一元一次方程

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新 知 識 出 版 社

一 元 一 次 方 程

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

*

新 知 識 出 版 社 出 版
（上 海 湖 南 路 9 号）
上海市書刊出版業营業許可証出 015 号

上海市印刷三厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：2　字数：45,000
1957年9月第1版　1957年9月第1次印刷
印数：1—30,000本

統一書号：13076·86
定　　价：（7）0.19元

序　言

本会为了帮助教师学习苏联先进教学經驗，积极提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定編写一套有关初高中数学各科包括算术、代数、几何、三角的教学参考讀物，陆續出版，以便中学数学教师进一步研究和了解教材，从而更好地掌握教材的目的性.同时，这套小册子也可供初高中学生作为課外补充讀物.我們希望通过这套小册子的出版，能促进数学界同志对中学数学教材的研究，并促进教学經驗的交流.

“一元一次方程”这本小册子是根据“中学数学教学大綱”(修訂草案)中“一元一次方程”編写的. 首先一般性地叙述了方程的意义及其性質，在一元一次方程的解法基础上突出未知数在分母上的分式方程的解法，并注意它的增根情况.对于用布列方程去解应用題，主要叙述解应用題的步驟和从代数回到算术两点.最后还講到一元一次不等式，使一元一次方程的意义获得了推广.

本会在編写本册前，曾拟就編写計划，經編輯組討論确定編写提綱. 然后由黃公安、夏守岱两同志提供材料，由范际平同志执笔写成初稿. 再經程其襄、楊荣祥、黃公安、夏守岱諸同志校訂，最后由范际平同志作了修正. 虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正.

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会

1957年3月

目　录

有理式恒等变换学习完了以后，初中代数很自然地进入学习“方程”的阶段.固然在初中代数剛开始就談到一些关于“方程”的概念和它的应用，但进一步的学习“方程”問題是在初中三年級学完了“比例与比例关系”以后.我們曉得世界上第一部“代数学”的書名(古代阿拉伯阿尔藉立士米“Alchwarizmi”所著，約820年)是“还原与对消”(Algebre and Almukabalan). 所謂“还原”是“移負項于方程另一边变正”；所謂对消是“消去方程兩边相同的項”.例如方程$5x-2=6+3x$，先經“还原”变为$5x=6+2+3x$，再經“对消”变为$2x=6+2$.这都是解方程必須經过的步驟.由此可見“方程”在代数中是占首要的位置.如果仔細分析“方程”的內容，它是直接联系函数的知識，帮助学生了解量与量之間的相依性. 我們又可以用它来引进新数，例如，从方程$x+5=1$，我們导出負数-4.在解法过程中我們一定要用到恒等变換，而所求得的根明显地指出恒等变換的具体应用，所以“方程”和代数中其他三个主要內容：(1)数的概念的发展，(2)恒等变換，(3)函数，都具有极密切的关系.我們还可以看到用布列方程去解应用题比算术解法簡單的多，在文字方程中更可以反映出代数中的一般性和抽象性.所以在代数中，“方程”占着最重要的位置，这是沒有什么怀疑的.

一 方程的意义及其性質

讓我們先闡明等式的意义和它的性質：

兩个代数式之間用等号連接起来所組成的式子叫做等式；

等式被等号分为兩部分，即左边和右边.例如

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$$

$$3x-1=2, \qquad x^2+2=3x, \qquad x+y=8$$

等等都是等式.

如果我們用兩个不同文字表示等式的兩边，等式的性質可以綜合叙述如下:

1. **如** $a=b$，**則** $b=a$.

2. **如** $a=b$、$b=c$，**則** $a=c$.

3. **如** $a=b$、$m=n$，**則** $a+m=b+n$、$a-m=b-n$.

4. **如** $a=b$、$m=n$，**則** $am=bn$、$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$.（m、n **不能是零**）

吉西略夫"代数"是把等式区分为兩大类:恒等式与方程;也就是把恒等式与方程对立起来. 所以我們要想彻底了解方程的意义，首先要明了恒等式的意义:"**一个对于文字所允許取的任何值(此处限于有理数，下同)都是正确的等式，叫做恒等式.**"例如，不論对于任何的值 x，y，永远有$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$.

如$x=1$，$y=2$，左边$=(1+2)^2=3^2=9$，右边$=1+4+4=9$，

$$\therefore 左边=右边.$$

如 $x=-2$，$y=-3$，左边$=(-2-3)^2=(-5)^2=25$，

$$右边=4+12+9=25,$$

$$\therefore 左边=右边.$$

如 $x=2$，$y=-\frac{1}{3}$，左边$=\left(2-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$，

$$右边=4-\frac{4}{3}+\frac{1}{9}=\frac{36-12+1}{9}=\frac{25}{9}, \quad \therefore \quad 左边=右边,$$

所以是恒等式.

又如 $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$ 也是恒等式.

因为 x 可以取除2外的任何值使得等式成立.由于 $x=2$ 时，等式左边沒有意义，所以在定义中限定只能取文字所允許的值，也就是能够使得等式兩边都有意义的值.那就是說，在上面的等式中 $x=2$ 是不允許的.

恒等式的意义确定后，我們很容易体会到：**从恒等式的一边变换到另一边的变换叫做恒等变换.** 同时方程自然有了明确的意义："**只有用某种特殊的数值代入等式兩边某个文字或某些文字，这个等式才能成立的时候，这个等式叫做方程.**"例如

$$3x-1=2, \qquad x^2+2=3x, \qquad x+y=8$$

等等都是方程.

在含有文字的等式里，某一文字或某些文字被当做未知数，而其余文字(如果还有的話)被当做已知数，例如在方程

$$ax+by=c$$

里，x,y 被当做未知数而 a, b, c 被当做已知数. 含有一个未知数的方程，叫做一元方程，例如方程 $3x-1=2$，方程 $x^2+2=3x$ 都是，含有兩个未知数的方程叫做二元方程，例如方程 $x+y=8$ 即是，余类推.所謂**解方程，即求出适合于这方程的未知数的数值，这样的数值，叫做方程的根.**

我們要注意，对于 $x+y=8$，虽然使它相等的 x,y 值很多，但是 x,y 数值是有相互限制的.例如

$$\begin{cases}x=0\\y=8\end{cases} \quad \begin{cases}x=1\\y=7\end{cases} \quad \begin{cases}x=2\\y=6\end{cases} \quad \begin{cases}x=3\\y=5\end{cases} \quad \begin{cases}x=4\\y=4\end{cases} \quad \begin{cases}x=5\\y=3\end{cases} \quad \begin{cases}x=6 & \cdots\\y=2 & \cdots\end{cases}$$

那就是說，如 $x=0$，y 只能是 8，而不能是其他数值，所以

$$x+y=8$$

也是方程.

上面把方程看做一个特殊的和恒等式相对立的等式，这无疑是可以被初中学生所接受的. 但这个定义排斥了无穷个根的

方程和没有根的方程，在学习方程的系統知識上是不完备的．因而近来总是把方程看做是任意的等式，在它里面某个文字或某些文字被当做未知数而其余的文字（如果还有的話）被当做已知数．也就是說，**方程是含有文字的等式**．在这个定义下，恒等式被認为方程的特殊情况．也就是說，它是一个給未知数任意值都能满足的等式．例如$(x+2)^2=x^2+4x+4$，它是一个具有无穷个根的方程，又何必把它排斥在方程的外面，而特別叫它做恒等式呢？又如 $|x|=x$，我們曉得一切不負的数都适合，而不是一切值都适合．但按照我們的定义，仍然是方程．又如 $3x+2=3x+4$．很容易看到 x 的任何值都不能使 $3x+2$ 和 $3x+4$ 的值相等，但按照我們的定义，这仍然是方程，不过它沒有根罢了！

一般說来，方程 $ax=b$ 叫做一元一次方程，而解方程的过程通常是用一連串的一个比一个簡單的同值方程来代替它，以便最后得到一个或者若干个一元一次方程 $a_1x=b_1$，$a_2x=b_2$，……$a_nx=b_n$（高中代数將講到）．什么是同值方程呢？

如果两个方程有相同的根，即第一个方程的根都是第二个方程的根，而第二个方程的根又都是第一个方程的根，这样的两个方程叫做同值方程．例如 $x^2+2=3x$ 与 $(x-1)(x-2)=0$ 是同值方程，因为它們有相同的根1与2．$3x-1=2$与$x^2+2=3x$为不同值方程，因为第一个方程仅有一个根 1，而第二个方程除此根外，还有另一根 2．

我們如何把一个方程变換为較簡單的同值方程呢？这就要根据下面所述的方程的两个性質：

1．方程的第一个性質　取任一方程，例如：

$$x^2+2=3x, \tag{1}$$

如果在这方程的两边加某数 m，得出

$$x^2+2+m=3x+m. \tag{2}$$

將 $x=1$ 代入(1)的兩边都是 3，所以 $x=1$ 是 (1) 的根. 如果將 $x=1$ 代入(2)，由于等数加等数仍得等数，所以兩边的値仍相等；故 $x=1$ 也是(2)的根. 同理，如方程 (1)有另外的根时，也同样能够适合方程(2)；因此我們可以确認方程(1)所有的根，都是方程(2)的根.

將 $x=2$ 代入(2)的兩边，都是 $6+m$，所以 $x=2$ 是(2)的根. 如果將 $x=2$ 代入(1)，由于等数減等数仍得等数，所以兩边的値仍相等，故 $x=2$ 也是(1)的根. 同理，如方程(2)有另外的根，也同样能够适合方程(1). 因此我們可以确認方程(2)所有的根都是方程(1)的根.

因为方程(1)与方程(2)的根完全相同，所以这兩方程同値.

因此，**若方程兩边同时加或減某数（由于減去 m 等于加上 $-m$）时，所得的新方程与原方程同値.**

一般說来，方程

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{1}$$

$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是含有文字的代数式(其中一个可为已知数)，式中 x 要在 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 共同允許値的范圍内. 例如方程

$$3+\frac{2}{x-3}=\frac{3x-9}{x-5}, \quad f_1(x)=3+\frac{2}{x-3},$$

x 的允許値的范圍是除 3 外的任何値；

$$f_2(x)=\frac{3x-9}{x-5},$$

x 的允許値的范圍是除 5 外的任何値. 所以这个方程的根是在 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 共同允許値的范圍内，即除 3,5 外的任何値.

兩边同加 $f_3(x)$，得方程

$$f_1(x)+f_3(x)=f_2(x)+f_3(x). \tag{2}$$

如 $x=a$ 适合(1)，即 $f_1(a)=f_2(a)$，且如 $f_3(a)$ 有意义，按等式的

性質得 $f_1(a)+f_3(a)=f_2(a)+f_3(a)$，表明$x=a$也适合(2). 即凡适合(1)且使 $f_3(a)$有意义的值必适合(2). 反过来說，如 $x=b$ 适合(2)，即 $f_1(b)+f_3(b)=f_2(b)+f_3(b)$，按等式的性質得

$$f_1(b)+f_3(b)-f_3(b)=f_2(b)+f_3(b)-f_3(b),$$

$$\therefore \quad f_1(b)=f_2(b),$$

表明 $x=b$ 也适合(1). 即凡适合(2)且使 $f_3(x)$ 有意义的值必适合(1)，所以这兩方程同值.

又因为減去 $f_3(x)$ 等于加上$-f_3(x)$，所以方程兩边同減去 $f_3(x)$也得到与原方程同值的方程.

我們必須注意特殊情况. 例如方程

$$2x-3+\frac{1}{x-5}=x+2+\frac{1}{x-5}. \tag{1}$$

兩边同減$\frac{1}{x-5}$，得方程

$$2x-3+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-5}=x+2+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-5},$$

即方程　$2x-3=x+2$.　　(2)

很明显地，对于方程(1)，$x=5$ 是不允許的. 但將 $x=5$ 代入(2)，左边$=10-3=7$，右边$=5+2=7$，表示 $x=5$ 适合(2)而不适合(1)，所以它們不同值. 那就是說，由方程(1)变换为方程(2)增加了根 $x=5$.

又如方程　$x-3=5$,　　(1)

具有一个根 $x=8$. 兩边同加$\frac{1}{x-8}$，得方程

$$x-3+\frac{1}{x-8}=5+\frac{1}{x-8}. \tag{2}$$

由于$x=8$，方程(2)沒有意义，所以(1)，(2)不同值. 那就是說，由

方程(1)变到方程(2)的时候，失掉了根 $x=8$.

因此，如果一个方程的兩边加上或减去同一个代数式而不改变 x 的允許值的范圍，那末可得到一个与原方程同値的方程．如方程的兩边加上或减去同一个在分母中含有未知数的式子，可能失掉或者增加根．所失掉或者增加的根只能是使这个式子的分母等于零的未知数的値．

由此性質可得以下兩个重要推論：

(1) **方程的各項可以在改变符号以后，由方程的一边移向另一边．**

例如方程 $5x-2=6+3x$，我們可將 -2 移到右边（即兩边同加2），得 $5x=6+2+3x$.

（此即“还原”的根据）

(2) **方程的兩边有相同的項时，可以相消．**

例如方程 $x^2+6x+3=x^2-9$，我們可將兩边都消去 x^2，得 $6x+3=-9$.

（此即“对消”的根据）

2．方程的第二种性質 仍取前面的方程

$$x^2+2=3x. \tag{1}$$

如果在这方程的兩边乘以不等于零的某数 m，得出方程

$$(x^2+2)m=3xm. \tag{2}$$

我們已知 $x=1$ 为(1)的根，如將 $x=1$ 代入(2)，由于等数乘以等数仍得等数，所以兩边的値仍相等，故 $x=1$ 也是(2)的根．同理，如果方程(1)有另外的根时，也同样能够适合方程(2)，因此我們可以确認方程(1)所有的根都是方程(2)的根．

如將 $x=2$ 代入(2)的兩边，都是 $6m$，所以 $x=2$ 是(2)的根．如果將 $x=2$ 代入(1)，由于用不等于零的同一数除等数仍得等数，所以兩边的値仍相等，故 $x=2$ 也是(1)的根．同理，如方程

(2)有另外的根时，也同样能够适合方程(1)，因此我們可以确認方程(2)所有的根都是方程(1)的根．因为方程(1)与方程(2)的根相同，所以这兩方程同值．

又如用零同乘方程(1)的兩边，得

$$(x^2+2)0=3x\times 0. \qquad (2)$$

这时适合(2)的 x 值不仅是 1 与 2，而是任何的数值，所以(1)，(2)不同值．那就是說，如果乘数是零，就破坏了方程的同值性．因此**如方程的兩边同时乘以或除以不等于零的某数时，所得的新方程才与原方程同值．**

由此性質也可得以下兩个重要推論：

(1) **方程的兩边如有公約数，可以約去．**

例如方程 $60x-160=340-40x$,

即 $20(3x-8)=20(17-2x)$,

兩边同除以 20，得 $3x-8=17-2x$.

(2) **方程可以去掉分母內不含有未知数的各分数的分母．**

例如方程 $$\frac{7x-3}{6}-\frac{x-5}{4}=\frac{43}{6},$$

兩边同乘以最小公分母(諸分母的最小公倍数)12，得

$$2(7x-3)-3(x-5)=86.$$

又如方程 $$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}, \qquad (1)$$

兩边同乘以最低公分母(諸分母的最低公倍式)$(x-2)^2$，得

$$x^2+2=x-2+2x+2.$$

即 $$x^2+2=3x. \qquad (2)$$

前面已經說过(2)有 1 与 2 兩个根．

將 $x=1$ 代入(1)的兩边，

$$左边=\frac{1^2}{(1-2)^2}+\frac{2}{(1-2)^2}=1+2=3,$$

$$右边=\frac{1}{1-2}+\frac{2+2}{(1-2)^2}=-1+4=3;$$

兩边相等.

將 $x=2$ 代入(1)的兩边，左边$=\frac{4}{0}+\frac{2}{0}$，右边$=\frac{1}{0}+\frac{6}{0}$，方程失掉了意义.

那就是說，$x=1$ 适合方程(1)；$x=2$ 虽然是方程(2)的根，但却不是原方程(1)的根. 这是因为当 $x=2$时，$(x-2)^2=0$，即兩边所乘的多項式的值为零，所以破坏了方程的同値性. 那就是說，由方程(1)变换为方程(2)增加了一个根 $x=2$.

相反地，如方程的兩边同除以含有未知数的某多項式，例如

方程　$(3x-1)(x-2)=2(x-2)$，　　(1)

兩边同除以 $x-2$，得　$3x-1=2$.　　(2)

因 $x=1$ 是(2)的根而(1)的根是 1 与 2，所以原方程失去了 $x=2$ 这个根. 这是由于 $x=2$ 时，$x-2=0$，即兩边所除的多項式的值是零，除法不可能实施，因而破坏了方程的同値性. 就是說，由方程(1)变换为方程(2)失掉了根 $x=2$.

因得方程的兩边乘以含有未知数的多項式，可能增加根，所增加的根只能是使这个多項式等于零的未知数的值. 相反地，方程的兩边除以含有未知数的多項式，可能失掉根，所失掉的根只能是使这个多項式等于零的未知数的值.

要注意一种很特殊的情况：

方程　$x-1=0$，　　(1)

兩边同乘以 $x-1$，得方程　$(x-1)^2=0$.　　(2)

由于(1)，(2)的根都是 1，所以如果不計算重根，它們是同値. 但

如計算重根，它們不同值，而这种变換增加了一个根 $x=1$.

二　一元一次方程

我們如果完全掌握了方程的兩个性質及其重要推論并配合有理式的恒等变换，一元一次方程的解法，当可迎刃而解．玆举例釋其解法如下：

例一　解方程　$(x+1)^2=x[6-(1-x)]-2$.

【解】　去括号　$x^2+2x+1=x(5+x)-2$,

$$x^2+2x+1=5x+x^2-2,$$

消去 x^2,　$2x+1=5x-2$,

移項,　$2x-5x=-2-1$,

合并,　$-3x=-3$,

去系数,　$x=1$.

將 $x=1$ 代入原方程的兩边，左边 $=(1+1)^2=2^2=4$，右边 $=1\times[6-(1-1)]-2=6-2=4$，左边 $=$ 右边，所以 $x=1$ 是原方程的根．

方程的根求得后，应当把这个根代入原方程的兩边来驗算．如果所得的值相等，那就說明所求的根是正确的，并且可以反映出我們解法中的运算并沒有发生錯誤．当然也有时解法中的运算发生了錯誤而結果却碰巧是正确的，但这只是极个別的情况．如果所得的值不相等，那末一定在解法中的运算有錯誤．学生初学解方程时难免犯运算上的錯誤，所以驗算的手續是必要的，而且这样也可以培养学生对工作負責的习慣．

例二　解方程　$0.5x-0.3x=0.25x-1$.

【解】　本例各項系数都是有限小数，可以不必化为分数．

合并,　$0.2x=0.25x-1$,

移項，　　　　$0.2x-0.25x=-1,$

合并，　　　　$-0.05x=-1,$

去系数，　　　　$x=20.$

驗算　將$x=20$代入原方程兩边，左边$=0.5\times20-0.3\times20=10-6=4$，右边$=0.25\times20-1=5-1=4$，兩边相等，所以$x=20$是原方程的根.

例三　解方程　$\frac{x}{4}-0.1\dot{6}x=0.75+0.\dot{1}x-\frac{7}{18}.$

【解】　本例各項系数有为循环小数的，宜將小数化为分数再行运算.因

$$0.1\dot{6}=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6},$$

$$0.75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4},\quad 0.\dot{1}=\frac{1}{9}.$$

故得

$$\frac{x}{4}-\frac{x}{6}=\frac{3}{4}+\frac{x}{9}-\frac{7}{18}.$$

去分母(兩边同乘以最小公分母36)，$9x-6x=27+4x-14,$

合并，　　　　$3x=4x+13,$

移項，　　　　$3x-4x=13,$

合并再兩边同乘以-1，　　　　$x=-13.$

驗算　將$x=-13$代入原方程的兩边，

$$左边=\frac{-13}{4}-\frac{-13}{6}=-13\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=-13\times\frac{3-2}{12}=-\frac{13}{12},$$

$$右边=\frac{3}{4}-\frac{13}{9}-\frac{7}{18}=\frac{27-52-14}{36}=\frac{-39}{36}=-\frac{13}{12},$$

兩边相等，所以$x=-13$是原方程的根.

例四　解方程　$\frac{8-x}{6}-\frac{5-4x}{3}=\frac{x+6}{2}.$

【解】 去分母(两边同乘以最小公分母 6),

$$8-x-2(5-4x)=3(x+6),$$

去括号, $$8-x-10+8x=3x+18,$$

合并, $$7x-2=3x+18,$$

移項, $$7x-3x=18+2,$$

合并, $$4x=20,$$

去系数, $$x=5.$$

驗算 將 $x=5$ 代入原方程的兩边,

$$左边=\frac{8-5}{6}-\frac{5-20}{3}=\frac{3}{6}+\frac{15}{3}=\frac{1}{2}+5=5\frac{1}{2},$$

$$右边=\frac{5+6}{2}=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2},$$

兩边相等,所以 $x=5$ 是原方程的根.

我們务必要使得学生清楚地認識方程的恒等变换与变换成与它同值的方程兩者之間的差別: 前者是方程每一边变换成与它恒等的式子, 而后者則是整个方程变换成另一个与它同值的方程,但每一边已經不是与原来的每一边恒等了.我們应該对学生常犯的錯誤給以密切的注意.例如在去分母时,有些学生往往在左边乘以諸分母的最低公倍式而忘了在右边也乘以諸分母的最低公倍式,这样就造成了錯誤.如例四,去分母得

$$8-x-2(5-4x)=\frac{x+6}{2},$$

就造成了錯誤.

由上面四例我們获得一元一次方程解法步驟如下:

1. 如有分母,兩边同乘以諸分母的最小公倍数,化为整数,这一步驟是化为同值方程.

2. 如有括号,应展开它,遇同类項即需合并,这一步驟是变

换成与它恒等的式子．

3．將含未知数的各項移到左边，已知各項移到右边，这一步驟是化为同値方程．

4．再合并同类項化为 $ax=b$ 的形式，这一步驟是变换成与它恒等的式子．

5．用未知数的系数除方程的兩边，这一步驟是化为与它同值的方程．

6．將所求得的根代入原方程驗算有无錯誤．

我們还要注意方程有无穷个根和无根的情况．

例五 解方程

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-2)+1\right]+3=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{6}(5x-1)+6\right]+2.$$

【解】 兩边同乘以最小公分母 30，

$$5(x-2)+15+90=(5x-1)+36+60,$$

合并，　　$5(x-2)+105=(5x-1)+96,$

去括号，　　$5x-10+105=5x-1+96,$

合并，　　$5x+95=5x+95,$

移項，　　$5x-5x=95-95,$

合并，　　$0\cdot x=0.$

这就表明不論 x 的值是多少，方程 $0\cdot x=0$ 总是正确，所以原方程有无穷个根，那就是說是一个恒等式．

例六 解方程 $3(2x+1)-2=6x-1.$

【解】 去括号，　　$6x+3-2=6x-1,$

合并，　　$6x+1=6x-1,$

移項，　　$6x-6x=-1-1,$

合并，　　$0\cdot x=-2.$

由于不論 x 的值是多少，$0\cdot x=-2$ 总是不正确，所以原方