

數學列車

王峻峯著

333X41/19

數學列車

王峻岑著

江苏工业学院图书馆
藏书章



開明書店

王峻岑
書

數學列車

民國三十七年二月初版

民國三十八年一月再版

每冊定價〇八・〇

著者

王峻岑

發行者

上海福州路
開明書店
代表人范洗人

印刷者

開明書店

有著作權*不准翻印

內政部著作權註冊執照內審字第一一〇六九號

(98 P.) K

岑

序

以幾何學爲中心的古希臘數學，固然早已成了陳跡，就是以解方程式爲中心的代數學，也在現代的數學陣營裏面，稱不了英雄好漢。全世界研究數學的人士，莫不認爲數學的核心乃是函數，而治理函數的唯一利器乃是微積分。所以二十餘年以前，歐美各國的數學專家與教育專家，有很多人主張把函數的概念定爲學習數學的中心概念，而在中等教育的課程之中，加入簡易微積分一項，使學生對於變化率的比較與極限的應用，早有初步的認識，以建立入大學修習微積分的基礎，並作修習物理學、統計學等科的準備。我以爲他們的主張非常合理，在科學突飛猛晉的今日，這個老問題實在有重加注意與討論之必要。

也許有人要提出反對的意見，以爲現行中學課程裏邊的數學，已經太嫌繁重，差不多把學生壓得透不過氣來。過去別人曾喊過「救救中學生」的口號，目的就是要減輕中學生對於數學的擔負。現在若主張在中學課程裏面，再加上微積分，豈不是真要把學生壓得透不過氣來麼？假使他向我這樣表示，那麼我就請他看一看王峻岑先生寫的數學列車這本書。照王先生的方

法來講微積分，是不是比教中學生白白地絞盡腦汁，去演幾道代數幾何的難題，更為輕鬆，更易明白，更有意義。這些難題，大都瑣碎複雜，迂迴曲折，其實無關宏旨，而且跡近猜謎。假使底本在手，真是會者不難，但是古本罕見，孤本少傳，一謎二謎已可招來眠食俱廢，三謎四謎簡直要了人的命。經過這種「思想訓練」的青年，歷年來不知道多多少少，可惜不僅不見有幾百幾千的大數學家，紛紛登世界數學之壇，反而見有很多病夫加入了肺癆團體。然而在教材的補充與升學的指導兩頂堂皇動人的帽子之下，也只得拚一拚小命。好在一方面躡等以求，博得個用功美名，且可獲得敲門之磚，何妨不惜健康而一試。他方面樂育英才，大顯身手，八方延聘，比得上印佩六國，當然不去管什麼三育並重，教育意義，與夫世界趨勢了。

須知中學課程標準，本來已有問題，再加上補充指導，自然要弄得艱深繁重。倘若將難題名題，一掃而空，單講些基本概念與基本方法，那麼簡易微積分的講授，即使不像數學列車那樣的輕鬆流利，引人入勝，我想總不會比教授艱深的方程式論，級數理論，連分數，消去法，恆等式證法，作圖與軌跡等等項目，更為艱深罷！

王先生寫數學列車，不但把微積分的基礎，如無窮小的概念，極限的意義，變化率的應用等等，說得明白透徹，人人可懂，而且提出了一個獨到的意見，即是「變為常而不變為非常。」這句

話，大可讓那些捧着古本與孤本的人，細細地咀嚼一下。此外，王先生更能將全書寫得詩意盎然，尤屬難能可貴。奧斯古先生的書，我現在正用作教本，王先生也把此書作為根據，好說是與我有同見。因此就不顧文筆的拙陋，率爾亂道數言，不敢謂之序也。

三十七年元月 陳嶽生 作於上海大夏大學

自序

無論研究什麼科學，總是離不開數學；而且這個數學，還不僅只是代數幾何，除此之外，用得最多最廣的，卻是微積分。

其次，就整個的數學來說，無論數學的分類有多少不同的意見，然而解析學是數學裏最重要的一支，這也是沒有問題的。在解析學裏，我們又不能不指出微積分是它的一個主幹。

照這樣說起來，無論是研究科學，或是僅僅研究數學，微積分應該是一個必需知道的常識。然而在事實上，一個高中畢業的學生，常常是沒有機會和它接觸。這件事情有點太遺憾。

在中文本裏，拿着通俗的文字來介紹微積分的，只有劉薰宇先生的一本數學的園地。在那本書裏，雖然大部分講的都是微積分，然而全書的企圖，在於整個數學內容的介紹。現在我寫的這本書，卻是專門以微積分爲範圍，沒有談到別的部門或是別的問題。雖然在我不敢高攀，但是我以爲如果這兩本書能夠對照的看起來，倒是對於讀者是很有益處的。

再就是在這一本書裏，因爲對象是一般的讀者，尤其是不研究數學的人，或是沒有機會去

學習的人，所以處處着重在基本的觀念，同時又竭力的避免算式。還有爲了不太枯燥，因此講起來就又不免添枝添葉的。

其實，即使學過微積分的人也無妨看看，權作是個消遣；我相信，至少不會讓你頭痛。而且天天在數學裏轉圈子，偶爾到外面散散心，也不是一件沒有意義的事情。

照這樣說來說去的，倒變成爲這本書作廣告了。可是如果廣告作不好，反倒不如不說——然而還有幾句話，卻是不能不說。

第一，這本書裏的內容，多少是取材於奧斯古先生的微積導論（W. F. Osgood: *Introduction to the Calculus*）。第二，蒙陳嶽生先生爲本書作序，盧錫疇先生爲本書製圖，開明書店爲本書出版，還有金問魯先生曾對本書提供不少的建議，統此一併道謝。

至於內容究竟如何，還是請看正文。

三十六年七月，濟南。

(一) 書叢年青明開

中學各科學習法	夏可尊等著	怎樣利用圖書館	洪煥椿著	精神文化講話	曹伯韓著	給青年的十二封信	朱光潛著	生活藝術	曹孚著	豐富的人生	曹孚著	社會科學講話	祝伯英著	學習心理之話	傅彬然著	五年計劃故事	伊林原著	文心(讀寫的故事)	夏可尊等著	閱讀與寫作	夏可尊等著	文章講話	夏可尊等著	中國語法綱要	王了一著	文言虛字	呂叔湘著
---------	-------	---------	------	--------	------	----------	------	------	-----	-------	-----	--------	------	--------	------	--------	------	-----------	-------	-------	-------	------	-------	--------	------	------	------

中國人學英文	呂叔湘著	少年科學大綱	胡伯愷譯	家常科學談	法布爾原著	任何人之科學	顧廷正譯	科學在今日	湯仲實譯	科學的趣味	法布爾原著	科學的驚異	顧均正著	電子姑娘	顧均正著	幾點鐘	顧均正著	黑天白	伊林原著	不夜天	伊林原著	十萬個為什麼	伊林原著	數學的園地	劉薰宇著	數學趣味	劉薰宇著
--------	------	--------	------	-------	-------	--------	------	-------	------	-------	-------	-------	------	------	------	-----	------	-----	------	-----	------	--------	------	-------	------	------	------

行印店書明開

(二) 書叢年青明開

- | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|----------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------|-----------------------|------------------|--------------------------------------|------------------|------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------|----------------------------|--------------------------------------|
| 談
藝
術
趣
味 | 汽
車
怎
樣
跑
路 | 我
們
的
身
體 | 菌
兒
自
傳 | 細
菌
與
人 | 昆
蟲
漫
話 | 鳥
與
文
學 | 生
物
素
描 | 花
鳥
蟲
魚 | 化
學
奇
談 | 物
理
世
界
的
漫
遊 | 趣
味
的
物
理
學 | 星
空
的
巡
禮 | 馬
先
生
談
算
學 | |
| 朱光潛著 | 豐子愷著 | 伊林原著 | 胡伯慇譯 | 高士其著 | 高士其著 | 陶秉珍著 | 賈祖璋著 | 賈祖璋著 | 克士著 | 法布爾原著 | 顧均正譯 | 崔尙辛譯 | 王幼子譯 | 劉蕪宇著 |
| 人
和
山 | 南
極
探
險
記 | 亞
洲
腹
地
旅
行
記 | 現
代
世
界
地
理
之
話 | 三
十
二
國
風
土
記 | 玄
武
門
之
變 | 二
千
年
間 | 平
民
世
紀
的
開
拓
者 | 大
丈
夫 | 人
類
史
話 | 中
國
文
藝
思
潮
史
略 | 中
國
文
學
欣
賞
舉
隅 | 我
與
文
學
及
其
他 | 談
文
學 | 世
界
文
學
名
著
講
話 |
| 伊林原著 | 胡仲持譯 | 李述禮譯 | 陳原著 | 胡仲持著 | 宋雲彬著 | 蒲韜著 | 陳原著 | 范文瀾著 | 陶秉珍譯 | 朱維之著 | 傅爽生著 | 朱光潛著 | 朱光潛著 | 茅盾著 |

行 印 店 書 明 開

目 錄

第一站	孫悟空坐火車	一
第二站	動的話題	一〇
第三站	火車究竟多麼快	一八
第四站	數的行列	二六
第五站	這個年頭變了	三五
第六站	跑到哪裏算一站	四三
第七站	大和小的賽跑(上)	五四
第八站	大和小的賽跑(下)	六六
第九站	一個跟着一個變	七八
第十站	Do Re Mi	八七
第十一站	一切都是時間的函數	九五

第十二站	用算式來描寫這世界	一〇四
第十三站	化零爲整	一二三
第十四站	點線面體	一二一
第十五站	求積的設計	一三〇
第十六站	開擴了許多的眼界	一四一
附錄	車廂檢查	一五二

第一站 孫悟空坐火車

今天沒有事，咱們隨便談個問題。

談什麼呢？

我想，你大概看過西遊記吧？那是一本長篇小說，講的唐僧取經的故事。至少，你總該聽到別人講過。

這裏面一共有四個主角，就是唐僧，沙僧，豬八戒，孫悟空。又叫孫行者，是一個猴子；一個筋斗十萬八千里，他有這麼一副好的本領。豬八戒是一個豬，肥頭大耳朵，走起路來大搖大擺，因為太胖了，所以只有邁着四方步，腳底下是非常吃力的。他們倆，一個好動，一個好靜，個性恰好相反。假設他們能夠活到現在，那真是再好玩沒有了！

好啦，現在就算他們還在活着。於是我就想出了一個題目，我們讓孫悟空和豬八戒來個運動競賽。譬如說，跑個長距離吧。那麼我們預測一下，誰能跑第一呢？

當然是孫悟空了！

是的，我也是這樣想；十拿九穩，包管沒有錯。

爲什麼呢？因爲論快慢就要比較距離。豬八戒頂多一步走五尺，可是孫悟空一跳就是十萬八千里！那還會有錯麼？

可是這究竟是一個難得的機會，咱們都應當去瞧一下。

沙僧是發令員，唐僧是評判長。一共四個人包辦這個運動會。

你聽，發令員吹哨了！咱們都得戴起望遠鏡來。豬八戒那麼胖，還沒有走幾步就張着大嘴喘起粗氣來了；可是孫悟空還是不改當年的脾氣，一跳就跳到半天雲裏去！

「孫悟空真快呀！」大家都喊起來了，這真是一個奇蹟。

然而——你猜怎麼着？結果倒是豬八戒得了第一！你說奇怪不奇怪？爲什麼呢？

老了，孫悟空老了！雖然他是人老心不老，可是腿腳卻不大受用。這一個筋斗跳上去，因爲用力太猛，腿肚子轉了筋，就在半天雲裏來了個四肢無力，週轉不靈。豬八戒雖然也老了，可是老實人專辦老實事，傻勁總還有點，一路上早起晚睡，辛辛苦苦一直就沒有停下來。

結局豬八戒跑了三個月，而孫悟空卻費了一百二十天。你能說孫悟空比豬八戒跑得快嗎？

你笑了，你以爲這是胡說，可是這裏面就有一個道理。論快慢，不但要比較距離，而且還要比較時間。

你大概知道，表示快慢的叫做速度。所謂速度就是表示一個單位時間所走的距離。

什麼叫做單位時間呢？我們先要知道表示時間的是個複名數，小的單位有時，分，秒；大的單位有日，月，年。一年，一月，一日，一時，一分，一秒，這都叫做一個單位時間。用哪個就說哪個，這倒沒有限制。

至於速度，倘然始終不變，就可以用下面的公式推算：

速度 = 距離 ÷ 時間

譬如一個速度是每小時十二里，也就是每分鐘三十丈，同時也就是每秒鐘五尺。

而且，時間和距離既然有個單位，所以速度也有個單位。在一個單位時間之內走一個單位的距離，就叫做一個速度的單位。譬如每小時走一里，叫做一時里；每秒鐘走一尺，叫做一秒尺；速度快的，時間就得用個小單位；速度慢的，時間就要用個大單位。這僅是爲了表示的便利，並沒有什麼別的道理。

因爲速度的表示需要知道距離和時間，所以兩個速度比較的時候，就得先確定一個標準。

假設時間一定，那麼距離大的速度大，這是普通的一個想法。假設距離一定，那麼時間短的速度大，這就是運動會上比較快慢的一個標準。所謂徑賽一百公尺，二百公尺，四百公尺，成績是什麼？十二秒，二十八秒，六十秒。這就是比較的時間。

所以要想表示快慢，那麼時間和距離都得說清楚，不然就沒有意義。我們說孫悟空一個筋斗十萬八千里，這只是表示他的本領，實在並沒有表示他的速度。然而為什麼我們都以為他跑得快呢？這是因為我們自己認為一個筋斗用不了多大的時間。看看舊劇裏的武生，一分鐘能夠打十個筋斗，平均一個筋斗不過需要六秒；要是六秒鐘走十萬八千里，一秒鐘就能走一萬八千里——所以我們覺得他快。但是這一個筋斗打下來要是用了一百二十天，平均一天纔走九十里，那就還不如我們騎腳踏車快了。所以結果就叫豬八戒得了第一。

因此要想說明速度，時間和距離必需都要交代明白——然而這就是我們常常疏忽的一點。

同時，求速度的公式又可以寫成一個分數：

$$\text{速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

按照上面比較速度的說法，假如分母一定，分子大的分數之值就大；假如分子一定，分母小的分數之值就大——這就是比較分數大小的一個原則。

不過在我們心裏，總覺得有點替孫悟空叫屈，說實在的，他自己也覺得有點冤枉！誰叫人老了，連自己的腿也不爭氣！

然而孫悟空卻有個小心眼。他告訴豬八戒說：「老豬，這次有你的，老孫算是栽倒你的手裏。可是咱們回去再比比看，要是我再輸了我就拜你爲師兄。」

豬八戒張開大嘴，哈哈的笑着說：「不敢不敢，只要你不怕丟人，咱們就無妨再試一下！」

這時候沙僧樂得的看個熱鬧，他拍着掌說：「好好好，說賽就賽，一二三！」

不等哨響，豬八戒就大搖大擺的又開了腿。這一次孫悟空不敢再翻筋斗了，可是他一個箭步就鑽到豬八戒的前頭。

「老豬加油啊！」沙僧跟着成了啦啦隊。

這一喊，給豬八戒助了威，果然他就越跑越快，連老命也不要了。——可是在他的腳底下加的並不是油，只是加了一個速度。這個額外增加的速度叫做加速度。

加速度也是按照單位時間來計算，如果每一秒鐘加一個速度每秒五尺，那麼這個加速度