黑博士"临考点题猜题"命题浓缩精华系列

2004年硕士研究生入学考试

数学 12月 最后冲刺密押

（五套卷）

组编 黑博士考研信息工作室
编著 陈跃祥 周华强 王东明
（北京大学著名命题预测专家）
蔡昌林 林祥源 魏柏芳
（清华大学著名命题研究专家）

连续多年国内同类最畅销书

本书是全国惟一的密押卷品牌系列书

数学三

世界图书出版公司

黑博士“临考点题猜题”详解与命题研究系列

2004年硕士研究生入学考试

数学最后冲刺密押5套 B卷（12月）

——新典型100题·数学三

（经济类·经典版）

组　编　黑博士考研信息工作室

主　编　铁　军　李　强（著名命题研究专家）

编　著　北京大学著名数学教授　周华强

清华大学著名数学教授　林祥源

北京大学著名数学教授　陈跃祥

清华大学著名数学教授　蔡昌林

北京理工大学数学博士　魏柏芳

上海交通大学数学博士　王东明

策划人　汪　澜

世界图书出版公司

西安·北京·广州·上海

图书在版编目（CIP）数据

硕士研究生入学考试试题详解与命题研究 / 陈志良 主编

- 西安：世界图书出版西安公司，2003.10

ISBN 7 - 5062 - 6141 - 3

Ⅰ. 硕… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 098353 号

黑博士"临考点题猜题"详解与命题研究系列

数学最后冲刺密押 5 套卷 B（数学三）

——新典型 100 题

铁 军　李 强　　主　编

焦 毓 本　　责任编辑

黑博士工作室　　总 策 划

世界图书出版西安公司 出版发行

（西安市南大街 17 号　邮编：710001 电话：7279676）

旗舰印务有限公司印刷

各地新华书店经销

开本：787×1092（毫米）1/16　印张：58　字数：1160 千字

2003 年 11 月第 1 版　2003 年 11 月第 1 次印刷

ISBN　7-5062-6141-3/H · 507

Wx 6141　全套十二册定价：120.00 元

目　录

经济类　数学三

紧急预订公告：黑博士临考最后冲刺·预测精华浓缩系列（5 套）试卷

黑博士临考点题：2004 **年数学** 12 **月最后冲刺** 5 **套题·最新预测密卷** B1 ……………………（1）
黑博士临考点题：2004 **年数学** 12 **月最后冲刺** 5 **套题·最新预测密卷** B1 **参考答案**………（6）

黑博士临考点题：2004 **年数学** 12 **月最后冲刺** 5 **套题·最新预测密卷** B2 ……………………（15）
黑博士临考点题：2004 **年数学** 12 **月最后冲刺** 5 **套题·最新预测密卷** B2 **参考答案**………（20）

黑博士临考点题：2004 **年数学** 12 **月最后冲刺** 5 **套题·最新预测密卷** B3 ……………………（26）
黑博士临考点题：2004 **年数学** 12 **月最后冲刺** 5 **套题·最新预测密卷** B3 **参考答案**………（31）

黑博士临考点题：2004 **年数学** 12 **月最后冲刺** 5 **套题·最新预测密卷** B4 ……………………（37）
黑博士临考点题：2004 **年数学** 12 **月最后冲刺** 5 **套题·最新预测密卷** B4 **参考答案**………（42）

黑博士临考点题：2004 **年数学** 12 **月最后冲刺** 5 **套题·最新预测密卷** B5 ……………………（48）
黑博士临考点题：2004 **年数学** 12 **月最后冲刺** 5 **套题·最新预测密卷** B5 **参考答案**………（53）

2004 北京六大权威考研班命题预测典型 100 题精选（12 月新版）……………………（62）
特别说明……………………………………………………（70）
北京考研班畅销精品排行榜……………………………………（71）
黑博士考研精品系列 20 经典……………………………………（72）

特别注意：特别推荐黑博士红皮《政治高分复习指导》、红皮《政治高分典型题库精编 **1800** 题》、《北京政治强化班冲刺大串讲红皮书》、红皮《政治冲刺命题预测 **800** 题》、绿皮《政治最后 **30** 天冲刺命题预测卷》、《黑博士背诵版 **A**、**B**、**C**》及黑博士《临考点题猜题：数学、英语、政治 **11/12** 月 **5** 套密押试卷》。

● 点题猜题 核心讲稿 ●

2004 年全国硕士研究生入学考试
经济类·数学 12 月最后冲刺浓缩密押 5 套试卷

黑博士数学三试卷(一)

——北京大学数学强化班命题预测信息及精华浓缩

黑博士考研信息工作室
2003 年 12 月于北京

高分经验警示：在当前激烈的考研竞争中，对于数学基础较好或具有中高级以上水平的同学而言，做一定数量的典型题是成功的关条，也就是说："数学要想考高分，除过做典型题之外，再没有其它的秘诀或捷径！"

提醒特别注意：此部分题目具有一定的代表性、典型性、预测性、综合性，特别推荐！在 2003 年考研中，本书中 48 道题相似或命中考题中非客观题（大题）32 道（次），其中数学一，10 题 136 分；数学二，9 题 124 分；数学三，11 题 142 分；数学四，9 题 120 分。

黑博士锦囊妙计：命题试卷中带 ※ 者为二级重点预测典型题，带 ※※ 者为一级重点预测典型题。此部分题目具有一定代表性、典型性、预测性、综合性，特别推荐！

得分	评卷人

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中的横线上.）

(1) 曲线 $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$ 的渐近线方程为________.

(2) 设 $f(u)$ 是任意的二阶可导函数，并设 $z = f(x + ay)$ 满足 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$，则常数 $a =$ ________.

※(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \left[t e^t \int_t^0 f(\theta) \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}t}{x^4 e^x} =$ ________，其中 $f'(x)$ 连续，$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1} =$ ________. 用 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 表示.

(5) 设随机变量 X 服从参数为 $(2, p)$ 的二项分布，随机变量 Y 服从参数为 $(3, p)$ 的二项分布. 若 $P\{X \geqslant 1\} = \dfrac{5}{9}$，则 $P\{Y \geqslant 1\} =$ ________.

(6) 从数字 $0, 1, 2, \cdots, n$ 中任取两个不同的数字，则这两个数字之差的绝对值的数学期望为________.

得分	评卷人

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

※(7) 设$g(x)$在$x=0$二阶可导,且$g(0)=g'(0)=0$.并设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$则$f(x)$在$x=0$处(　　)

(A) 不连续.　　(B) 连续,但不可导.

(C) 可导,导函数不连续.　　(D) 可导,导函数连续.

※(8) 设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在$x=a$处(　　)

(A)$f(x)$在$x=a$点存在且$f'(a)\neq 0$.　　(B)$f(x)$在$x=a$点导数不存在.

(C)$f(a)$取得极大值.　　(D)$f(a)$取得极小值.

(9) 设$f(x)=e^{-x}$,则$\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}dx=$(　　)

(A) $-\dfrac{1}{x}+C$.　　(B) $-\ln x+C$.

(C) $\dfrac{1}{x}+C$.　　(D)$\ln x+C$.

(10) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛,则此级数在$x=2$处(　　).

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 发散　　(D) 收敛性不能确定

(11) 设$f(x,y)$连续,且

$$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\,du\,dv$$

其中D是由$y=0,y=x^2,x=1$所围区域,则$f(x,y)$等于(　　).

(A)xy　　(B)$2xy$　　(C)$xy+\dfrac{1}{8}$　　(D)$xy+1$

(12) 已知$\boldsymbol{X}_0$是可逆矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ_0的特征向量,那么下列矩阵

①$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$　②$\boldsymbol{A}^2$　③$\boldsymbol{A}^T$　④$3\boldsymbol{A}^{-1}$

中,$\boldsymbol{X}_0$不是其特征向量的矩阵共有(　　)

(A)1个　　(B)2个　　(C)3个　　(D)4个

※(13) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$均是可逆阵,则$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$(　　).

(A)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　(B)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

(C)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$　　(D)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$

(14) 设两个相互独立的随机变量X和Y分别服从正态分布$N(0,1)$和$N(1,1)$,则(　　)

(A)$P\{X+Y\leq 0\}=\dfrac{1}{2}$　　(B)$P\{X+Y\leq 1\}=\dfrac{1}{2}$

(C)$P\{X+Y\geq 0\}=\dfrac{1}{2}$　　(D)$P\{X-Y\leq 1\}=\dfrac{1}{2}$

三、解答题(本题共9小题,满分94分.解答应写文字说明、证明过程或演算步骤.)

得分	评卷人

(15) (本题满分9分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导函数,且 $g(0)=1$.

(1) 确定 a 的值,使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续;

(2) 求 $f(x)$;

(3) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

得分	评卷人

(16) (本题满分8分)

设平均收益函数和总成本函数分别为

$$AR=a-bQ,\quad C=\frac{1}{3}Q^3-7Q^2+100Q+50,$$

其中常数 $a>0,b>0$ 待定.已知当边际收益 $MR=67$,且需求价格弹性 $E_P=-\dfrac{89}{22}$ 时,总利润最大.求总利润最大时的产量,并确定 a,b 的值.

得分	评卷人

(17) (本题满分8分)

设 D 由 $y=x^3,y=1,x=-1$ 所围成的区域,$f(u)$ 为连续函数,计算

$$I=\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

得分	评卷人

※(18) (本题满分9分)

设$f(x)$在$(a,+\infty)$内可导

(1) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k>0$,证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$;

(2) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=l$(常数),证明

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

得分	评卷人

(19) (本题满分8分)

设$y(x)$是x的一个连续可微函数,且满足

$$x\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t \quad (x\geqslant 0)$$

求$y(x)$.

得分	评卷人

※(20) (本题满分13分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(1,b,c)^{\mathrm{T}}$.试问:当$a$,$b$,$c$满足什么条件时

(Ⅰ)$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,且表示法惟一.

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(Ⅲ)$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,但表示法不惟一,并求出一般表达式.

得分	评卷人

(21) (本题满分13分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为2.

(1) 求参数 c;

(2) 求一正交变换化二次型 f 为标准形;

(3) 指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

得分	评卷人

(22) （本题满分13分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列,$E(X_n)=\mu,D(X_n)=\sigma^2$,证明

$$2/[n(n+1)]\cdot\sum_{k=1}^{n}kX_k\xrightarrow{P}\mu,\quad n\to\infty.$$

得分	评卷人

(23) （本题满分13分）

一袋中装有黑、白两种球,p 表示白球所占的比例,待检验假设为

$$H_0:p=1/2;\quad H_1:p=1/5.$$

从袋中任取4个球(放回抽样),当白球数小于2时,拒绝 H_0,否则接受 H_0. 试给出以下内容:

(1) 总体及其分布;

(2) 样本容量 n;

(3) 拒绝域;

(4) 犯第一类错误和第二类错误概率.

2004 年全国硕士研究生入学考试
经济类·数学 12 月最后冲刺浓缩密押 5 套试卷

黑博士数学三试卷(一) 参考答案

黑博士考研信息工作室
2003 年 12 月于北京

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.)

(1) $y = 2x - \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

【解析】 不存在那种 x_0,使 $x \to x_0$ 时 $y \to \infty$. 故没有铅直渐近线. $x \to +\infty$ 时 $y \to +\infty$ 时,所以沿 $x \to +\infty$,不存在水平渐近线.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 2,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (y - 2x) = \lim_{x \to +\infty} (-x + \sqrt{x^2 - x + 1}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = -\frac{1}{2}.$$

故有斜渐近线 $y = 2x - \frac{1}{2}$. 再看沿 $x \to -\infty$ 方向:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2 - x + 1}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \frac{1}{2}.$$

故有水平渐近线 $y = \frac{1}{2}$. 故其渐近线方程为:$y = 2x - \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$.

(2) $a = 3$ 或 -2

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f', \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'', \frac{\partial z}{\partial y} = af', \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 f'', \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = af''$. 代入题给方程,得

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (6 + a - a^2) f''.$$

因为 f 为任意二阶可导函数,欲使上式为 0,当且仅当 $6 + a - a^2 = 0$,故 $a = 3$ 或 -2.

(3) $-\frac{1}{8}$

【解析】 原式 $= \lim_{x \to 0} \frac{x e^x \int_x^0 f(\theta)\, d\theta}{(4x^3 + x^4) e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_x^0 f(\theta)\, d\theta}{4x^2 + x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-f(x)}{8x + 3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-f'(x)}{8 + 6x} = -\frac{1}{8}.$$

(4) $\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E})$

【解析】 i 由于 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})$. 于是 $\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

ii 由 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{E}$,所以 $\boldsymbol{E} = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{A}$,故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2$.

由 $A^3=2E,A^3+8E=10E$ 得 $(A+2E)(A^2-2A+4E)=10E$,

故 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4E)$.

由于 $A^3=2E$ 得 $E=A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)$,

故 $(A-E)^{-1}=A^2+A+E$.

iii 于是有 $B^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4E)(A^2+A+E)\frac{1}{2}A^2$

$$=\frac{1}{10}(A^2+3A+4E).$$

(5) $\frac{19}{27}$

【解析】 由于 $X\sim B(2,p),P(X=0)=(1-p)^2=1-p(X\geqslant 1)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

所以 $1-p=\frac{2}{3},p=\frac{1}{3}$.

而 $Y\sim B(3,p),P(Y\geqslant 1)=1-p(Y=0)=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$.

(6) $\frac{n+2}{3}$

【解析】 设 X 为所选的两个数学之差的绝对值,则 X 的所有可能取值为 $1,2,3,\cdots,n$,于是

$$P\{X=1\}=\frac{n}{C_{n+1}^2}$$

$$P\{X=2\}=\frac{n-1}{C_{n+1}^2}$$

一般地

$$P\{X=k\}=\frac{n-k+1}{C_{n+1}^2},k=1,2,\cdots,n$$

于是

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n-k+1}{C_{n+1}^2}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}((n+1)k-k^2)$$

$$=\frac{n+2}{3}$$

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

(7) D

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0,f(0)=0$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}g''(0).$$

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}, x\neq 0,$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2} == \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}$$

$$= g''(0) - \frac{1}{2}g''(0) = \frac{1}{2}g''(0) = f'(0),$$

所以选[D].

(8) C

【解析】 因为 $-1 = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{x-a}$,所以$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$,即$f'(a) = 0$,故不能选A、B. 再由题设知,存在点$a$的某个邻域,使得对该邻域内的所有$x$都有$\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} < 0$,由此,$f(x) < f(a)$,故$x = a$是$f(x)$的极大值点,$f(a)$是极大值.

(9) C

【解析】 因为$f(x) = e^{-x}$,

所以 $f'(x) = -e^{-x}$, $f'(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\dfrac{1}{x}$. 故

$$\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx = \int(-\frac{1}{x^2})dx = \frac{1}{x} + C.$$

(10) B

【解析】 因为原级数在$x = -1$处收敛,故该级数的收敛半径

$$R \geqslant |1-(-1)| = 2,\quad 2-1 = 1 < R$$

这表明$x = 2$在收敛区间内,因此原级数在$x = 2$处绝对收敛.

(11) C

【解析】 因为$\iint\limits_D f(u,v)dudv$是一个数,故(B)被排除. 设$f(x,y) = xy + C$,则

$$C = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D (xy+C)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{x^2}(xy+C)dy$$

$$= \int_0^1\left(\frac{x^5}{2} + Cx^2\right)dx = \frac{1}{12} + \frac{C}{3}$$

因此$C = \dfrac{1}{8}$,所以应选(C).

(12) A

【解析】 按定义$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = \lambda_0\boldsymbol{X}_0$,那么

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}_0 = (\lambda_0-2)\boldsymbol{X}_0,\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}_0 = \lambda_0^2\boldsymbol{X}_0,\quad 3\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}_0 = \frac{3}{\lambda_0}\boldsymbol{X}_0.$$

知矩阵$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^2, 3\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值分别是$\lambda_0-2, \lambda_0^2, \dfrac{3}{\lambda_0}$,特征值虽不同,但特征向量是一样的.

由于$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = |(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^T| = |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^T|$,$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}^T$有相同的特征值,但求特征向量时的方程组$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$与$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$是不同解的,即$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}^T$的特征向量不同. 故应选(A).

(13) C

【解析】 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=[B^{-1}(BA^{-1}+E)]^{-1}=[B^{-1}(B+A)A^{-1}]^{-1}=A(A+B)^{-1}B$
故(C)正确.

(14) B

【解析】 由于 X 与 Y 为相互独立的正态随机变量,则 $X+Y\sim N(1,2)$.
于是

$$P\{X+Y\leqslant 1\}=P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{0}{\sqrt{2}}\right\}=\Phi(0)=\frac{1}{2}$$

故只有(B)的结论正确.

三、解答题(本题共9小题,满分94分.)

(15) (本题满分9分)

【解析】 (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}[g'(x)+\sin x]=g'(0)$. 因此,为了使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,只有令 $a=g'(0)$ 才有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.

(2) 当 $x=0$ 时,

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{1}{2}[g''(0)+1].$$

当 $x\neq0$ 时,

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}.$$

由上可得 $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq0,\\[2ex] \dfrac{1}{2}g''(0)+\dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

(3) $$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x[g''(x)+\cos x]+g'(x)+\sin x-g'(x)-\sin x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}[g''(x)+\cos x]=\frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{2}=f'(0).$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

(16) (本题满分8分)

【解析】 平均收益函数 $AR=a-bQ$ 其实就是价格 P 与销售量 Q 的关系式,由此可得总收益函数

$$R=Q\cdot AR=aQ-bQ^2,$$

需求函数(它是 $P=a-bQ$ 的反函数) $Q=\dfrac{1}{b}(a-P)$,

进而可得需求价格弹性 $E_P=\dfrac{P}{Q}\dfrac{dQ}{dP}=-\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{a-bQ}{Q}=1-\dfrac{a}{bQ}.$

利用以上结果不难解决本题.

总利润函数

$$L(Q) = R - C = Q \cdot AR - C = -\frac{1}{3}Q^3 + (7-b)Q^2 + (a-100)Q - 50.$$

从而使总利润最大的产量 Q 及相应的 a,b 应满足 $L'(Q) = 0, MR = 67$ 及 $E_p = -\frac{89}{22}$ 即

$$\begin{cases} -Q^2 + 2(7-b)Q + a - 100 = 0, \\ a - 2bQ = 67, \\ 1 - \frac{a}{bQ} = -\frac{89}{22}. \end{cases}$$ 解得 $a = 111, Q = 3$ 或 $11, b = \frac{22}{3}$ 或 2.

由此得到两组可能的解:

$$a = 111, b = \frac{22}{3}, Q = 3; \quad a = 111, b = 2, Q = 11.$$

把第一组数据中的 a,b 代入得总利润函数

$$L = -\frac{1}{3}Q^3 - \frac{1}{3}Q^2 + 11Q - 50,$$

虽然 $L'(3) = 0, L''(3) < 0$,即 $L(3)$ 确实是 $L(x)$ 的最大值,但 $L(3) < 0$,不符合实际,故应舍去.

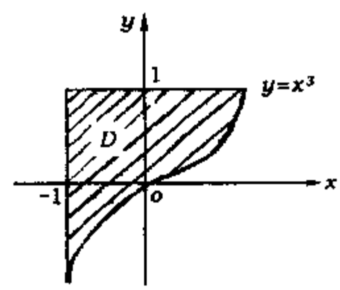
把第二组数据中的 a,b 代入得总利润函数

$$L = -\frac{1}{3}Q^3 + 5Q^2 + 11Q - 50,$$

也有 $L'(11) = 0, L''(11) < 0$,即 $L(11)$ 是 $L(x)$ 的最大值,又因 $L(11) > 0$,故 $a = 111, b = 2$,是所求常数的值,使利润最大的产量 $Q = 11$.

(17) (本题满分 8 分)

【解析】 $\because f(u)$ 连续, $\therefore F(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ 存在.



$$\begin{aligned} I &= \iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 \mathrm{d}y + \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 yf(x^2+y^2)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 x(1-x^3)\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 \frac{1}{2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2) \\ &= -2\int_0^1 x^4\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 xF(x^2+y^2)\Big|_{x^3}^1\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x[F(x^2+1) - F(x^2+x^6)]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$\because F(x^2+1) - F(x^2+x^6)$ 为 x 的偶函数,

$\therefore x[F(x^2+1) - F(x^2+x^6)]$ 为 x 的奇函数. 故后一积分为 0,所以 $I = -\frac{2}{5}$.

(18) (本题满分 9 分)

【解析】 (1) 中显然是要用导函数 $f'(x)$ 的性质去说明函数 $f(x)$ 的性质,因而此题应该从函数 $f(x)$ 与导数 $f'(x)$ 的关系入手,可考虑用拉格朗日中值定理来证. (2) 中函数"$f'(x) + f(x)$"显然与函数 $(f(x)\mathrm{e}^x)'$ 有关,可试着与(1) 中条件、结论联系起来.

【证明】（1）由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k>0$,所以,存在$X>0$,使$x>X$时,有$f'(x)>\frac{k}{2}>0$.任取$x>X$,$f(x)$在$[X,x]$上可导,由拉格朗日中值定理有

$$f(x)-f(X)=f'(\xi)(x-X)>\frac{k}{2}(x-X)$$

取$x\to+\infty$,$\frac{k}{2}(x-X)\to+\infty$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-f(X))=+\infty$

即有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

注:由证明过程可知若$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,则有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

（2）先设$F(x)=e^xf(x)$,$F'(x)=e^x(f'(x)+f(x))$

由条件$\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x))=l$,可得

$$\lim_{x\to+\infty}F'(x)=\infty$$

这里由于l的符号不知,所以不能肯定$F'(x)\to+\infty$.

这个式子不符合(1)中条件.为此修改$F(x)$的定义.

设$F(x)=e^x(f(x)+M)$,有

$$\lim_{x\to+\infty}F'(x)=e^x(f'(x)+f(x)+M)$$

取常数M,使$M+l>0$,即可得

$$\lim_{x\to+\infty}F'(x)=+\infty$$

由(1)注知,$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

由洛必达法则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x(f'(x)+f(x)+M)}{e^x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x)+M)=l+M$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x(f(x)+M)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{e^x}=l+M.$

也即 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+M)=l+M.$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 将此式代入下式

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x))=l$知

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

(19)（本题满分8分）

【解析】 对$x\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t$求导,得

$$xy+\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t+x(x+1)y,$$

再求导,得

$$y+xy'+y=xy+(2x+1)y+x(x+1)y,$$

即
$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-3x)y.$$

分离变量积分得
$$y=\frac{C}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}.$$

而$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{c}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}=0$,故有

$$y(x)=\begin{cases}\frac{c}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(20) (本题满分13分)

【解析】 $\left[\begin{array}{ccc:c}a & -2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & b\\ 10 & 5 & 4 & c\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}2 & 1 & 1 & b\\ 0 & -2-\frac{a}{2} & -1-\frac{a}{2} & 1-\frac{ab}{2}\\ 0 & 0 & -1 & c-5b\end{array}\right]$

讨论矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c}2 & 1 & 1 & b\\ 0 & -2-\frac{a}{2} & -1-\frac{a}{2} & 1-\frac{ab}{2}\\ 0 & 0 & -1 & c-5b\end{array}\right].(*)$$

(Ⅰ)当$a\neq -4$时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$,$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示且表示法惟一.

(Ⅱ)当$a=-4$时,(*)变成

$$\left[\begin{array}{ccc:c}2 & 1 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1 & 1+2b\\ 0 & 0 & -1 & c-5b\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}2 & 1 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1 & 1+2b\\ 0 & 0 & 0 & 1+c-3b\end{array}\right].$$

①当$1+c-3b\neq 0$时

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3,\text{而}\ r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2.$$

$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

②当$1+c-3b=0$时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<3$. $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,且表示法不惟一.此时

$$\left[\begin{array}{ccc:c}2 & 1 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1 & 1+2b\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}2 & 1 & 0 & -1-b\\ 0 & 0 & 1 & 1+2b\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

则令$k_1=t$,则$k_2=-2t-1-b$,$k_3=1+2b$.因此一般表达式为:

$$\boldsymbol{\beta}=t\boldsymbol{\alpha}_1-(2t+b+1)\boldsymbol{\alpha}_2+(1+2b)\boldsymbol{\alpha}_3$$

其中t为任意常数.

(21) (本题满分13分)

【解析】 二次型的秩即为二次型矩阵的秩.

(1)二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & c\end{bmatrix}$$

因为$R(\boldsymbol{A})=2$,所以$|\boldsymbol{A}|=0$,解得$c=3$.容易验证,此时$\boldsymbol{A}$的秩的确是2

或由

$$A \xrightarrow[\substack{r_3+3r_2 \\ r_2\times(-1)}]{r_1+5r_2} \begin{bmatrix} 0 & 24 & -12 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 12 & c-9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-6r_1 \\ r_1\leftrightarrow r_2}]{r_1\times\frac{1}{12}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & c-3 \end{bmatrix}$$

因 $R(A)=2$,所以 $c=3$.

(2) 可求得 $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=4,\quad \lambda_3=9$

可求得对应的特征向量为

$$p_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad p_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad p_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

单位化得

$$q_1=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt6} \end{bmatrix},\quad q_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \end{bmatrix},\quad q_3=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} \\ -\frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}$$

故正交变换 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{2}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ 化二次型为

$$f = 0{y_1}^2 + 4{y_2}^2 + 9{y_3}^2$$

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示椭圆柱面.

(22)（本题满分 13 分）

【证明】 令 $Y_n = 2/[n(n-1)]\sum_{k=1}^{n} kX_k$,则

$$E(Y_n) = 2/[n(n+1)]\sum_{k=1}^{n} kE(X_k) = \mu,$$

$$\begin{aligned} D(Y_n) &= 4/[n^2(n+1)^2]\sum_{k=1}^{n} k^2 D(X_k) \\ &= 4/[n^2(n+1)^2]\sum_{k=1}^{n} k^2\sigma^2 \\ &= 4\sigma^2/(n+1)^2\sum_{k=1}^{n}(k/n)^2 \\ &\leqslant 4\sigma^2/(n+1) \to 0. \end{aligned}$$

对任给的 $\varepsilon > 0$,有