全国成人高考专升本

高等数学（一）考试辅导

居余马　林翠琴　编

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

全国成人高考专升本

高等数学（一）考试辅导

居余马　林翠琴　编

清华大学出版社

（京）新登字 158 号

书　名：全国成人高考专升本高等数学(一)考试辅导
作　者：居余马　林翠琴　编
出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京顺义振华印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：850×1168 1/32　印张：11.75　字数：293 千字
版　次：2001 年 3 月第 1 版　2001 年 3 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-04297-7/O・254
印　数：0001～5000
定　价：17.00 元

前　言

本书是根据教育部新制订的全国成人高考专科起点升本科《高等数学(一)》(适用于理学、工学、医学(除中医学类外)的考试复习大纲编写的。我们曾于 2000 年初在清华大学远程教育部举办的专升本考试辅导中，向清华在全国各地的网站播讲过《高等数学(二)》的考试辅导，本书是在该讲稿的基础上按《高等数学(一)》的考试要求修改而成的。

我们编写本书的指导思想是“以不变应万变”，因为尽管每年的考题是千变万化的，但万变不离其宗，而其“宗”是不变的，它就是课程的基本概念、基本理论和基本方法。因此，我们着力于系统而简要地阐明课程的基本概念、基本理论和基本方法，使读者对高等数学所研究的基本问题以及分析问题、解决问题的基本方法有清晰的了解，同时又分类列举了各种典型的例题，通过对例题的分析和求解，进一步加深读者对课程的基本概念、基本理论和基本方法的理解，起到举一反三的作用。这样，读者面对各种考题都会心中有数，无所畏惧。所以，这本考试辅导教材的特色是，既有教材的功能，又有辅导的效用。

本书共列举了大大小小的例题约 440 个(其中个别带 * 号的题较难，应该不是考试要求的题)，此外还选编了自我检查题(练习题)300 个。读者做自我检查题要自己独立完成后，再对照提供的题解，才能有效地发现自己存在的问题。如果经过思考还不能求解，再去看解答才会知道解题的关键在何处，如此就会有较好的收益。此外，还选编了 120 个考试模拟题(一般考题为：选择题 10 个，填空题 5 个，计算证明题 10～15 个)，供读者检查学习效果(这里

只有答案，没有题解)，如果完成较好，考试将会成功。

在附录中，我们汇集了2000年成人高等学校专升本招生全国统一考试高等数学(一)试卷及答案；成人高等学校专升本招生全国统一考试复习大纲(2001年)中高等数学(一)标准样卷。应考的考生可从这两份考题中清楚地了解到考试的基本要求，读者按本书作了全面复习，掌握了其中的基本内容，可以充满信心地去应考。

由于编写的时间仓促，不妥和错误在所难免，欢迎读者和关心本书的老师们指正。

编者于清华园2000年9月

目　　录

第1章　函数　极限　连续

微积分是研究函数变化性质的一门学科，它的两类基本问题是微分和积分. 在微积分中，研究问题的基本方法是极限方法和局部线性化方法（即函数在一点附近，以不变代变，以直代曲，以线性函数近似非线性函数）；主要是研究连续函数的变化性质. 因此，微积分教材一般都是先讲函数、极限和连续的概念、性质和计算；然后讲一元函数微分学和一元函数积分学；进而讲多元函数微积分.

1.1　函数

先介绍常用的量词$\forall$，$\exists$. “$\forall$”称为全称量词，它表示“任意的”或“任一个”. 例如，“$\forall x$”表示“对于任意的 x”或“任一个 x”. “$\exists$”称为存在量词，表示“存在”或“有一个”. 例如，“$\exists x$”表示“存在 x”或“有一个 x”.

1.1.1　函数概念

定义1　设有两个变量 x 和 y，如果$\forall x\in D$（实数集 $\mathbf{R}$ 的一子集），y 都按一定的规则有一个确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$或 $y=y(x)$，其中：x 称为自变量，y 称为因变量或函数，D 称为函数的定义域，函数值的集合称为函数的值域，记作 W，即

$$W = \{f(x) \mid \forall x \in D\}$$

1　确定函数的两个要素：(1) 定义域，(2) 对应规则.

(1) 关于定义域

实际问题中的函数，其定义域由实际意义确定. 例如，圆面积

$S=\pi r^2$,定义域为 $r>0$.

由式子表示的函数 $y=f(x)$,如不考虑实际意义,其定义域是使 $f(x)$有意义的 x 的集合. 微积分是讨论实变量的实值函数,所以 $f(x)$有意义是指 $f(x)$应为实数.

例 1 求 $y=f(x)=\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2}}$的定义域.

解 为使 $f(x)$有意义,要求

$$x \neq 2,\ \frac{(x+1)(x-1)}{x-2} \geqslant 0$$

即 $\begin{cases}(x+1)(x-1)\leqslant 0\\ x-2<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(x+1)(x-1)\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$

可用下面的表格法,解此不等式组. 下列表格中的"+","−"分别表示左端因式">0","<0". 例如,在$(-\infty,-1)$上 $x+1<0$,在$(-1,1)$上,$x+1>0$.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x+1$	−	+	+	+	
$x-1$	−	−	+	+	
$x-2$	−	−	−	+	
$\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2}$	−	+	−	无意义 +	

所以定义域为$-1\leqslant x\leqslant 1$ 或 $2<x<+\infty$,即

$$[-1,1]\cup(2,+\infty)$$

例 2 求 $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$的定义域.

解 为使$\sqrt{x-\sqrt{x}}$有意义(即为实数),要求 $x\geqslant 0$ 且 $x-\sqrt{x}\geqslant 0$,即 $x\geqslant\sqrt{x}$,从而得

$$x^2-x=x(x-1)\geqslant 0$$

因为 $x\geqslant 0$,所以 $x-1\geqslant 0$,即 $x\geqslant 1$,故定义域为$[1,+\infty)$.

例 3 求 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\log_{10}(x-1)}}$的定义域.

解 这里要求对数的真数 $x-1>0$,所以 $x>1$.另外要求分母 $1+\log_{10}(x-1)\neq 0$(因为负数开三次方也有意义),即 $\log_{10}(x-1)\neq -1$,由此得

$$x-1\neq\frac{1}{10}=0.1,\ \text{即}\ x\neq 1.1$$

故定义域为$(1,1.1)\cup(1.1,+\infty)$.

(2) 关于对应规则"f"

函数 $y=f(x)=x^2+\sin x$ 的对应规则 f 为:把自变量 x 平方再加上 x 取正弦的值,于是就有

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\sin\frac{1}{x}$$

上式的意义就是将$\dfrac{1}{x}$代替 $f(x)=x^2+\sin x$ 中的 x.同理有

$$\begin{aligned}f(f(x))&=(f(x))^2+\sin f(x)\\&=(x^2+\sin x)^2+\sin(x^2+\sin x)\end{aligned}$$

例 4 已知 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{1+x}{2+x}$,求 $f(x)$.

解 令$\dfrac{1}{1+x}=t$,即 $1=(1+x)t$,得 $x=\dfrac{1-t}{t}$,所以

$$f(t)=\frac{1+\frac{1-t}{t}}{2+\frac{1-t}{t}}=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1+t}{t}}=\frac{1}{1+t}$$

函数的实质是因变量与自变量之间的对应规则 f,与自变量用什么记号无关,将自变量 t 的记号换为 x,即得 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

例 5 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x^2+1}$,求 $f(x)$.

解 令 $x+\frac{1}{x}=t$,即 $x^2+1=xt$,所以 $f(t)=\frac{x}{xt}=\frac{1}{t}$.

另法 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$,所以 $f(x)=\frac{1}{x}$.

2 函数的三种表示方法:式子,图形,表格.

式子表示,如 $S=\pi r^2$,$y=x+\sin x$.

例 6 如图 1-1,在半径为 R 的球面内,内接一个高为 h 的圆柱体,求圆柱体体积 V 与 h 的函数关系.

解 由圆柱体体积公式得 $V=\pi r^2 h$,其中 $r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=R^2$,所以 $V=f(h)=\pi\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)h$.

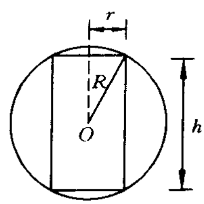

图 1-1

例 7 如图 1-2,长为 2 米的弦(皮筋)OA 置于 x 轴正向.将其中点 B 垂直提升 1 米,求弦上各点 y 坐标与 x 的关系.

解 OB 线段的方程为 $y=x$.

AB 线段的斜率为-1,方程为

$$y-0=-1(x-2)$$

即 $y=2-x$.所以弦 OBA 上各点 y 坐标与 x 坐标的函数关系应分段表示为

$$y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

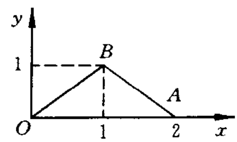

图 1-2

1.1.2 函数的简单性质

1 有界性

定义 2 $y=f(x)$在区间 I 上称为有界,如果$\exists M>0$,使$\forall x\in I$,均有$|f(x)|\leqslant M$,即 $f(x)$在 I 上的值域 $W\subset[-M,M]$.

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，因为函数的值域为 $(0,1]\subset[-1,1]$；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界，因为 x 无限趋近于 0 时，$\dfrac{1}{x}$ 的值将无限地变大，不论多大的数 M，都不能使 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上的函数值都小于等于 M.

2 单调性

定义 3 如果 $\forall x_1,x_2\in I, x_1<x_2$ 均有

(1) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 I 上单调增加（递增）；$f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增；

(2) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 I 上单调减少（递减）；$f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 I 上严格单调递减.

3 奇偶性

定义 4 设 $y=f(x)$ 的定义域 $D=[-a,a]$. 若 $\forall x\in D, f(-x)=f(x)$，则称 f 为偶函数；$\forall x\in D, f(-x)=-f(x)$，则称 f 为奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴，如图 1-3. 奇函数的图形对称于原点，且 $f(0)=0$，如图 1-4，1-5. 因为 $f(-0)=-f(0)\Rightarrow 2f(0)=0$，所以 $f(0)=0$.

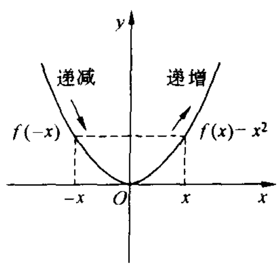

图 1-3

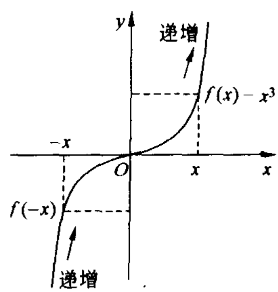

图 1-4

例如，$\sin x$，$\tan x$，$\arcsin x$，$\arctan x$，x^n（n 为奇数）均为奇函数；而 $\cos x$，x^n（n 为偶数）均为偶函数.

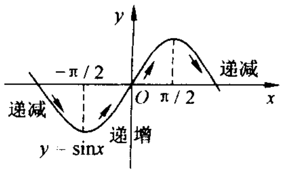

图 1-5

注意：在早一点的书中 $\tan x$ 记为 $\mathrm{tg}x$，$\cot x$ 记为 $\mathrm{ctg}x$.

例 1 验证 $F(x)=x\sin^2 x$ 为奇函数.

解 因为 $F(-x)=(-x)\sin^2(-x)=-x\sin^2 x=-F(x)$，所以 $F(x)$ 为奇函数.

例 2 验证 $G(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$ 为偶函数.

解 因为 $G(-x)=\sqrt[3]{-x}\sin(-x)=(-\sqrt[3]{x})(-\sin x)=G(x)$，所以 $G(x)$ 为偶函数.

一般地，奇函数×偶函数为奇函数；奇函数×奇函数为偶函数；偶函数×偶函数为偶函数.

例 3 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-a,a]$，则 $F(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$G(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

证 因为 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$，所以 $F(x)$ 为偶函数.

又由 $G(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-G(x)$ 得 $G(x)$ 为奇函数.

例如，$G(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 是奇函数，因为 $G(-x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-G(x)$.

由例 3 易得：定义域为 $(-a,a)$ 的任何函数 $f(x)$ 均可表示为奇函数与偶函数之和. 因为

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

其中 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 分别为奇函数和偶函数.

例 4 判断 $y(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 判断函数 $y(x)$ 是否具有奇偶性，根据定义就要判断 $y(-x)$ 与 $y(x)$ 是否异号或相等. 因为

$$y(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$$
$$=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-y(x)$$

所以 $y(x)$ 为奇函数.

例 5 判断 $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ 的奇偶性.

解 $f(-x)=\dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}}=\dfrac{e^{x}(e^{-x}-1)}{e^{x}(e^{-x}+1)}$

$$=-\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

4 周期性

定义 5 函数 $y=f(x)$，若 $\exists T>0$，且 $\forall x$ 有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，最小的 T 为周期.

此时 $f(x)=f(x+T)=f(x+T+T)$

$$=\cdots=f(x+kT),\quad k\in\mathbf{N}$$

例 6 利用 $y=\sin x$ 的周期 $T=2\pi$，证明 $f(x)=\sin 3x$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

证明 因为 $f(x)=\sin 3x=\sin(3x+2\pi)$

$$=\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

故得 $\sin 3x$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$.

一般地，$y=\sin(\omega t+\alpha)$（其中 ω,α 为常数）的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$（其中常数 α 不影响正弦函数的周期）.

例 7 $i=I_m|\sin\omega t|$，$(I_m>0)$，问周期 $T=?$

解 $i=I_m|\sin\omega t|$ 是交流电 $i=I_m\sin\omega t$ 的全波整流，它的图形如图 1-6 所示. 由图可见 $T=\dfrac{\pi}{\omega}$.

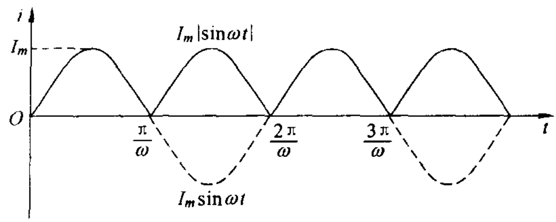

图 1-6

例 8 $y=\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的周期 $T=?$

解 由三角恒等式得

$$y=\frac{1-\cos2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

所以
$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

1.1.3 函数的运算

1 四则运算：设 $f(x)$，$g(x)$ 定义在 D 上，则在 D 上可定义

$$f(x)\pm g(x);\ f(x)g(x);\ f(x)/g(x)(g(x)\neq0)$$

两个函数作四则运算所得的新函数，其函数值是两个函数在相应点的函数值作四则运算.

2 复合运算——复合函数

质点 P 以匀角速度 ω 绕原点按逆时针方向作圆周运动. 起点

为 $P(0)$，如图 1-7，于是 t 时刻点 P 的纵坐标为

$$y(t)=R\sin\alpha,\ \alpha=\omega t$$

所以 $$y(t)=R\sin\omega t$$

此时，$y(t)$ 是由 $y=R\sin\alpha$ 与 $\alpha=\omega t$ 复合而成.

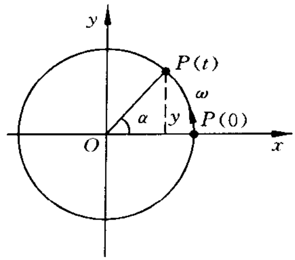

图 1-7

定义 6 设 $y=f(u)$，定义域为 D_u，$u=\varphi(x)$，定义域为 D_x，值域为 W_u，当 $W_u\subset D_u$ 时，y 是 x 的复合函数，即 $y=f(\varphi(x))$，定义域为 D_x. 它是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数. 通常称 u 为中间变量.

例 1 $y=\sqrt{1+\sin x}$ 是由 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=1+\sin x$ 复合而成.

例 2 $y=\sin^2(2x+3)$ 是由 $y=f(u)=u^2$，$u=\sin v$，$v=2x+3$ 复合而成.

注意：一般地 $f(\varphi(x))\neq\varphi(f(x))$. 如例 1，$f(\varphi(x))=\sqrt{1+\sin x}$，而 $\varphi(f(x))=\varphi(\sqrt{x})=1+\sin\sqrt{x}$.

3 反函数(逆运算)

$$y=x^3\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}$$

称 $y=\sqrt[3]{x}$ 为 $y=x^3$ 的反函数，同样

$$y=\sin x\Leftrightarrow x=\arcsin y$$

称 $y=\arcsin x$ 为 $y=\sin x$ 的反函数.

定义 7 若 $y=f(x)\Leftrightarrow x=\varphi(y)$，则 $y=\varphi(x)$ 记作 $y=f^{-1}(x)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数.

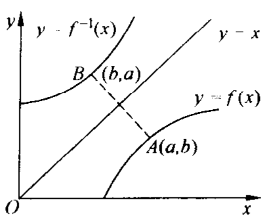

图 1-8

函数与其反函数的图形对称于直线 $y=x$，见图 1-8. 因为由 $b=f(a)$