无限靠近，即$|a_n-A|$可以小于任意小。因为ε任意给定的，所以$\frac{\varepsilon}{2}$，$\frac{\varepsilon}{3}$，ε^2，$\frac{\varepsilon}{M}(M>0)$，$\sqrt{\varepsilon}$等也表示任意的，以后为证明定理方便，也常选取这样一些数代替ε。所谓任意性，就表示可以任意小。

(2) N：它表示n无限增大到什么程度的自然数，是在ε给定后找到的相应的自然数，一般来说，ε越小，N就越大，有时为了表示ε与N相关也记作$N(\varepsilon)$，但并不是N

为 ε 的函数，因为对应一个 ε，可以找到无穷多个满足条件 $|a_n-A|<\varepsilon$ 的 N，这里只要求这样的 N 存在即可。

(3) 不等式 $n>N$，$|a_n-A|<\varepsilon$：不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 表示 a_n 无限趋近于 A，它是以不等式 $n>N$ 为前提的，也就是当 $n>N$ 时，$|a_n-A|<\varepsilon$ 表示一串不等式：

$$|a_{N+1}-A|<\varepsilon$$
$$|a_{N+2}-A|<\varepsilon$$
$$|a_{N+3}-A|<\varepsilon$$
$$\cdots\cdots$$

都成立。

(4) 几何解释：定义中的不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 等价于

$$A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$$

即

$$a_n\in(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$$

这就表明，当数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限时，对于给定的任意小的正数 ε，总可以找到一个自然数 N，使得 a_N 项以后的各项，即 a_{N+1}，a_{N+a}，a_{N+3}，…都落在开区间 $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ 内（图 1-8）。

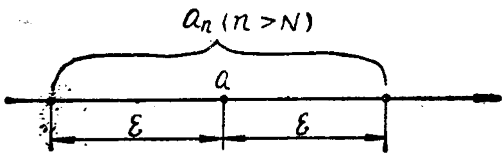

图 1-8

（三）数列极限的证明举例

利用数列极限定义 2 可以证明某些数列极限问题。

例 1　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

分析　由定义可知，要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

只要证明对于任意给定的正数 ε，能找到自然数 N，使得当 $n>N$ 时，有不等式

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

恒成立即可。

因为　　$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$

所以要使 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ 成立，只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，由此可见，取 N 为 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的最大整数部分，便能使得当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$。

证明　对于任意给定的正数 ε，

要使 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$，只需 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n<\frac{1}{\varepsilon}$。$\frac{1}{\varepsilon}$ 不一定是自然数，我们用 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 表示不超过 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的最大整数（以下同），显

然有 $n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，必有 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，于是对于任意给定的正数 ε，存在自然数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有不等式

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

恒成立。根据极限的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

例 2　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）。

证明　对于任意给定的正数 ε，都有

$$|C-C|=0<\varepsilon$$

根据极限的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}C=C$$

即常数列的极限就是常数。

例 3　当 $|q|<1$ 时，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$。

证明　对于任意给定的正数 ε，

要使

$$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$$

只要

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon$$

因为　$|q|<1$，所以 $\lg|q|<0$

只要

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$$

取 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$ $\left(如果\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}<1时，可取 N=1\right)$，那