索拉氏微積分詳解

（1979最新版）第三版（單變數與多變數）

李明偉
孫宜昌 譯著

下册

CALCULUS

ONE AND SEVERAL VARIABLES

THIRD EDITION

S.L. SALAS　　EINAR HILLE

久大書局

索拉氏微積分詳解下冊

原著人：SALAS HILLE
譯著人：李明偉
發行人：孫宜昌
總經銷：久大書局
地　址：淡水鎮英專路68號
電　話：6211032
台北連絡處：台北市齊東街82巷8號
電　話：5927473・3511918
郵政劃撥：112537（許秋子帳戶）

中華民國六十九年八月十五日
定價：新台幣120元

下册目次

第十章：積分的運用

習題　10.1

決定在指定區間上的平均值，並求此區間中之一點使函數在此點之值爲平均值。

1. $f(x)=mx+b,\quad x\in[0,c]$

解：$A.V.=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^c (mx+b)\,dx=\dfrac{1}{c}\left[\dfrac{1}{2}mx^2+bx\right]_0^c$

$$=\frac{1}{2}mc+b$$

$$f(x)=\frac{1}{2}mc+b\Rightarrow x=\frac{1}{2}c$$

2. $f(x)=x^2,\quad x\in[-1,1]$

解：$A.V.=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,dx=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\dfrac{1}{3}$

$$f(x)=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. $f(x)=x^3,\quad x\in[-1,1]$

解：$A.V.=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,dx=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1}=0$

$$f(x)=0\Rightarrow x=0$$

4. $f(x)=x^{-1},\quad x\in[1,e]$

解：$A.V.=\dfrac{1}{e-1}\displaystyle\int_1^e x^{-1}\,dx=\dfrac{1}{e-1}\left[\ln x\right]_1^e=\dfrac{1}{e-1}$

$$f(x)=\frac{1}{e-1}\Rightarrow x=e-1$$

求平均值

5. $f(x)=e^{kx}$, $x\in[0, 1]$

解：$A.V.=\int_0^1 e^{kx}\,dx=\left[\frac{1}{k}e^{kx}\right]_0^1=\frac{1}{k}(e^k-1)$

6. $f(x)=\frac{a}{a^2+x^2}$, $x\in[0, a]$

解：$A.V.=\frac{1}{a}\int_0^a \frac{a}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{a}\left[\text{arc}\tan\frac{x}{a}\right]_0^a=\frac{\pi}{4a}$

7. $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a, a]$

解：$A.V.=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}\right.\right.$

$\left.\left.+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a}$

$=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{1}{2}\pi a^2\right)\right]=\frac{1}{4}\pi a$

8. $f(x)=\tan\frac{\pi}{4}x$, $x\in[0, 1]$

解：$A.V.=\int_0^1 \tan\frac{\pi}{4}x\,dx=\left[-\frac{4}{\pi}\log\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right|\right]_0^1$

$=-\frac{4}{\pi}\left[\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)-\log(\cos 0)\right]$

$=-\frac{4}{\pi}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

9. 正弦與餘弦在長度爲 2π 的區間中之平均值爲何？

解：$A.V.=\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{2\pi}=1-1=0$

$A.V.=\int_0^{2\pi}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{2\pi}=0$

10. 求 $\sin^2 x$ 在 $x=0$ 與 $x=\pi$ 之間的平均值。（這個平均值在交流電路理論中經常用到。）

解：$A.V.=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{2}$$

11. 已知 f 在 $[a, b]$ 上連續，比較

$f(b)(b-a)$ 與 $\int_a^b f(x)\,dx$

若 f (a) 在 $[a, b]$ 上是常數；(b) 在 $[a, b]$ 上是遞增；(c) 在 $[a, b]$ 上是遞減。

解：(a) 若 $f(x)=c$

則 $f(b)(b-a)=c(b-a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[cx\right]_a^b=c(b-a)$$

故 $f(b)(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$

(b) 因 $f(x)\le f(b)$

故 $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b f(b)\,dx=f(b)(b-a)$

(c) 因 $f(x)\ge f(b)$

故 $\int_a^b f(b)\,dx\ge\int_a^b f(b)\,dx=f(b)(b-a)$

12. 在第四章中，我們認為 $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的平均變率，而 $f'(t)$ 是在時間 t 的瞬時變率，若

我們新的平均定義與前一致，則

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f' \text{在}[a,\ b]\text{上的平均}$$

證明此爲、正確的。

解：$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt=\dfrac{1}{b-a}\Big[f(t)\Big]_a^b=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

13. 試證對數曲線從 $x=a$ 到 $x=b$ 的平均斜率是

$$\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

解：設 $f(x)=\log x$，則斜率 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)\,dx&=\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{1}{x}\,dx\\&=\frac{1}{b-a}\Big[\log x\Big]_a^b\\&=\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

14. 決定下列敍述是眞或僞。

(a) $\left(\begin{array}{c}f+g\text{在}[a,\ b]\text{上}\\\text{的平均}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}f\text{在}[a,\ b]\text{上}\\\text{的平均}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}g\text{在}[a,\ b]\text{上}\\\text{的平均}\end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{c}\alpha f\text{在}[a,\ b]\text{上}\\\text{的平均}\end{array}\right)=\alpha\left(\begin{array}{c}f\text{在}[a,\ b]\text{上}\\\text{的平均}\end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{c}fg\text{在}[a,\ b]\text{上}\\\text{的平均}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}f\text{在}[a,\ b]\text{上}\\\text{的平均}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}g\text{在}[a,\ b]\text{上}\\\text{的平均}\end{array}\right)$

解：(a) $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b(f+g)\,dx=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f\ dx+\dfrac{1}{b-a}\int g\ dx$

(b) $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \alpha f \ dx = \dfrac{\alpha}{b-a}\displaystyle\int_a^b f \ dx$

(c) $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b fg \ dx \neq \left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f\,dx \right)\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g\,dx \right)$

15. 一石塊在眞空中從靜止落下 x 秒。(a)比較其終端速度與平均速度；(b)比較其前 $\frac{1}{2}x$ 秒內的平均速度與後 $\frac{1}{2}x$ 秒內的平均速度。

解：(a) $V_t = gx$

$$V_{A.V.} = \frac{1}{x}\int_0^x gu \ du = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}gu^2 \right]_0^x = \frac{1}{2}gx$$

故終端速度爲平均速度的兩倍。

(b)前 $\frac{1}{2}x$ 秒內的平均速度：

$$\frac{2}{x}\int_0^{\frac{x}{2}} gu \ dx = \frac{2}{x}\left[\frac{1}{2}gu^2 \right]_0^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}gx$$

後 $\frac{1}{2}x$ 秒內的平均速度：

$$\frac{2}{x}\int_{\frac{x}{2}}^{x} gu \ dx = \frac{2}{x}\left[\frac{1}{2}gu^2 \right]_{\frac{x}{2}}^{x} = \frac{3}{4}gx$$

故前 $\frac{1}{2}x$ 秒內的平均速度爲後 $\frac{1}{2}x$ 秒的平均速度之 $\frac{1}{3}$

16. 用平均表述面積公式 5.10.1 與 5.10.2 的意義。

解：$\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx = (\,|f(x)-g(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的平均值$)\cdot(b-a)$

$\displaystyle\int_c^d |f(y)-g(y)|\,dy = (\,|f(y)-g(y)|$ 在 $[c, d]$ 上

1B

的平均値）・（ $d-c$ ）

17. 設 f 爲連續。試證，若 f 爲奇函數，則其在任何形如〔 $-a$, a 〕的區間上之平均値爲零。

解：若 f 爲奇函數

則 $\int_0^a f(x)\,dx=-\int_{-a}^0 f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^a f(x)\,dx$

$+\int_{-a}^0 f(x)\,dx=0$

故 $\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^a f(x)\,dx=\dfrac{1}{2a}\left[\int_0^a f(x)\,dx\right.$

$\left.+\int_{-a}^0 f(x)\,dx\right]=0$

18. 求橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的垂直和水平平均弦量。

解：(a)垂直平均弦量：

$$\frac{2}{a-(-a)}\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\frac{b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{b}{a^2}\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a}$$

$$=\frac{b}{a^2}\left(\frac{1}{2}a^2\pi\right)=\frac{1}{2}\pi b$$

(b)水平平均弦量：

$$\frac{2}{b-(-b)}\int_{-b}^{b} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,by=\frac{a}{b^2}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy$$

$$=\frac{a}{b^2}\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{b^2-x^2}+b^2\sin^{-1}\frac{x}{b}\right)\right]_{-b}^{b}$$

$$=\frac{a}{b^2}\left(\frac{1}{2}\pi b^2\right)=\frac{1}{2}\pi a$$

19. 證明二相異連續函數在每一區間上不能有相同的平均。

解：設 $f(x)\neq g(x)$

則 $f(x)-g(x)\neq 0,\ x\in[a,b]$

故 $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\neq 0$$

20. 設 f 在 $[a,b]$ 上爲連續，令 $a<c<b$。試證

$$f(c)=\lim_{h\downarrow 0}(f\text{在}[c-h,\ c+h]\text{上的平均})$$

解：因 $f(x)$ 在 $x=c$ 連續

則 $\forall\varepsilon>0,\ \exists h>0$

使得 $|x-c|\le h$，有 $|f(x)-f(c)|\le\varepsilon$

故 $$\frac{1}{2h}\int_{c-h}^{c+h}(f(c)-\varepsilon)\,dx\le\frac{1}{2h}\int_{c-h}^{c+h}f(x)\,dx$$

$$\le\frac{1}{2h}\int_{c-h}^{c+h}(f(c)+\varepsilon)\,dx$$

即 $$f(c)-\varepsilon\le\frac{1}{2h}\int_{c-h}^{c+h}f(x)\,dx\le f(c)+\varepsilon$$

當 $\varepsilon\to 0$，$h\to 0$ 時

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{2h}\int_{c-h}^{c+h}f(x)\,dx=f(c)$$

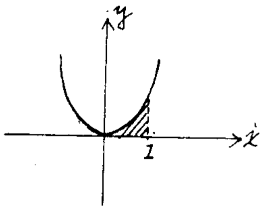
習題 10.2

繪出圖形並求其區域繞 x 軸旋轉所產生的體積

1. $f(x)=x^2$， $x\in[0,1]$

解：$V=\int_0^1 \pi(x^2)^2\,dx=\left[\frac{\pi}{5}x^5\right]_0^1$

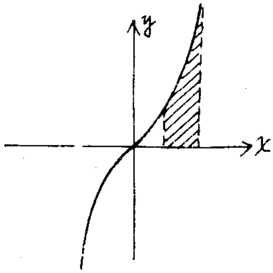
$=\frac{\pi}{5}$



2. $f(x)=x^3$， $x\in[1,2]$

解：$V=\int_1^2 \pi(x^3)^2\,dx=\left[\frac{\pi}{7}x^7\right]_1^2$

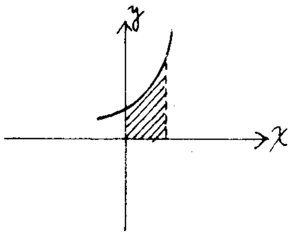
$=\frac{127}{7}\pi$



3. $f(x)=e^x$， $x\in[0,1]$

解：$V=\int_0^1 \pi(e^x)^2\,dx=\left[\frac{\pi}{2}e^{2x}\right]_0^1$

$=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$

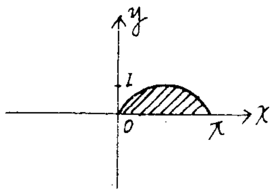


4. $f(x)=\sin x$， $x\in[0,\pi]$

解：$V=\int_0^\pi \pi(\sin x)^2\,dx$

$=\int_0^\pi \pi\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$

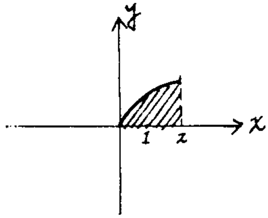
$=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{1}{2}\pi^2$



5. $f(x)=x^{2/3}$， $x\in[0,2]$

解：$V=\int_0^2 \pi\,(x^{2/3})^2\,dx$

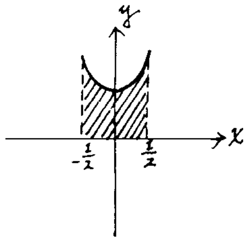
$=\left[\frac{3\pi}{7}x^{7/3}\right]_0^2=\frac{12}{7}(2^{1/3})\pi$



6. $f(x)=\sec\frac{1}{2}\pi x,\quad x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

解：$V=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\pi\left(\sec^2\frac{1}{2}\pi x\right)^2dx$

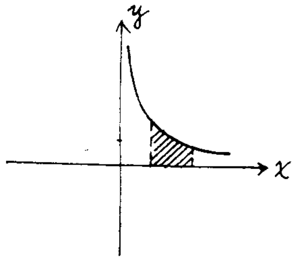
$=2\left[\tan\frac{1}{2}\pi x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=4$



7. $f(x)=\frac{1}{x},\quad x\in[1,\ 2]$

解：$V=\int_1^2\pi\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\left[-\frac{\pi}{x}\right]_1^2$

$=\frac{\pi}{2}$

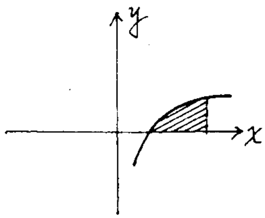


8. $f(x)=\log^x,\quad x\in[1,\ e]$

解：$V=\int_1^e\pi(\log x)^2dx$

$=\pi\left[x(\log x)^2-2x\log x\right.$

$\left.+2x\right]_1^e=\pi(e-2)$

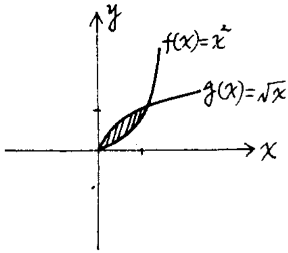


繪出圖形並求其間區域繞 x 軸旋轉所產生的體積。

9. $f(x)=\sqrt{x},\quad x\in[0,\ 1]$；$g(x)=x^2,\quad x\in[0,\ 1]$。

解：$V_1=\int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2\,dx=\left[\frac{\pi}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{\pi}{2}$

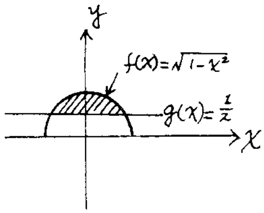


$V_2=\int_0^1 \pi(x^2)^2\,dx=\left[\frac{\pi}{5}x^5\right]_0^1$

$=\frac{\pi}{5}$

$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3}{10}\pi$

10. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=\frac{1}{2}$



解：$V_1=\int_{-1}^{1}\pi(\sqrt{1-x_2})^2\,dx$

$=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$

$=\frac{4}{3}\pi$

$V_2=2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\pi(\sqrt{1-x^2})^2\,dx+\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2dx$

$=2\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}+\frac{\pi}{4}\left[x\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

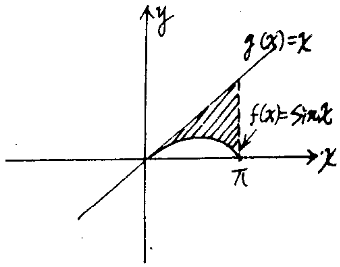
$=\left(\frac{4}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

$=\left(\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

11. $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$；$g(x) = x$, $x \in [0, \pi]$。

解：$V_1 = \int_0^{\pi} \pi (x)^2 dx = [\frac{\pi}{3} x^3]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\pi^4$



$$V_2 = \int_0^{\pi} \pi (\sin x)^2 dx = \pi [$$

$$= \pi [\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\pi^2$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi^4 - \frac{1}{2}\pi^2$$

12. 求將橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 繞 x 軸旋轉所產生之立體的體積。

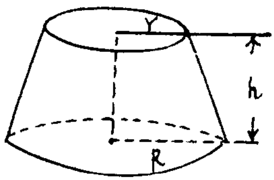
解：$V = \int_{-a}^{a} \pi [\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)] dx$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2} [a^2 x - \frac{1}{3}x^3]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{4}{3}\pi ab^2$$

13. 以一圓錐台之高 h 下，底半徑 R，上底半徑 r 導出其體積公式。

解：$V = \int_0^h \pi (\frac{R-r}{h} x + r)^2 dx$

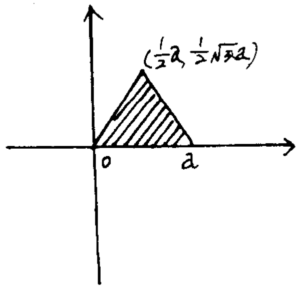


$$= \pi [\frac{R^2 - 2Rr + r^2}{3h^2} x^3$$

$$+ \frac{(Rr - r^2)}{h} x^2 + r^2 x]^h$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\,(R^2+Rr+r^2)$$

14. 正三角形之三頂點爲 $(0,\ 0)$，$(a,\ 0)$，$\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\right)$，求將其繞 x 軸旋轉所產生立體的體積。



解：$V=2\int_0^{\frac{a}{2}}\pi\,(\sqrt{3}\,x)^2\,dx$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}3\pi\,x^2\,dx$$

$$=2\pi\,[\,x^3\,]_0^{\frac{a}{2}}=\frac{1}{4}\pi a^3$$

15. 一立體之底爲圓 $x^2+y^2=r^2$，已知垂直於 x 軸之截面爲(a)正方形，(b)正三角形，求其體積。

解：(a) $\because\quad A(x)=4\,(r^2-x^2)$

$$\therefore\quad V=\int_{-r}^{r}4\,(r^2-x^2)\,dx=4\left[\,r^2x-\frac{1}{3}x^3\,\right]_{-r}^{r}$$

$$=\frac{16}{3}r^3$$

(b) $\because\quad A(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2\sqrt{r^2-x^2}\right)$

$$=\sqrt{3}\,(r^2-x^2)$$

$$\therefore\quad V=\int_{-r}^{r}\sqrt{3}\,(r^2-x^2)\,dx=\sqrt{3}\left[\,r^2x-\frac{1}{3}x^3\,\right]_{-r}^{r}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}r^3$$

16. 一立體之底爲橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，已知垂直於 x 軸之截面爲，(a)斜邊在 xy- 平面的等腰直角三角形，(b)正方形，(c)高爲 2 的三角形，求其體積。

解：(a)$\because$ $A(x)=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

$$\therefore\ V=\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}$$

$$=\frac{4}{3}ab^2$$

(b)$\because$ $A(x)=\dfrac{4b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

$$\therefore\ V=\int_{-a}^{a}\frac{4b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4b^2}{a^2}\cdot\left(\frac{4}{3}a^3\right)$$

$$=\frac{16}{3}ab^2$$

(c)$\because$ $A(x)=\dfrac{4b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

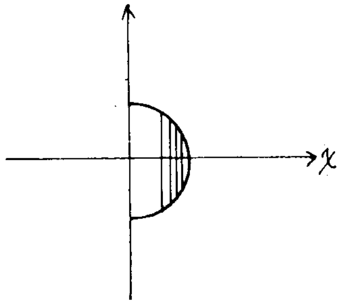
$$\therefore\ V=\int_{-a}^{a}\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{2b}{a}\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a}$$

$$=\frac{2b}{a}\left(\frac{1}{2}a^2\pi\right)=\pi ab$$

17. 一半徑 r 呎的半球形水槽用以貯水，當水爲(a)$\dfrac{1}{2}r$ 呎深，(b)$\dfrac{1}{3}r$ 呎深時，求所貯水量佔全容量的百分多少？

解：全容量$V_0=\frac{2}{3}\pi r^3$



(a)$V=\int_{\frac{r}{2}}^{r}\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2dx$

$=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{r}{2}}^{r}$

$=\pi\left(\frac{2}{3}r^3-\frac{1}{24}r^3\right)=\frac{5}{24}\pi r^3$

$\therefore\ \frac{V}{V_0}=\frac{\frac{5}{24}\pi r^3}{\frac{2}{3}\pi r^3}=31\frac{1}{4}\%$

(b)$V=\int_{\frac{2}{3}r}^{r}\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2dx$

$=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{2}{3}r}^{r}$

$=\pi\left(\frac{2}{3}r^3-\frac{46}{81}r^3\right)=\frac{8}{81}\pi r^3$

$\therefore\ \frac{V}{V_0}=\frac{\frac{8}{81}\pi r^3}{\frac{2}{3}\pi r^3}=14\frac{22}{27}\%$

18. 用兩平行平面割一個半徑為r的球；其中一平面在赤道上方a單位，另一平面在赤道上方b單位，設$a<b$，求在此二平面間球的體積。