多边矩阵理论

张应山　　著

(京)新登字 041 号

内容简介

多边矩阵理论是一个以多维数组作为元素进行封闭的群运算，用来处理多指标问题的方法体系，研究对象主要是各指标不独立变化的多指标问题。本书是第一本系统地阐述此理论及其应用的专著。全书共分五篇七章，内容包括框架理论、多边矩阵的基本运算，以及在正交框架、对称框架、一般框架三个方面的理论及应用结果。

阅读本书要求具有矩阵理论、集合理论、群论方面的数学基础知识。此书可作为多元统计分析、试验设计、矩阵理论等方面的研究生使用教材，也可以作为对多指标问题有兴趣的专家教授、科研及工程技术人员的参考书。

多边矩阵理论

DUOBIAN JUZHEN LILUN

张应山 著

中国统计出版社出版发行

850×1168 毫米　32 开本　21 $\frac{1}{2}$ 印张　66 万字

1993 年 8 月第 1 版　1993 年 8 月河南第 1 次印刷

印数：　1—4000

ISBN　7—5037—1283—X/F. 535

定价:20. 00 元

前　言

多边矩阵理论是一种新理论，自然第一个难点就是命名问题。开始我们认为多边矩阵是张量的矩阵直观表示，因而采用了张量数阵或高维度数阵的命名，这种命名符合人们的直观想象。但随后我们发现：张量是建立在张量空间上的理论，它的一般运算（如并乘、缩并、指标升降等）要求各指标的变化独立，这是许多多指标问题不具备的。多边矩阵的研究对象恰恰是那些指标间相互依赖着变化的多指标问题，对此张量的一切运算规则根本无法使用。另外张量理论与多边矩阵理论的思维方式不同。前者强调从局部到整体，先知道若干向量空间，再设想其最大线性扩张的空间——张量空间的结论，强调的是张量积的变化结构，即向量空间的乘积在张量空间内的变化形式；而后者强调的是整体的协调关系，在总系统正常运行的条件下选取子系统。它采用从整体到局部的分析路线，先分析总框架下的结论及性质，然后经剖分推导出各指标应具有的结论及性质。在这里可能只知总体变化规则，如某些数组出现若干次、均匀出现等，而根本不知道对应哪些局部向量空间，可能其根本不存在。正因为多边矩阵的研究对象及运算法则，包括思维方式与张量都不相同，继续采用张量或广义张量的命名，都是不恰当的，它可能造成人们的概念混淆。应该把张量数阵的命名作些改动。

由于我们在把多指标数组用平面矩阵表示出来时，常常写成一个多重分块矩阵，好像是一个矩阵套着另外一些矩阵，因而可以直观地命名其为多重矩阵，此也比较直观。多指标问题有三个基本要素：全部指标的变化范围、单个指标的变化范围、指标的个数。在采用多重矩阵时，对上述三要素的命名及理论阐述引起很大困难。为此，我们采用了图论的命名方式：把多个指标的总变化范围定义为框架（格阵、图），把单个指标的变化范围定义为边（边长、列），把指标的个数定义为维数。

采用图论的命名法，也有许多不足之处，如矩阵的“边”好象无法解释。对图论不熟悉的读者，可以仍采用高维度数阵的命名方式，把上三要素分别定义为空间、维度、维数来进行直观的理解。如三维数组可理解为立体数阵。除上述命名外，其它的众多命名也未必合适，但我们还是大胆地抛出去，让人们去评说它。

多边矩阵理论的初步设想是1984年提出的，其首先受到武汉大学张尧庭教授（作者的导师）的重视，经多年努力，其理论结构已经形成规模，得到了

相当多的结果。这些初步结果，主要是对历史上处理多指标问题的方法的进一步发展。这些方法一般是：张量分析理论、多重线性代数 理论、拉长及Kronecker 乘积理论、Array 数阵分析理论、分块矩阵理论等等，其理论结果一般集中在正交分析、对称分析、混合分析三个方面，其理论特点是能够对正交问题、对称问题、混合问题作统一处理。它勾通了指标间的数码运算及数据间的分析运算两者的关系，使我们能够用投影矩阵理论来研究正交、对称及混合问题。由于作者兴趣所致，本书尽量叙述与张量理论不同的结果，一般只涉及试验设计、矩阵雅可比、高阶导数与回归分析理论，并且重点放在试验设计方面，其它方向上的结论是相当多的，有志者不妨一试。

在 1987 年中美统计会议上，由张尧庭教授与作者联名发表了多边矩阵在正交框架、对称框架、一般框架三个方向上的正交分解定理；在 1988 年，张尧庭教授及中科院系统所所长成平研究员一起推荐此工作参加了全国青年博士水平论文评选，得选并进行了交流；随后在多元分析、生物数学等国际会议上介绍了此工作，并为许多学术交流写出了众多的研究交流报告。这样诸如加拿大 Waterloo 大学 Jeff. Wu 教授，美国 Chicago 大学 G. C. Tiao 教授，美国 Penn. State 大学 C. R. Rao 教授，美国 Stanford 大学 D. Siegmund 教授，台湾中央科学院统计所所长 M. T. Chao 研究员，中科院应用所所长方开泰研究员等等专家学者，以及许多数不胜数的试验设计、统计、经济、生物、环保、农林业等等方面的理论及应用工作者纷纷来信商讨，提出了相当多的问题及建议，也推荐了许多杂志。与此同时，河南省科学技术委员会也将多边矩阵理论研究作为自然科学基金的重点资助项目。

现在看来，多边矩阵理论是一种数学基础理论，类似于矩阵理论，可以用于多种数学学科，如组合设计、离散数学、有限群论、张量流形等，可以预见到：多边矩阵理论是一套富有潜力的方法体系，是一个可供人们开发利用的处女地，作者在此将多边矩阵理论方面的若干结果整理成册，献给读者，并以此向对这套理论作过贡献的学者表示谢意！

张应山

河南师范大学数学系

1990 年 2 月

目　　录

第一篇
序　　论

第二篇
多边矩阵基础理论

第三篇
正交分析理论

第四篇

对称分析理论

第五篇

混合分析理论

第一篇
序　论

多边矩阵思想是为处理多指标、非线性、混合正交、指标对称等问题，提供的一个数学工具。但就提出的理论体系来看，它对于多指标问题，尤其是对于各指标相互依赖着变化的多指标问题的处理更为有效，因此简单地说多边矩阵理论是一个新的处理多指标问题的方法体系。以各指标相互依赖着变化的多指标问题作为主要研究对象，其它问题穿插在具体例子之中。以后可能会提到线性、正交、对称等名词，这只是为了使读者把有关对线性、正交、对称问题处理的熟知知识，与对非线性、混合正交、指标对称问题处理的多边矩阵知识产生联想。

众所周知，至今为止一般所有的数学学科对单指标、线性、正交、对称等问题的处理比较有效，但对于多指标、非线性、混合正交、指标对称等问题的处理显得无能为力。科学的飞速发展又使得对后者的处理比对前者的处理更为重要，这就要求数学工作者不得不尽快提出对后者处理的有效的数学工具。许多数学家在此方面努力，但提出的数学工具并非乐观。为什么会出现这种现象呢？问题一定是出现在思维方式上。在本篇要对现代科学技术界，尤其是在常见的古典数学学科内，关于多指标问题的处理方式进行总结，找出其共性，从各自的定义入手，分析它们的优点与不足，指出多边矩阵理论应具有的思维方式及运算基本结构。就多边矩阵理论处理问题的对象不同，还要对多边矩阵理论的研究方向进行分类。

本篇的主要结论是：现代科学技术界处理多指标问题的方法

主要分为如下几方面

1. 以处理各指标相互独立的多指标数据为主的张量理论，主要表现在物理学张量分析理论之中。

2. 以处理多重线性变换为主的多重线性代数理论。

3. 以处理指标运算为主的拉长及 Kronecker 乘积理论。

4. 以处理三个指标问题为主的 Array 数阵分析理论。

5. 以处理四个指标问题为主的分块矩阵理论。

上述各理论均采用先单个指标，后多个指标的研究手法进行理论分析。多边矩阵理论要对多指标问题采用一个统一的处理手法，先考虑多个指标问题的最一般形式，然后再对指标框架加以限制，讨论具体指标下的多指标问题。多边矩阵理论的研究方向，应以框架形式的化分为主。本书将在建立了多边矩阵的基础理论以后，以正交性问题、对称性问题及混合性问题的三个研究方向，作为多边矩阵理论的应用研究方向。

第一章
多边矩阵思想的起源与发展

我们说多边矩阵理论是一个新的处理多指标问题的方法体系，那么它具体新在什么地方呢？我们企图对现代科学技术界，如物理学中的张量理论、多重线性代数、Kronecker 积理论、立体数阵(Array)、矩阵的拉长及分块矩阵运算等等处理多指标问题的方法，作一个比较全面的概述，您会发现其思维方式全部是从局部到整体。我们要说明多边矩阵的思维方式与其是不相同的，采用从整体到局部的分析路线。我们的目的是通过本章的阅读能使读者了解(并不一定掌握)多边矩阵的思维方法，为以后各章的理论分析开辟道路，使读者在学习时不致限于某些纯技术性的特殊问题之中，而失去宏观的总思想。这种从宏观思想到具体技术的学习方法本身，也是多边矩阵思维方法所提倡的。本章尽量避免太多的数学知识，阅读起来会相对比较容易一些。

§1.1 处理多指标问题的思维方式

从科学发展史上来看，古代的科学家的哲学思想都是比较直观现实的唯物论。他们总是深入研究某一问题的单一方面，力求严格准确地反映客观世界。在现代科学界，科学家们的哲学思想已经发生了质的变化。一个主要的标志是系统论、信息论、控制论的建立。这三论已经成为现代科学思想界的支柱。在这三论中，系统论是问题的关键。控制论是在一个系统上安装上一个反馈、调节装置，只考虑系统的投入与产出，而不深究系统的内部构造，利用对

投入与产出的数量关系的控制，来保证使系统正常运行。信息论是研究系统与系统之间，大系统与子系统之间的输入与输出之关系，信息论的研究者不去深究某一具体信息的特殊含义，而利用数学方法研究信息的计量、传送、变换和储存，精确计算信息量，并以此评价信息系统的质量。一个系统的信息量越高，有序程度也越高，信息系统的质量就越好，无信息或者较少信息，有序程度就差，信息系统质量就低。系统的无序程度，或系统所不能利用的能量，常常定义为熵，熵可以用信息量计算出来，用熵的大小，可对信息系统作出某些推断。系统论的出发点，是在自然界和人类社会中把研究对象作为一个完整的系统来考察的，并且试图通过对一切系统的高度概括，寻找和建立起适用于一般系统的普遍原则。

按系统论的观点，系统有封闭系统与开放系统之分。封闭系统受熵的作用力(即无序力)的约束，熵不断增长，直至最后全部系统完全无序，不起任何作用(此时无信息量，熵无限大)为止。趋向最大熵值的过程是一个系统走向紊乱，完全缺乏资源转换以致死亡的过程。封闭系统永远向着熵和解体运动。相反，开放系统可以达到某种状态，在这种状态中，开放系统通过材料、能源和信息的不断流动可以保持动态平衡。这样，开放系统开始可能是简单的、单因素的、线性的，但由于能源和信息、材料的交换，使其具有向着更大差异和复杂化方向运动的动能，形成一个更高级的多因素、非线性的组织系统，在新的层次上保持动态平衡。可以断言：任何有生命力的系统，都必须是开放系统，都要从简单到复杂，从单因素到多因素，从线性到非线性进化。而复杂的、多因素的、非线性的系统的主要特点是指标个数太多，相应的问题是多指标问题。如上发展的结果，使得对多指标问题的研究，不可避免地成为了科学界的主要课题之一。

对多指标问题的处理，在各个科学领域都提出了许多巧妙的方法，虽然各有千秋，但其中也有它们的共同之处：都采取从局部到整体的研究路线。先研究各个单因素再研究多因素，先研究单指标再研究多指标，先基本要素后整体性质等等，这是西方文化所具

有的特点。东方文化所具有的特点是企图把上述思想反过来考虑，采取从整体到局部的研究路线，先分析整体性质再推断个体特点。系统论、信息论、控制论的思想实质也正在于此。

高斯有句名言：数学是科学的皇后。作为数学工作者，当然只关心的是处理多指标问题、处理复杂系统的方法，而对处理特殊系统的具体技巧不感兴趣。在西方文化指导下，我们总是用向量、矩阵来处理多指标问题，这是历史上处理多指标问题的方法特点。但是，由于科学界的哲学思想已经发生了质的变化，各个科学领域处理问题的方法也将出现质的变化。数学作为处理具体问题的方法的进一步抽象，也必将出现质的突破。多边矩阵就是适应此思想的一个处理多指标问题的数学方法。它企图先对多因素、多指标问题进行总体处理，再对处理结果进行剖分，分解出单因素或单指标的结果。

从整体到局部的分析问题的思维方式，现实中也是很多的，如投入产出分析表、围棋理论、全面质量管理等等都是此思想的具体体现，有兴趣不妨一阅，弄清其思维实质，这有助于对多边矩阵理论方法实质的理解。

我们这里要说明：对同一问题，如果思维方式不同，那么可以导出完全相反的结论。考虑函数

$$y = f(x_1, x_2) + e$$

现在的问题是：选取(x_1, x_2)使y尽可能的大。我们经抽样试验得到：当$(x_1, x_2) = (1,1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$时

$$y = -9.9, 10.2, 10.3, -9.6$$

按古典的处理问题的方法，是先假设f为线性函数，比如设

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + e$$

用回归分析方法得到：$(a_0, a_1, a_2) = (1.0, -0.4, -0.2)$，即

$$y = 1.0 - 0.4x_1 - 0.2x_2 + e$$

只有x_1, x_2同为负值，才能使y尽可能的大。同样用古典的主效应正交分析方法，也得到$(x_1, x_2) = (-1, -1)$应是最佳因素组合。这显然与试验结果不符，因为当$(x_1, x_2) = (-1, -1)$时，y取的是试

验结果的较小值 -9.6。为什么会出现如此现象呢?问题就出现在我们思维问题的方式上。我们只是用熟知的处理线性问题的工具，或者在各因素相互无关(因素具有可加性)的条件下，处理上述问题的。是采用从具体问题到一般问题的思维路线。

如果我们换个思维角度，先不管 f 为什么函数，从自变量到因变量的关系立即可知：只有 x_1,x_2 相互异号，才能使 y 尽可能的大。再进一步分析可以发现：函数 f 关于 x_1,x_2 可能具有对称性。函数 f 的最大可能形式应该是

$$y = b_0 + b_1x_1x_2 + b_2(x_1 + x_2) + \varepsilon$$

用第五章中的 C_p 模型选择方法，可以剔除干扰或讨厌参数 b_2，可用的分析模型为

$$y = b_0 + b_1x_1x_2 + \varepsilon$$

再用回归分析方法得到

$$(b_0,b_1) = (0.25, -10.0)$$

即

$$y = 0.25 - 10.0x_1x_2 + \varepsilon$$

这与试验结果才是比较拟合的。这种从一般问题到具体问题的思维路线，就是多边矩阵的思维路线。

人们观察事物时，总是先观察到事物的外观形象，后观察到内部具体细节。因而我们说：多边矩阵的思维方式最符合人们认识问题的方式。为使一个系统运行最佳，如果采用从局部到整体思维路线，那么就要使各子系统运行最佳。如果采用从整体到局部的思维路线，那么仅需少量的对大系统影响比较大子系统协调配合的比较好即可。后者得到的结果有时可能更符合实际。例如一个各方面都好的人，并不一定会作出突出成绩，而作出突出成绩的人往往是那些在少数几方面极优，其它方面相对比较差的人。这说明对思维路线的确立，对许多问题的解决起着关键的作用，对多指标、非线性、混合正交、指标对称问题更是如此。要想掌握多边矩阵理论，就必须学会从整体到局部的思维方式。

§1.2 物理学中的张量

牛顿发现力学三大定律，就是立足于现实世界，对平常所见到的客观现象进行总结而得到的。而科学界已经证明，牛顿体系有其局限性。

对于复杂的力学系统的问题研究，出现了四个指标的问题。对此问题的处理，爱因斯坦运用了一个数学工具——张量。成功得解决了四个指标的力学系统问题，提出了相对论[69]，使张量成为了物理学中的必要工具之一。

从张量的始祖利普希茨(Lipschitz)到爱因斯坦的老师闵可夫斯基(Minkowski)，又经爱因斯坦及其后人的努力，张量的运算结构已趋于完善[70]。

张量的定义是一些分量组成的集合。此分量当坐标系改变时，满足一定的转换关系。因而了解张量必须先分析其各分量。

例如一个包含 9 个分量的集合

$$T=\{T^{rs};r=1,2,3;s=1,2,3\}$$

当坐标系改变时，如果

(1) $T^{ij}=\sum\limits_{r,s}\beta_r^i\beta_s^jT^{rs}\quad(i,j=1,2,3)$

则此集合 T 就是张量。张量所带自由指标的个数称为张量的阶数。此乃二阶张量。

自然，变换公式(1) 可以改作如下形式：

(2) $T_{ij}=\sum\limits_{r,s}\beta_i^r\beta_j^sT_{rs}\quad(i,j=1,2,3)$

(3) $T^i_{\cdot j}=\sum\limits_{r,s}\beta_r^i\beta_j^sT^r_{\cdot s}\quad(i,j=1,2,3)$

(4) $T_i^{\cdot j}=\sum\limits_{r,s}\beta_i^r\beta_s^jT_r^{\cdot s}\quad(i,j=1,2,3)$

按其物理意义分别称变换(1)为二重逆变，(2)为二重协变，(3)、(4)为二重混变。相应的张量称为二阶逆变张量、二阶协变张量、二阶混变张量。张量 T 一般指上述四条同时满足的集合 T。

同种类型的张量可以相加。两个同种类型的张量各分量一一相加，其结果可以证明仍是同一类型的新张量。

标量与张量相乘，定义为此标量与张量的各分量相乘，其结果仍是一个没改变类型的新张量。

从张量的定义可以看出，张量的分量有许多不同的形式，如二阶张量的分量就有

$$T^{ij},\quad T_{ij},\quad T^{i}_{\cdot j},\quad T_{i}^{\cdot j}$$

四种形式。但通过对张量变换规律的研究发现：可以找到一个仅与坐标系有关的量——度量张量，通过它可以使上述各形式相互转化。此规律称为张量指标的升降规律，是了解张量的关键。指标升降规律成立的一个最简单条件是：各指标变化范围独立。如果指标间相互依赖着进行变化，上述一切运算都无法进行。许多多指标问题的指标变化范围并非不相关，因而张量技术难以处理如此多指标问题。

利用张量的变换规律以及升降规律，可以导出张量的并乘、缩并、点积、转置、对称化、反对称化、商等运算法则，从而形成张量运算体系。

例如：设T^{ij}，$S_{r}^{\cdot s}$分别是张量T、S的分量，则T^{ij}与$S_{r}^{\cdot s}$各分量的两两乘积就是新张量U的一组分量

$$T^{ij}\cdot S_{r}^{\cdot s}=U^{ij\cdot s}_{\cdot\cdot r\cdot}\quad (i,j,r,s=1,2,3)$$

这种运算称为张量的并乘。

在如上运算体系下，可以研究张量的不变量、标准形、主分量等性质，并通过对张量函数以及相应的导数、微分的研究，可以使物理学中的大量问题都有具体的实体分析模型。

以现代物理学中的张量的发展总体看来，是从分量来研究张量的，此方法可行的一个必要条件是各指标变化相互独立，总指标的性质应可以由各个单个指标的性质所决定。如果按此方法研究下去，势必陷入纯粹的技术问题中去。这就同研究矩阵问题时，只是从矩阵的具体元素研究，也可以推出诸如矩阵的行列式、迹、特征值等不变量的性质，甚至有可能给出相应的公式。但是这样研

究，不如直接从矩阵研究起，把矩阵作为一个整体或视作一个“数”进行有关的推导，而把如上不变量只是作为矩阵的若干性质来应用。后者自然要比前者方便地多。

张量(Tensor)的本意是张紧的意思，是指由其分量经线性最大扩张后形成的最大集合体，它被张量变换所确定。此集合体是一个多指标变量集，各指标间没有什么依赖关系，但其并不包括所有的多指标变量集。尽管我们叙述张量问题时，可以把张量写成整体形式，但此处的张量整体的几何形象并不十分明确。如果我们把一个多指标变量集作为一个“数”进行运算，那么就不能对此多指标变量集作太强的限制，其至有时无须了解指标的个数、指标的先后顺序、变化范围等，一切到运算结束后，必须要采样了解具体指标的性质时，才再行剖分。多边矩阵理论就是此思想的体现。

§1.3　多重线性代数

爱因斯坦是一个物理学家，他从老师闵可夫斯基那里继承了张量的数学思想，而把张量作为工具，只研究张量应用的纯技术性问题，结果使物理学中的张量成了上节所谈的形式。试想：如果爱因斯坦是一个数学专家，视数学为一种文化艺术，着重关心数学思想的发展，数学结构的完美，那么结果会是什么样呢？可以断言：他一定会对张量的数学结构本身重新研究，使其结构的定义更加简单化。

事实正是这样，许多数学领域，由于要解决多指标问题，不可避免地要研究张量，但为了各自学科的应用，就使张量的定义千变万化，出现了千姿百态的局面。

线性代数是数学的基础之一，它主要解决两个问题：线性映射与矩阵。一些数学家，如 M. Marcus，R. Merris、王伯英等，他们更关心的是线性映射的问题。他们把线性映射推广成多重线性映射，利用多重线性映射来定义张量，由此来处理多指标问题。近年来，这已成为许多领域的常用工具。