College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

大学文科
高等数学题解

（上册）

姚孟臣　张清允　编著

高等教育出版社

大学文科高等数学题解

上　册

姚孟臣　张清允　编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学文科高等数学题解.上/姚孟臣,张清允编著.
北京:高等教育出版社,2003.6
ISBN 7-04-012763-6

Ⅰ.大… Ⅱ.①姚…②张… Ⅲ.高等数学-高等
学校-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037541 号

编　　辑	李陶	**策　　划**	李艳馥	**封面设计**	于涛
版式设计	唐开宇	**责任校对**	唐开宇	**责任印制**	韩刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	天津新华印刷一厂		
开　　本	850×1168 1/32	**版　　次**	2003年8月第1版
印　　张	10.125	**印　　次**	2003年8月第1次印刷
字　　数	250 000	**定　　价**	13.00元

内容简介

本书是与《大学文科高等数学》(姚孟臣主编,高等教育出版社出版)配套的辅导教材之一,给出了该书中大部分习题的分析与解答,并针对目前文科学生的实际需要,适量增加了选择、填空等其他题型的习题。

本书分上、下两册出版,上册的内容包括微积分、级数和微分方程,下册包括线性代数、概率论和数理统计。书的每一章中都含内容提要、习题、分析及解答。

本书在编写时考虑到各方面的需要,内容上较为全面。因此,读者在使用本书进行复习时,应参照有关的《教学大纲》和《考试大纲》进行。

本书可以作为普通高等院校文科各个专业的学生以及参加全国高等教育自学考试、学历文凭考试的考生学习微积分、线性代数、概率论与数理统计课程的参考书。也可以满足成人高等教育以及高等职业教育各个专业的学生学习相关课程教学辅导的需要。

前　　言

文科类高等数学是为适应现代科学文理渗透的趋势而设置的一门基础数学理论与应用数学方法相结合的课程，其教学内容和教学方法都应该具有明显的文科特色。针对目前文科学生的实际需要、知识结构和思维特点，我们编写了《大学文科高等数学题解》一书，它是《大学文科高等数学》配套的辅导教材之一。

我们认为，解题是学好数学的一个必要环节。通过解题可以加深对概念的理解，掌握各种解题的方法和技巧，进一步巩固已学到的知识。考虑到一方面教材一般不可能用很大的篇幅来介绍解题的方法和技巧，而且目前大多数院校和社会上各类数学的考试仍然采用笔试的形式；另一方面由于各种原因，很多学生感到解题是一件很困难的事情，特别是对于学习高等数学的文科学生来说更是如此。因此《大学文科高等数学题解》在内容选取和结构设计上都作了较为周密的考虑。本书分上、下两册出版，上册的内容包括一元和多元微积分，下册包括线性代数、概率论和数理统计。

为了使得学生通过一定数量题目的练习，会更好地理解和掌握有关的基本概念和基本解题的方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断地增加对考试的适应能力和通过考试的自信心。在使用本书时应按照以下四个步骤学习才会有较大的收益：

1. 通过审题来正确理解题意。特别是概率统计部分，首先把题目的已知和要求的是什么弄清楚，而那种只有看完题解后才能正确理解题意的做法是万万不可取的。

2. 分析题目来确定主要考核知识点。解答该题时要用到哪些

知识点，需要哪些公式或定理要事先明确，这种训练是十分必要的。

3. 选择适当的方法与技巧。解题技巧的掌握不仅要“看”，更重要的是“学”，即动手来解题，所谓“熟能生巧”就是这个道理。对于概率统计部分，我们认为主要是掌握解题的各种方法。

4. 学习解题格式及关键步骤表述。解题格式是大多数同学最容易忽视的一个问题，学习必要解题格式也是十分重要的。在各类考试中，必要的解题格式以及写出关键步骤是我们评判的重要标准，也是今后学习和工作中所需要的。

本书在编写时考虑到各方面的需要，内容上较为全面。因此，读者在使用本书进行复习时，应参照有关的《教学大纲》和《考试大纲》进行。

本书适合文科各个专业以及参加自学考试、学历文凭考试及其他各类考试的高等数学课程的需要。也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业的微积分、线性代数、概率论与数理统计课教学辅导的需要。

由于编者水平和精力所限，题解中难免有错误和疏漏之处，恳请读者和教授此课的老师们批评指正。

编　者
2003 年 2 月 6 日
于北京大学中关园

目　　录

第一部分　微　积　分

第一部分 微 积 分

第一章 函数、极限与连续

一、内容提要

(一) 重要概念及性质

1. 集合

所谓**集合**就是按照某些规定能够识别的一些具体对象或事物的全体. 构成集合的每一个对象或事物叫做集合的**元素**.

如果一个集合中只有有限多个元素，那么这种集合叫做**有限集**. 如果集合不是由有限个元素组成，那么这种集合叫做**无限集**.

通常集合用大写字母 A,B,C 表示，其元素用小写字母 a,b,c 表示.

设 A,B 是两个集合. 如果 B 的每一个元素对应于 A 的惟一的元素，反之 A 的每一个元素对应于 B 的惟一的元素，那么就说在 A 和 B 的元素之间建立了一一对应关系，并称 A 与 B **等价**，记作

$$A \sim B.$$

与自然数集 $\mathbf{N}$ 等价的任何集合，称为**可列集**. 显然，一切可列集彼此都是等价的. 今后我们常称这类集合中元素的个数为可列个(或可数个)，并把有限个或可列个统称为**至多可列个(或至多可数个)**.

集合分类如下：

$$\text{集合}\begin{cases}\text{有限集}\\ \text{无限集}\begin{cases}\text{可列集}\\ \text{不可列集}\end{cases}\end{cases}$$

2. 区间与邻域

所谓**区间**就是介于某两点之间的一切点所构成的集合，这两个点称为区间的**端点**. 如果两个端点都是定数，称此区间为有限的，否则称为无限的. 常见的有限区间有：设 $a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，我们把集合 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)；把集合 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$；把集合 $\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$ 称为**半开半闭区间**，分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$. 对于**无限区间**，例如 $\{x\,|\,x>a\}$，记作 $(a,+\infty)$；$\{x\,|\,x<a\}$，记作 $(-\infty,a)$；$\{a\,|\,a\in\mathbf{R}\}$，记作 $(-\infty,+\infty)$. 类似地，还有 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,a]$.

设 $a\in\mathbf{R}$，$h\in\mathbf{R}$ 且 $h>0$. 称集合

$$\{x\,|\,|x-a|<h\}$$

为 a 的一个**邻域**，记作 $N_h(a)$，其中 h 为**邻域半径**；称集合

$$\{x\,|\,0<|x-a|<h\}$$

为 a 的一个**空心邻域**，记作 $N_h(\bar{a})$. 当不必指明邻域半径时，我们用 $N(a)$，$N(\bar{a})$ 表示 a 的邻域和 a 的空心邻域. 称集合

$$\{x\,|\,a\leqslant x<a+h\}\ \text{和}\ \{x\,|\,a-h<x\leqslant a\}$$

为 a 的**右邻域**和**左邻域**，记作 $N_h^+(a)$ 和 $N_h^-(a)$. 若上述集合除去 a 点，就称为 a 的**空心右邻域**和**空心左邻域**，记作 $N_h^+(\bar{a})$ 和 $N_h^-(\bar{a})$. 不必指明邻域半径时，记号中可省略下角标 h.

3. 函数

定义 1.1 设 X 是一个给定的数集，f 是一个确定的对应关系，如果对于 X 中的每一个数 x，通过 f 都有 $\mathbf{R}$ 内的惟一确定的一个数 y 与之对应，那么这个关系 f 就叫做从 X 到 $\mathbf{R}$ 的**函数关**

系，简称**函数**，记为

$$f: X \to \mathbf{R} \quad \text{或} \quad f(x) = y.$$

我们把按照函数 f 与 $x \in X$ 所对应的 $y \in \mathbf{R}$ 叫做 f 在 x 处的**函数值**，记作 $y=f(x)$，并把 X 叫做函数 f 的**定义域**，用 D_f 表示，而 f 的全体函数值的集合

$$\{f(x) \mid x \in X\}$$

叫做函数 f 的**值域**，通常用 Y 来表示，即

$$Y = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

今后我们把函数用

$$y = f(x), \quad x \in X$$

来表示，并说 y 是 x 的函数，其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**. 由于在我们讨论的范围内，函数 f 和函数值 $f(x)$（即 y）没有区分的必要，因此通常把 y 叫做 x 的函数.

所谓**单值函数**就是对于 X 中的每一个值 x，都有一个而且只有一个 y 的值与之对应的函数. 对于 X 中的某个 x 值有多于一个 y 的值与之对应的函数，叫做**多值函数**.

函数有四个基本性质，它们分别是：单调性、有界性、奇偶性和周期性.

（1）奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 X 为一个对称数集，即任给 $x \in X$ 时，有 $-x \in X$. 若函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

（2）单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$，$x \in X$，任给 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 且 $(a,b) \subset X$. 若 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在(a,b)内是**递增**(**递减**)的;又若 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在(a,b)内是**不减**(**不增**)的.

递增函数或递减函数统称为**单调函数**.同样我们可以定义在无限区间上的单调函数.

(3) 有界性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$在 X 上有定义,若存在 $M_0>0$,对于任意的 $x\in X$ 使得$|f(x)|\leqslant M_0$,则称 $f(x)$在 X 上是**有界的**;否则称 $f(x)$在 X 上是**无界的**.

(4) 周期性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$,$x\in \mathbf{R}$.若存在 $T_0>0$,对于任意的 $x\in \mathbf{R}$ 使得 $f(x+T_0)=f(x)$,则称 $f(x)$是**周期函数**,T_0 为其**周期**.

由定义可知,$kT_0(k\in \mathbf{N})$都是它的周期,可见一个周期函数有无穷多个周期.若在无穷多个周期中,存在最小的正数 T,则称 T 为 $f(x)$的**最小周期**,简称**周期**.

4. 反函数

定义 1.6 给定函数 $y=f(x)(x\in X,y\in Y)$.如果对于 Y 中的每一个值 $y=y_0$ 都有 X 中惟一的一个值 $x=x_0$,使得 $f(x_0)=y_0$,那么我们就说在 Y 上确定了 $y=f(x)$的**反函数**,记作

$$x = f^{-1}(y) \quad (y \in Y).$$

通常我们称函数 $y=f(x)$为**直接函数**,而用符号“f^{-1}”表示新的函数关系.

习惯上我们用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因而常把函数 $y=f(x)$的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$的形式.从而 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的,这是因为这两个函数因变量与自变量互换的缘故.

5. 复合函数

定义 1.7 设 $y=f(u)(u\in U)$，$u=g(x)(x\in X, u\in U_1)$. 若 $U_1\subset U$，则称 $y=f[g(x)](x\in X)$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数**，有时记为 $f\circ g$，并称 u 为**中间变量**.

两个以上的函数也可以进行复合运算，并且满足结合律，即

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h.$$

需要指出的是，复合运算与四则运算不同，它没有交换律，即若 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都存在，一般来说

$$f\circ g\neq g\circ f.$$

6. 初等函数

我们所研究的各种函数，特别是一些常见的函数都是由几种最简单的函数构成的，这些最简单的函数就是在初等数学中学过的**基本初等函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数**.

定义 1.8 基本初等函数经过有限次加、减、乘、除、复合运算所得到的函数，称为**初等函数**.

7. 分段函数

定义 1.9 由两个或两个以上的分析表达式表示的函数，称为**分段定义的函数**，简称为**分段函数**.

8. 数列的极限

(1) 数列的定义

定义 1.10 按照一定顺序排列的可列个数：

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为**数列**，记为 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为第 n 项或通项，n 称为 x_n 的序号.

(2) 数列的极限

定义 1.11(数列极限) 给定数列 $\{x_n\}$. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它怎样小，都存在着这样一个非负整数 N，使得当 $n>$

N 时，不等式 $|x_n - A| < \varepsilon$ 都成立，那么我们就称 A **为 n 趋于无穷时 $\{x_n\}$ 的极限**，并称 $\{x_n\}$ **收敛于** A. 记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A(n \to \infty).$$

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，那么我们就称 $\{x_n\}$ 是**发散**的.

9. 函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

定义 1.12（$x\to+\infty$ 时的函数极限） 给定函数 $f(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它怎样小，都存在着这样一个正数 X，使得当 $x>X$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 都成立，那么我们就称 A **为 x 趋于正无穷时 $f(x)$ 的极限**，并称 $f(x)$ **收敛于** A. 如果函数 $f(x)$ 没有极限，那么我们就称 $f(x)$ 是**发散**的.

定义 1.13（$x\to-\infty$ 时的函数极限） 给定函数 $f(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它怎样小，都存在着这样一个正数 X，使得当 $x<-X$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 都成立，那么我们就称 A **为 x 趋于负无穷时 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to -\infty).$$

定义 1.14（$x\to\infty$ 时的函数极限） 给定函数 $f(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它怎样小，都存在着这样一个正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 都成立，那么我们就称 A **为 x 趋于无穷时 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to \infty).$$

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

定义 1.15（$x\to a$ 时函数的极限） 给定函数 $f(x)$. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它怎样小，都存在着这样一个正数 δ，使得 $x\in N_\delta(\bar{a})$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 都成立，那么我们就称 A 为 x 趋于 a 时（或在 a 点处）$f(x)$ 的极限，并称 $f(x)$ **在 a 点收敛于** A. 如果函数 $f(x)$ 在 a 点没有极限，那么我们就称 $f(x)$ **在 a 点是发**

散的.

(3) 单侧极限

定义 1.16 设函数 $f(x)$在 $N^+(\bar{a})$上有定义. 如果对于任意给定的正数 ε,不论它怎样小,都存在着这样一个正数 δ,使得 $x \in N_\delta^+(\bar{a})$时,不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 都成立. 那么我们就称 A 为$f(x)$在 a 点的**右极限**,记作

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A(x \to a+0),$$

右极限 A 也可简记为 $f(a+0)$.

同样可以定义函数 $f(x)$在 a 点的**左极限** $f(a-0)$.

可以证明: 函数 $f(x)$在 a 点处极限存在的充要条件是$f(x)$在 a 点处的两个单侧极限都存在并且相等,即

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(a-0) = A = f(a+0).$$

10. 极限的性质

(1) 惟一性 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,则极限值是惟一的.

(2) 有界性 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$,则在 $N(\bar{x}_0)$内 $f(x)$是有界的;若$\lim\limits_{n \to \infty} x_n=A$ 存在,则数列$\{x_n\}$有界.

(3) 保号性 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在 x_0 的某邻域(点 x_0 除外),在此邻域内有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$,且在 x_0 的某邻域内(点 x_0 除外)$f(x)>0$(或 $f(x)<0$),则必有 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

11. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量

定义 1.17 以零为极限的变量称为无穷小量,即若

$$\lim y = 0,$$

则称 y 为一**无穷小量**.

无穷小量的几个性质.

性质 1 两个无穷小量的和是无穷小量.

性质 2 无穷小量与有界变量的积是无穷小量.

性质 3 变量以 A 为极限的充要条件是变量为 A 与无穷小量的和.

(2) 无穷大量

定义 1.18 在某一个变化过程中,绝对值无限增大的变量,称为**无穷大量**.

在某一个变化过程中

① 若 y 是无穷大量,则$\frac{1}{y}$是无穷小量;

② 若 y 是无穷小量,且 $y\neq 0$,则$\frac{1}{y}$是无穷大量.

(3) 无穷小量的阶

设 $\lim f=0,\lim g=0,l,k$ 为常数.

① 如果

$$\lim \frac{f}{g}=l\neq 0,$$

则称 f 与 g 是**同阶**无穷小量,记作

$$f\sim lg,$$

特别当 $l=1$ 时,称 f 与 g 是**等价**无穷小量;

② 如果

$$\lim \frac{f}{g}=0,$$

则称 f 是 g 的**高阶**无穷小量(或称 g 是 f 的**低阶**无穷小量),记作

$$f=o(g);$$

③ 如果

$$\lim \frac{f}{g^k}=l\neq 0(k>0),$$

则称 f 是关于 g **的 k 阶**无穷小量.

关于等价无穷小量有一个很有用的性质:设 $f_1\sim f_2,g_1\sim g_2$,

且 $\lim(f_2/g_2)$存在，则

$$\lim \frac{f_1}{g_1} = \lim \frac{f_2}{g_2}.$$

12. 函数连续性

定义 1.19 称函数 $f(x)$在点 x_0 处是**连续**的，如果它满足：

(1) $f(x)$在 x_0 处有定义；

(2) $f(x)$在 x_0 处有极限存在，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A;$$

(3) $f(x)$在 x_0 处的极限值等于函数值，即

$$A = f(x_0).$$

并称 x_0 为 $f(x)$的**连续点**. 否则就说函数在 x_0 是**间断的**，并称 x_0 为 $f(x)$的**间断点**.

若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的每一点处都连续，则称 $f(x)$在开区间(a,b)内是连续的；若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，并且在区间的左端点 a 处是右连续的(即 $f(a^{+0})=f(a)$)，在区间的右端点 b 处是左连续的(即 $f(b^{-0})=f(b)$)，则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上是连续的. 若一个函数 $f(x)$在它的定义域上的每一点都是连续的，则称它是连续函数.

定义 1.20 (1) 如果函数 $f(x)$在 x_0 点的左右极限都存在，但不都等于该点的函数值，那么就称 x_0 为**第Ⅰ类间断点**；

(2) 如果函数 $f(x)$在 x_0 点的左右极限中至少有一个不存在，那么就称 x_0 为**第Ⅱ类间断点**.

在第Ⅰ类间断中，如果函数在间断点左、右极限存在并相等，但不等于该点的函数值，那么我们可以补充或重新定义函数在间断点的值，使得函数在该点变成是连续的，这种间断点我们称为**可去间断点**.

间断点的分类如下表：