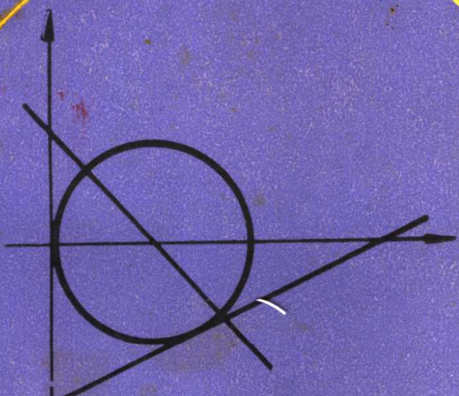
高等数学课外读物

西安交通大学数学系



西安交通大学出版社

高等数学课外读物

西安交通大学数学系编

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书由西安交通大学数学系教师根据多年的教学经验编写而成的，着重分析高等数学中的基本概念和难点，帮助学生深入理解教学内容，培养学生分析和解决问题的能力。

本书共十二篇，内容包括：极限问题、函数的连续性、微分中值定理、应用导数证明不等式、微积分学第一基本定理的应用、定积分应用、级数、学习方法指导等。

本书可配合各高等理工科院校高等数学的教学，可作为夜大、职大、电大、函大的辅导材料，也可供高等院校教师参考。

高等数学课外读物
西安交通大学数学系编
责任编辑：林 全
*
西安交通大学出版社出版
（西安市咸宁路28号）
西安交通大学出版社印刷厂印装
陕西省新华书店发行 · 各地新华书店经售
*
开本 787×1092 1/32 印张 7.375 字数 155千字
1986年10月第一版 1986年10月第一次印刷
印数 1——6,000
统一书号：13340·087 定价：1.30

前　　言

《高等数学课外读物》终于和读者见面了。1978 年以来，为了使我校一年级学生更好地学习高等数学这门课程，我系不定期地编写了《数学课外读物》，帮助学生消化、巩固、深入理解教学内容，培养学生灵活运用所学知识分析、解决问题的能力。多年来这些课外读物广受学生们的欢迎。

本书选有原有课外读物中的部分材料作为基础，进行了加工修改并适当增补，可配合西安交通大学高等数学教研室所编，由高等教育出版社 1985 年再版的《高等数学》第二版（以后本书中提到《高等数学》都是指这一本）。内容包括对基本概念和难点的深入剖析，重要方法的归纳总结和综合运用，解题技巧，应用举例以及学习方法指导等。各篇后都有练习题及答案。希望这些内容能引起读者们的兴趣，对学习高等数学有所裨益。

本书由张贵文、周德晖、龚冬保、马兴波、范金城、符天武、钱昌本、马知恩、陆庆乐等同志分头起草初稿，1983 年由张贵文、周德晖初步整理。1985年又由陆庆乐修改补充统编定稿。参加本书审稿工作的有游兆永、寿纪麟、杨泽高、胡清徽和部分编者。

1986 年 5 月

目　　录

数列极限存在准则的应用

极限在高等数学中至为重要。在高等数学的微积分部分中，导数与定积分及其运算都是以极限为基础的。由于极限推进了各种理论的发展，很多不能用别的方法解决的问题却可用极限方法来解决，因此，它早已成为高等数学的主要思想方法之一，也是高等数学的理论基础。

要求一个数列的极限，当然首先要问它是否收敛，也就是先要知道它有没有极限。这就是所谓**极限存在问题**。只有确实知道一个数列是有极限或收敛的，然后再设法去求它，才有意义。因此，在数学理论中，极限存在问题总居于重要地位。

但是，我们应用数列极限的 ε-N 定义来判定一个数列 a_n 是否收敛的方法，仅能是对差值 $|a_n - A|$ 进行估计，看它是否能任意小。这种方法只有在 A 已知时才能应用。所以，如果说判定数列收敛的方法仅停留在应用极限的定义，那么极限的作用就太小了，不能满足今后的需要，因而我们又介绍了三条极限存在准则：

1. 单调、有界准则
2. 夹逼准则
3. 柯西准则

下面我们举例分别说明这三条准则的应用。

一、单调、有界准则

这条准则的严格叙述如下：

如果单调数列 $x_n(n=1, 2, \cdots\cdots)$ 有界，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 必存在。

这条准则的重要意义在于能使我们完全依据数列本身的特性（单调性和有界性）就可判定数列极限的存在而不必预先知道它的极限值。并且在具体应用时，验证一个数列的单调性和有界性也并不十分困难。

例1　两个正数的等差—等比中项

设有两个正数 $x_1=a$，$y_1=b$，且 $a>b$。作它们的等差中项与等比中项，得

$$x_2=\frac{x_1+y_1}{2}, \qquad y_2=\sqrt{x_1 y_1}$$

再作 x_2 与 y_2 的等差中项与等比中项，得

$$x_3=\frac{x_2+y_2}{2}, \qquad y_3=\sqrt{x_2 y_2}$$

依次下去，得

$$x_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}, \qquad y_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}} \tag{1}$$

这样，我们就得到由循环关系式 (1) 所确定的两个数列 x_n $(n=1, 2, \cdots)$ 与 $y_n(n=1, 2, \cdots)$。证明：数列 x_n 与 y_n 有相等的极限存在。这个极限通常记作 $\mu(a, b)$，称为正数 a，b 的等差—等比中项。

［证］　已经知道，两个不相等正数的等差中项大于等比中项，故有

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}>\sqrt{x_n y_n}=y_{n+1} \tag{2}$$

应用这个不等式，得

$$y_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}>\sqrt{y_n^2}=y_n,\quad x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}<x_n \tag{3}$$

所以，由(2)与(3)有

$$y_n<y_{n+1}<x_{n+1}<x_n$$

从而有

$$b=y_1<y_2<\cdots<y_n\cdots<x_n<\cdots<x_2<x_1=a$$

因此，数列 $x_n(n=1, 2\cdots)$为单调减下有界，数列 $y_n(n=1, 2, \cdots)$为单调增上有界，根据单调有界准则知，它们的极限都存在。设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\beta$$

对(1)中的等式，令 $n\to\infty$ 两边取极限，得

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad \alpha=\sqrt{\alpha\beta}$$

从而知

$$\alpha=\beta$$

即数列 x_n 与 y_n 有相等的极限值。 [证毕]

现在要得出一个用 a， b 来表达 $\mu(a, b)$的式子是有困难的，因为要用到积分的知识。读者在学过积分后有兴趣的话，可参阅苏联的《微积分学教程》第二卷第一分册 第303节(由高等教育出版社出版)。结果是

$$\mu(a, b)=\frac{\pi}{2G}$$

其中

$$G=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}$$

例 2　两个正数的等差—调和中项①

设有两个正数 $x_1=a$，$y_1=b$，且 $a>b$。作它们的等差中项与调和中项，得

$$x_2=\frac{x_1+y_1}{2}\quad,\qquad y_2=\frac{2x_1y_1}{x_1+y_1}$$

再作 x_2 与 y_2 的等差中项与等比中项，得

$$x_3=\frac{x_2+y_2}{2}\quad,\qquad y_3=\frac{2x_2y_2}{x_2+y_2}$$

依次下去，得

$$x_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}\quad,\qquad y_n=\frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}\tag{4}$$

这样，我们就得到由循环关系(4)所确定的两个数列 $x_n(n=1，2，\cdots)$与 $y_n(n=1，2，\cdots)$。证明：数列 x_n 与 y_n 有相等的极限存在，记作γ，这个极限值γ称为 a 与 b 的等差—调和中项。

[证]　不难验证，两个不相等正数 λ，μ 的等差中项大于它们的调和中项，即有

$$\frac{\lambda+\mu}{2}>\frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}$$

故有

$$y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}<\frac{x_n+y_n}{2}=x_{n+1}$$

又因

---

① 设A,B,C为三个不等于零的正数。如果$\frac{1}{C}$ 是 $\frac{1}{A}$与$\frac{1}{B}$ 的等差中项，即 $\frac{1}{C}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$或 $C=\frac{2AB}{A+B}$ ，那么称C为A与B的调和中项。

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}<\frac{x_n+x_n}{2}=x_n \tag{5}$$

$$y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}>\frac{2x_ny_n}{x_n+x_n}=y_n \tag{6}$$

所以

$$b=y_1<y_2<\cdots<y_n\cdots<x_n\cdots<x_2<x_1=a$$

因此，数列 $x_n(n=1, 2\cdots)$ 为单调减下有界；数列 $y_n(n=1, 2, \cdots)$ 为单调增上有界。根据单调有界准则知，它们的极限都存在。设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha \quad , \quad \lim_{n\to\infty}y_n=\beta$$

在(4)式中，令 $n\to\infty$ 两边取极限，得

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad , \quad \beta=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

从而有

$$\alpha=\beta=\gamma$$ ［证毕］

现在我们得出一个用 a，b 表示公共极限 γ 的表达式。

由(4)式知

$$x_ny_n=x_{n-1}y_{n-1}=\cdots=x_1y_1=ab$$

令 $n\to\infty$，对上式两边取极限，得

$$\alpha\beta=ab, \quad 即\ \gamma^2=ab\ 或\ \gamma=\sqrt{ab}$$

由此可见，a 与 b 的等差一调和中项就是它们的等比中项。

例 3　欧拉常数

证明：数列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

收敛，它的极限值通常记作 C，称为欧拉常数。

[证] 1° 先证明不等式

$$\boxed{\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}} \tag{7}$$

其中 n 为任意正整数。

我们已经知道，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为单调增且当 $n\to\infty$ 时趋向于 e，所以 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，从而有

$$1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}} \quad 或 \quad e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}<e^{\frac{1}{n}}$$

由此得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n} \tag{8}$$

又因

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$<\frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n}<1$$

所以 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 为单调减，且当 $n\to\infty$ 也趋向于 e，故有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$ 由此，可以推得

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{9}$$

从而(7)式获证。

2° 由(8)式得

$$1>\ln 2,\quad \frac{1}{2}>\ln\frac{3}{2},\quad \cdots,\quad \frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}$$

把这些不等式相加得

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)>\ln n$$

从而知

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>0$$

又从(9)式，知

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$$

故 x_n 为单调减下有界，所以 x_n 的极根存在，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C$$ [证毕]

欧拉常数 C 跟常数 π 与 e 一样，在很多重要公式中出现，精确到十位小数的 C 值为 0.5772156649 。近年来用电子计算机计算到 1200 位小数以上，最近，进一步计算到 7000 位小数以上。

习惯上，把 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 记作 H_n，即

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(H_n-\ln n-C)=0$，因此，$H_n-\ln n-C=\theta_n$，这里当 $n\to\infty$ 时 $\theta_n\to 0$。故有公式：

$$\boxed{H_n=C+\ln n+\theta_n,\ \text{当 } n\to\infty \text{ 时},\ \theta_n\to 0}$$

最后，我们指出：1)单调有界准则是极限存在的一个充分条件。虽然收敛数列必须有界，但不一定要求单调。2)这个准则只能用来判定极限的存在，没有给出求极限值的方法。

下面所说的夹逼准则，其特点就在于不一定要求数列具有单调性，而且在证明极限存在的同时，就能求出它的极限值。

二、夹逼准则

这条准则的严格叙述如下：

如果

1° $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \quad (n=1, 2, \cdots)$，

2° $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，

那么数列 x_n 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，

下面举例说明这条准则的应用。

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$①，其中 a 为实数。

[证] 因为 $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right| = \left|\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a}{m}\cdot\dfrac{a}{m+1}\cdot\dfrac{a}{m+2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a}{n}\right|$，所以，如果我们固定 m 为不小于 a 的绝对值的一个正整数，即 $m \geqslant |a|$，那么当 $n > m$ 时，有

① 这个极限有的教科书（例如西安交通大学高等数学教研室编的《高等数学》第二版，高等教育出版社出版）作为应用单调有界准则的例子。

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\left|\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{m}\right|\left|\frac{a}{m+1}\cdot\frac{a}{m+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{|a|^m}{m!}\left|\frac{a}{n}\right|=\frac{|a|^{m+1}}{m!}\cdot\frac{1}{n}$$

所以

$$-\frac{|a|^{m+1}}{m!}\frac{1}{n}<\frac{a^n}{n!}<\frac{|a|^{m+1}}{m!}\frac{1}{n}$$

由于$\frac{|a|^{m+1}}{m!}$为固定数，因此当$n\to\infty$时，不等式两端的极限均为零，根据夹逼准则知

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0}$$ [证毕]

例 5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$，其中$a>1$.

[**证**] 因为$a>1$，因此显然有 $\frac{n}{a^n}>0$。要利用夹逼准则，还得设法找出一个通项不小于$\frac{n}{a^n}$而趋于零的数列。为此，我们把$\frac{n}{a^n}$作如下变形：

$$\frac{n}{a^n}=\frac{n}{[1+(a-1)]^n}$$

$$=\frac{n}{1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(a-1)^2+\cdots+(a-1)^n}$$

$$<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}(a-1)^2}=\frac{2}{(a-1)^2}\cdot\frac{1}{n-1}$$

故有

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(a-1)^2}\cdot\frac{1}{n-1}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{(a-1)^2}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{2}{(a-1)^2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}=0$，从而根据夹逼准则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$$ [证毕]

利用例 5 的结果，还可推出以下两个结果：

(1) 如果$|q|<1$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$；

(2) 如果 $a>1$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$（$k$ 为已知的正数）。

(1)的证明由读者来完成；(2)的证明如下：

设m为一取定的不小于 k 的正整数，即 $m\geqslant k$，那么

$$\frac{n^k}{a^n}\leqslant\frac{n^m}{a^n}=\left(\frac{n}{(\sqrt[m]{a^n})}\right)^m=\left[\frac{n}{(\sqrt[m]{a})^n}\right]^m=\left(\frac{n}{b^n}\right)^m$$

其中 $b=\sqrt[m]{a}>1$（因为 $a>1$）。于是有

$$0<\frac{n^k}{a^n}<\left(\frac{n}{b^n}\right)^m \tag{10}$$

由极限的乘积运算和例 5 的结果，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{b^n}\right)^m=0$$

再从(10)式应用夹逼准则即得

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0}$$

例 6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

［证］ 我们先证明一个不等式

$$n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n \tag{11}$$

用数学归纳法来证、显然，当 $n=1$ 时，不等式成立。假定当 $n=k$ 时，(11)式成立，那么当 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)!=(k+1)k!>(k+1)\cdot\left(\frac{k}{3}\right)^k$$

$$=\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}\cdot\frac{3}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}>\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$$

这里最后一步是因为$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3$，这在我们证明 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ 为单调有界时已经知道，所以(11)式成立。

由(11)式，得 $\sqrt[n]{n!}>\frac{n}{3}$，从而有

$$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{3}{n}$$

根据夹逼准则

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0}$$

三、柯西准则

数列 $a_n(n=1, 2, \cdots)$收敛的充分与必要条件是，对于任意给定的正数 ε，必有一个与 ε 有关的正整数$N(\varepsilon)$存在，使得对于任意的正整数m、n 只要 $m>N$，$n>N$，就有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon$$

(《高等数学》上册第 35 页)。

例 1　证明数列 $a_n=\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{\cos n!}{n(n+1)}$ $(n=1, 2, \cdots)$是收敛的。

[证]　任给 $\varepsilon>0$，不妨设 $m>n$，那么由于

$$
\begin{aligned}
|a_n-a_m| &= \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{\cos m!}{m(m+1)}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{m(m+1)} \\
&= \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}<\frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

因此，要使 $|a_n-a_m|<\varepsilon$，只要

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

就行了，即

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

所以取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$ 即可，由柯西准则知，数列 a_n 是收敛的。

在实际应用时，柯西准则常常采用以下等价的叙述：数列 $a_n(n=1, 2, \cdots)$收敛的充分与必要条件是，任给 $\varepsilon>0$