

同 濟 大 學

科學研究論文選

慶祝建校七十五周年

1982.5

前 言

党的十一届三中全会以来,我国进入了建设社会主义精神文明和物质文明的伟大历史时期。高等学校承担着培养又红又专的高级专门人材和发展科学技术的双重任务。重点高等学校必须办成既是教育中心,又是科研中心。

同济大学在这一重要的办学方针指导下,根据自身的历史条件和国家需要,在教育部领导下,正在努力办成理工为主的综合性大学,并已取得了显著进展。

我们选编这部论文选,主要是为了庆祝建校七十五周年,同时也是以科学研究这个侧面,反映学校从一九七八年以来取得的成果和向理工为主的综合性大学转变的步伐。由于篇幅所限,我们只能收集一部分有代表性的成果,还有不少优秀的论文尚未收录。特此说明,敬希鉴谅。

同济大学科研处

目 录

拱桥荷载横向分布理论分析	李国豪 (1)
曲线箱梁挠曲扭转分析	李国豪 (27)
应用拉格郎日条件极值法进行新建管网的优选	杨钦 (37)
给水管网现状的核算	杨钦、陈霖庆 (58)
钢筋混凝土简支梁考虑剪跨比的抗剪强度计算	李寿康、喻永言 (84)
在端部轴压力作用下钢筋混凝土简支梁的抗剪强度	李寿康、喻永言 (97)
组景刍议	冯纪忠 (106)
方塔园规划	冯纪忠 (111)
薄壳基础内力计算	郑大同、胡中雄 (123)
粘性土在地震荷载下的剪切模量和阻尼比	郑大同、胡文尧、王天龙 (132)
混凝土力学行为研究中的一些基本问题	黄蕴元 (144)
大型雷达结构自振频率分析	徐植信、朱美珍、翁大根、于春生 (154)
强烈地面运动持续时间对结构物倒塌的影响	徐植信、翁大根 (170)
在周期荷载作用下, 钢筋混凝土构件滞回曲线考虑裂面接触效应的研究	朱伯龙、吴明舜、张琨联 (188)

单层厂房考虑扭转的弹塑性地震反应分析	朱伯龙、陆伟民 (201)
地下框架结构在爆炸行波作用下的动力效应	孙 钧 (210)
隧道衬砌结构抗爆效应计算	孙 钧、陆洁亮 (226)
钢梁构架式汽轮空压机组基础的设计、试验和实测	俞载道、沈小白、冯允修、费丽华 (240)
单口网络与其等效网络之间的广义 Tellegen 定理	熊炳焜 (259)
轮式车辆转向连杆系设计的几个问题	钱秋荪 (268)
有关星象函数的一族解析函数	吴卓人 (291)
空间的线性与非线性的 Hilbert 边值问题解的存在性与 唯一性定理	黄烈德 (300)
声波在纤维性吸声材料中的传播	赵松龄、 卢元伟 (314)
细网声阻率的计算及其应用	赵松龄 (328)
活性聚合中的单体链转移反应	颜德岳 (334)
极性单体阴离子型聚合反应产物的分子量分布	颜德岳 (349)
从化石群看邻近我国诸海的形成	汪品先 (357)
东海大陆架海底泥炭层孢粉、藻类组合与海面变化	王开发、孙煜华、蒋 辉 (365)
淤泥质海岸的沉积和砂体	李从先、李 萍 (379)
电工专业德语名词复合词的分析	隋亚琴 (391)

Contents

Theoretical Analysis of Transverse Load Distribution of Arch Bridges <i>Li Guohao</i>	(1)
Analysis of Bending and Torsion of Curved Box Girder <i>Li Guohao</i>	(27)
Optimization in the Design of Hydraulic Networks by Lagrange Multipliers <i>Yang Ching</i>	(37)
Replication Modeling before the Design of Distribution System Expansion <i>Yang Ching, Chen Lingqing</i>	(58)
Shear Strength Analysis of Reinforced Concrete Simply Supported Beams in Consideration of Shear-Span Ratio <i>Li Shoukang, Yu Yongyan</i>	(84)
Shear Strength of Reinforced Concrete Simply Supported Beams with End Axial Compression <i>Li Shoukang, Yu Yongyan</i>	(97)
On Landscaping <i>Feng Jizhong</i>	(106)
The Garden of Square Pagoda <i>Feng Jizhong</i>	(111)
A New Method for Computing Stress Resultants in Thin Shell Foundations <i>Zheng Datong, Hu Zhongxiong</i>	(123)
Shear Moduli and Damping of Cohesive Soils under Earthquake Loads <i>Zheng Datong, Hu Wenyao, Wang Tianlong</i>	(132)
Some Basic Problems in the Investigation of Mechanical Behavior of Concrete <i>Huang Yiunyan</i>	(144)
Analysis of the Natural Frequencies of Large Radar <i>Xu Zhixin, Zhu Meizhen, Weng Dagen, Yu Chunsheng</i>	(154)
The Effect of Duration of Strong Ground Motion on the Collapse of Structures <i>Xu Zhixin, Weng Dagen</i>	(170)
A Study of Hysteretic Curve of Reinforced Concrete Members under Cyclic Loading Taking Account of Local Contact Effects of Cracked Section <i>Zhu Bolong, Wu Mingshun, Zhang Kunlian</i>	(188)
Inelastic Analysis of Earthquake Responses of Single-Story Factory Buildings Taking Account of Torsional Vibration in the Plane of Roofs <i>Zhu Bolong, Lu Weimin</i>	(201)

Dynamic Response of the Buried Rigid Frame under a Transient Blast Moving Wave Load <i>Sun Jun</i>	(210)
Calculation of the Dynamic Response of Blast-Resistant Tunnel Lining Structures <i>Sun Jun, Lu Haoliang</i>	(226)
Design, Model Test and Field Vibration Measurement of Flexible Steel Frame Foundation of Turbine-Compressors <i>Yu Zaidao, Shen Xiaobai, Feng Yunxiu, Fei Lihua</i>	(240)
Generalized Tellegen's Theorem for the One-Port Network and Its Equivalent Network <i>Xiong Bingkun</i>	(259)
Some Problems of Designing Steering Linkages for Wheeled Vehicles <i>Qian Qiusun</i>	(268)
On a Class of Analytic Functions Related to Starlike Mappings <i>Wu Zhworen</i>	(291)
The Existence and Uniqueness Theorems of the Linear and Nonlinear Hilbert Boundary Value Problems in Space <i>Huang Liede</i>	(300)
Propagation of Acoustic Waves in Fibrous Sound Absorbents <i>Zhao Songling, Lu Yuanwei</i>	(314)
Calculation of the Specific Acoustic Resistance of the Fine Grids and Its Application <i>Zhao Songling</i>	(328)
The Monomer Transfer in Living Polymerization <i>Yan Deyue</i>	(334)
Molecular Weight Distribution of Polymers Generated from Anionic Polymerization of Polar Monomers <i>Yan Deyue</i>	(349)
Paleontological Evidence for the Formation of the Seas Neighbouring China <i>Wang Pinxian</i>	(357)
Spore-Pollen and Algal Assemblages from the Peat Beds in Continental Shelf of the East China Sea and the Sea Level Changes <i>Wang Kaifa, Sun Yuhua, Jiang Hui</i>	(365)
Sediments and Sand Bodies on the Tidal Flats <i>Li Congxian, Li Ping</i>	(379)
Zur Substantivzusammensetzung im deutschen Fachwortschatz der Elektrotechnik <i>Sui Yaqin</i>	(391)

拱桥荷载横向分布理论分析*

李 国 豪

一、概 述

(一) 问题现状和研究内容

拱桥的荷载横向分布计算,是拱桥内力空间分布的一种实用分析方法。常常采用按刚性横梁或整体平均分配法来作粗糙的设计计算。但是许多有关的测试结果表明,实际情况不是如此,例如见文献[1]~[5]。

对于多肋拱桥的荷载横向分布,国内外作了一些理论计算的尝试,例如见文献[6]~[8]。其共同的不足之处是,缺乏就拱桥的具体结构情况作深入细致的分析。因而难于判断计算方法的正确性如何,计算结果的误差多大。试图以计算挠度和测试挠度的横向分布相对比来证明计算方法正确与否,在这里是值得研究的,因为拱既受轴力又受弯矩,二者的荷载横向分布规律不同(见后),其对拱的挠度的影响也不同,所以,荷载横向分布如何计算,至今还缺乏依据。

应当指出,由多片拱组成的拱桥,实际上是空间杆系,也可近似地化成各向异性的柱形壳结构,它的两个直线边支承于墩台,两个曲线边为自由边。现在有可能用有限元法和电算来求出拱桥上某一点的某一内力沿桥跨和桥宽的影响面,从而计算在最不利的设计荷载下内力的最大值。这样的在理论上比较精确的计算方法,作为包括在这里提出的近似方法的检验是值得欢迎的,但是在工程设计的实用上却太繁复了。

然而,一定的多拱式结构在一定形式的荷载下,其内力和变形沿桥跨 x 和桥宽 y 的分布,可表达为 $f(x)k(y)$ 的形式,从而得出荷载横向分布的概念。这种情况,在梁式桥为常截面简支梁桥承受沿桥跨按元函数(正弦函数)分布的荷载;在拱桥,则为常截面的双铰圆弧拱承受沿拱长按元函数分布的荷载。

这里就以上述的拱桥和荷载作为分析的模型和依据。先剖析单片拱的受力和变形,进而组合多片拱体系的空间受力和变形,由此分别求出各片拱的轴力和弯矩的荷载横向分布。所用的方法可以说是以一整片拱为单元的有限元力法。分析中取我国广泛应用的双曲拱桥为对象,所得结果也适应于其他截面形式(如I字形等)拱桥。对由双铰拱体系求得的荷载横向分布可引伸应用于固端拱桥,只要略加近似处理。关于拱上结构的共同作用,将在最后讨论。

这里的理论分析表明,相邻拱片之间可能产生相当大的纵向剪力,它可能是在一些建成

* 本文选自《同济大学学报》1978年第1期,选载时作者作了些修改。

的双曲拱桥的小拱坡顶上出现纵向裂缝的原因。例如南京长江大桥的公路引桥上的这种裂缝甚为严重，不但有损外观，而且影响桥梁寿命。

(二) 单拱的内力与荷载的关系

在多拱式的拱桥设计中，需要算出各片拱在最不利的设计荷载下若干主要截面，如在拱脚，四分之一跨度，拱顶等截面的轴力和弯矩。这两个内力对于截面设计和应力计算占同样重要的地位。现在我们试按照这些内力的沿拱跨影响线来分析判断最不利的设计荷载分布，由此找出在以后理论分析中应当考虑的荷载形式。

图 1—1 表示一般对称固端拱在拱顶、四分之一拱跨和拱脚截面的弯矩 M 和轴力 N 的沿拱跨影响线。弯矩以拱腹受拉为正，轴力则以压力为正。图 1—2 则表示一般对称双铰拱在 0.1 至 0.5 拱跨的几个截面的弯矩 M 的影响线，至于其轴力影响线则和图 1—1 中的基本相同。在一个拱截面上由弯矩 M 和轴力 N 所产生的下、上边缘应力，也可以由该截面的上、下核心弯矩来计算。这个上、下核心弯矩的影响线

$$M_{k1} = M - Nk_1, \quad M_{k2} = M + Nk_2$$

一般和截面中心弯矩 M 的影响线差不很远，因为拱截面的上、下核心距 k_1 、 k_2 一般不大，影响线竖坐标 $|k_1 N|$ 和 $|k_2 N|$ 都比 $|M|$ 小许多。所以可按图中所示的弯矩 M 影响线来讨论最不利的设计荷载。

从图 1—1 和 1—2 不难看出，对于从拱脚到 0.4 拱跨的截面内力，最不利的荷载是车辆和人群荷载约占半跨，或左半跨或右半跨。图 1—3(a) 略示一种左半跨荷载。它可以分解成为一半对称的 (b) 和一半反对称的 (c)。从这里的 M 、 N 影响线可以判断，弯矩 M 主要地由反对称荷载 (c)，轴力 N 则基本上由对称荷载 (b) 所产生。在以后的理论分析中将用连续荷载来近似地代替实际上不连续的荷载。对称的和反对称的非连续荷载，可以分别由 1、3、... 个和 2、4、... 个半波的正弦函数荷载来组成，见图 1~3(f)~(i)。把这些荷载和 M 、 N 影响线联系起来看，显然对于 M 是两个半波的反对称荷载 (h) 起主要作用，四个和更多半波的荷载影响很小；对于 N 则是一个半波的对称荷载 (f) 起决定性作用，其它的微不足道。

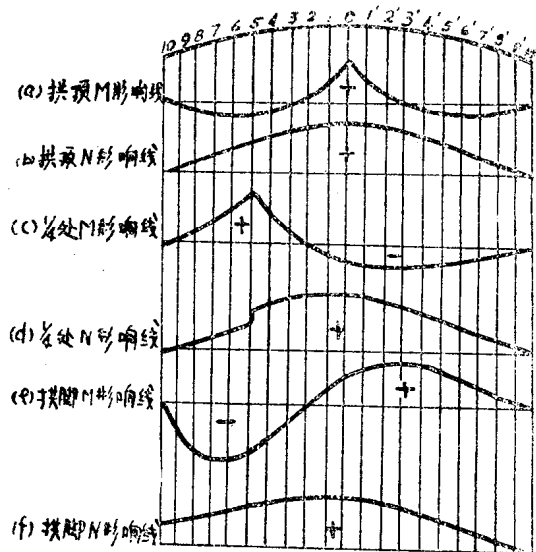


图 1—1

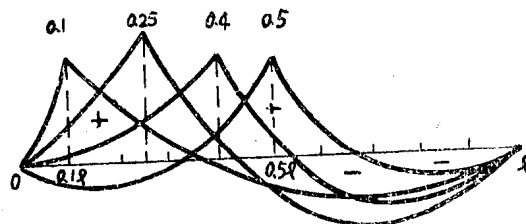


图 1—2

RE

图 1-3

图 1-4

3. 在理论分析中将采用方法, 以相邻拱片连接截面 (如图 1—4 沿小拱波顶 i 、 j 截面) 的内力 U 、 V 、 W 和弯矩 M 为超静定未知数。为了满足这些内力函数及其变位函数相互配合的要求, 对于拱的侧向挠曲也近似以两端铰支代替实际上的两端嵌固支承情况。

4. 各拱肋之间设有横隔梁时, 把它化成连续分布的抗弯等效的翼板, 从而形成多片拱的纵向连续的体系作为理论分析的力学模型。这在梁式桥的荷载横向分布计算中已证明是可行的。

二、单拱分布

作为多拱式拱桥的力学分析的基本单元, 先考察单片拱的变位、内力、荷载之间的关系, 例如图 1—4 中以 i 、 j 线为界的单片拱 (j)。考察内容包括在拱平面的挠曲和侧向挠曲——扭转。后两者在拱总是结合在一起的。如前所述, 分析的对象是常截面双铰圆弧拱。荷载是 1、2、3 个半波的径向荷载、切线荷载 (平面挠曲) 和侧向荷载、扭矩荷载 (侧向挠曲——扭转)。这里荷载是直接位于拱轴线上, 在下一章分析超静定力作用在单拱两边 i 、 j 的情况。

(一) 单拱平面挠曲的基本方程

我们以截面左右对称的单拱为考察对象。它在竖平面的挠曲可以和横向挠曲——扭转分

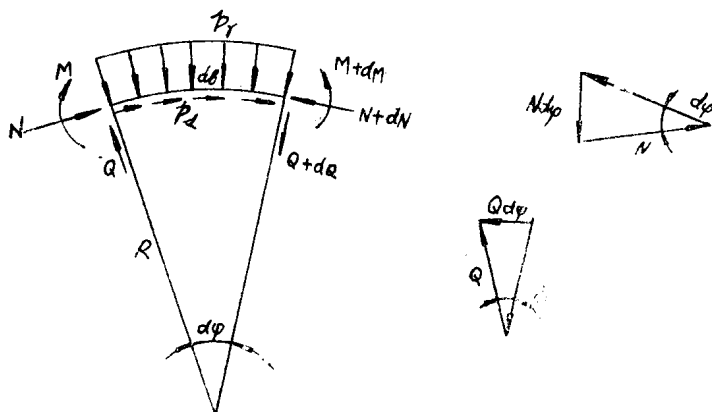


图 2—1

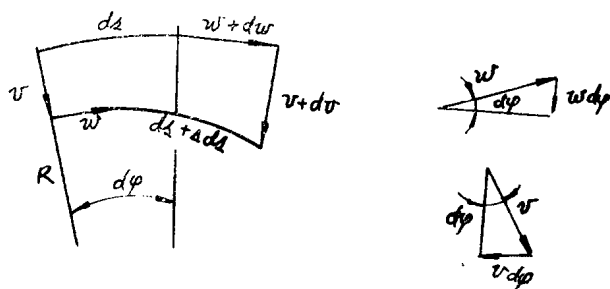


图 2—2

开来处理。这一节先演引平面挠曲弹性平衡微分方程，以后再按不同荷载情况分别求解。

1. 平衡条件

图 2—1 表示圆拱的微元 $ds = R d\varphi$ 承受径向荷载 p_r 和切线荷载 p_s 以及平面挠曲的内力 Q 、 M 和轴力 N 。由切线力、径向力、力矩之和分别等于零的平衡条件得出

$$\begin{aligned}\frac{dN}{ds} &= p_s - \frac{Q}{R} \\ \frac{dQ}{ds} &= -p_r + \frac{N}{R} \\ \frac{dM}{ds} &= Q\end{aligned}\quad (2-1)$$

将第一式和第三式微分一次，然后代入第二式，则得到

$$\begin{aligned}\frac{d^2 M}{ds^2} - \frac{N}{R} &= -p_r \\ \frac{d^2 N}{ds^2} + \frac{N}{R^2} &= \frac{1}{R} p_r + \frac{dp_s}{ds}\end{aligned}\quad (2-2)$$

2. 变形几何关系

图 2—2 略示拱微元在平面挠曲时的变位。注意从截面 m 到 n ，由于拱的曲率 $1/R$ ，径向变位 v 和切线变位 w 会分别形成垂直分量 $-v d\varphi$ 和 $w d\varphi$ ，因此得到 mn 之间的挠曲角（相对转角）、挠曲率和伸长率如下

$$\begin{aligned}\text{挠曲角} \quad \beta &= \frac{dv}{ds} + \frac{w}{R} \\ \text{挠曲率} \quad \chi &= \frac{d\beta}{ds} = \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{dw}{R ds} \\ \text{伸长率} \quad \varepsilon &= \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{dw}{ds} - \frac{v}{R}\end{aligned}\quad (2-3)$$

3. 内力与变形的弹性关系

弯矩 M （以拱腹受拉为正）和轴力 N （以压力为正）与挠曲率和伸长率的弹性关系为

$$\begin{aligned}M &= -EJ_x \chi = -B_x \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{dw}{R ds} \right) \\ N &= -EF \varepsilon = -K \left(\frac{dw}{ds} - \frac{v}{R} \right)\end{aligned}\quad (2-4)$$

其中

$$B_x = EJ_x \quad K = FF \quad (2-5)$$

分别表示单拱截面抗径向弯曲刚度和抗拉压刚度， E 为弹性模量。以后的分析中取常截面的拱。

4. 弹性平衡微分方程

将式 (2-4) 代入式 (2-2) 便得到常截面圆弧拱平面挠曲的弹性平衡微分方程如下，其中以右上角的撇 ' 表示对 s 的微分：

$$\begin{aligned}B_x \left(v'''' + \frac{1}{R} w'''' \right) - \frac{K}{R} \left(w' - \frac{v}{R} \right) &= p_r \\ K \left(w''' - \frac{1}{R} v''' \right) + \frac{K}{R^2} \left(w' - \frac{v}{R} \right) &= -\frac{p_r}{R} - p_s'\end{aligned}\quad (2-6)$$

5. 双铰拱边界条件

对于以后考察的双铰拱，上列微分方程的解 v 和 w 须满足如下的边界条件

$$\begin{aligned} (a) \quad & [v] = 0 \\ (b) \quad & [w] = 0 \\ (c) \quad & \left[v'' + \frac{1}{R} w' \right] = 0, \text{ 因 } [M] = 0 \end{aligned} \quad (2-7)$$

方括弧表示边界值。

(二) 单拱的反对称平面挠曲

单拱反对称平面挠曲的解比较容易求得。取拱顶为坐标零点，拱长 $S = 2\varphi_0 R$ ，其中 $2\varphi_0$ 为圆心角， R 为半径，见图 2—3。

考察两个半波的反对称径向荷载 p_r 和相配合的一整个波的切线荷载 p_s ，如图 2—3，后者代表拱会受到的纵向剪力。

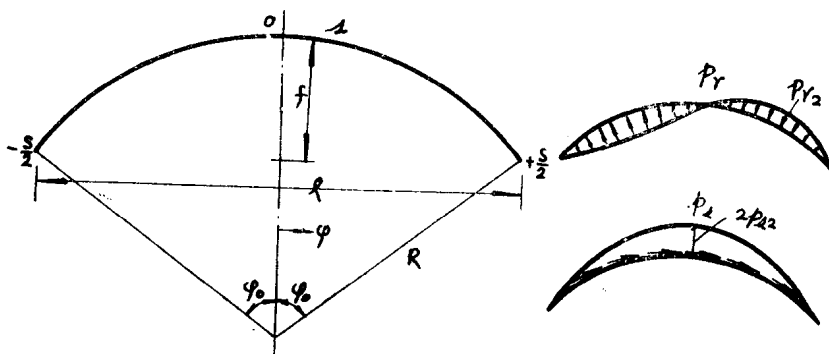


图 2—3

$$\begin{aligned} p_r(s) &= p_{r2} \sin \lambda_2 s \\ p_s(s) &= p_{s2} (1 + \cos \lambda_2 s) \end{aligned} \quad (2-8)$$

其中

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{S} \quad (2-9)$$

在这种荷载下，满足微分方程式 (2-6) 和边界条件式 (2-7) 的解如下。注意变位函数和荷载函数必须相同，否则无法进行荷载横向分布计算。

$$\begin{aligned} \text{径向变位} \quad & v(s) = v_2 \sin \lambda_2 s \\ \text{切向变位} \quad & w(s) = w_2 (1 + \cos \lambda_2 s) \end{aligned} \quad (2-10)$$

把式 (2-8) 和 (2-10) 引入式 (2-6)，便得到关于 v_2 和 w_2 的两个联立方程

$$\begin{bmatrix} \left(B_s \lambda_2^4 + \frac{K}{R^2} \right) & -\frac{\lambda_2^2}{R} (B_s \lambda_2^2 + K) \\ \frac{K}{R} \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right) & K \lambda_2 \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{R^2} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{r2} \\ -\frac{p_{r2}}{R} + \lambda_2 p_{s2} \end{Bmatrix}$$

由此解得

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \bar{v}_2 \begin{bmatrix} (1 + c_2^2 \varphi_2^2) & -\varphi_2(1 + c_2^2) \\ -\varphi_2(1 + c_2^2) & (\varphi_2^2 + c_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{r2} \\ p_{s2} \end{Bmatrix} \quad (2-11)$$

其中缩写符号

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= \frac{1}{B_x \lambda_2^4 (1 - \varphi_2^2)^2} = \frac{\left(\frac{S}{2}\right)^4}{B_x \pi^4 (1 - \varphi_2^2)^2} \\ \varphi_k &= \frac{1}{R \lambda_k} = \frac{2\varphi_0}{k\pi} \\ c_k^2 &= \lambda_k^2 \frac{B_x}{K} = (k\pi)^2 \frac{J_x}{S^2 F} \end{aligned} \quad (2-12)$$

实际情况是：

$$\begin{aligned} \text{圆弧拱的矢跨比} \quad \frac{f}{l} &= \frac{1}{4} \sim \frac{1}{10} \\ \text{相应的弧度比} \quad \frac{2\varphi_0}{\pi} &\approx 0.58 \sim 0.25 = (2.3 \sim 2.5) \frac{f}{l} \end{aligned} \quad (2-13)$$

至于截面回转半径 i_x 与拱长 S 比值的平方一般属 10^{-4} 数量级。所以，在式 (2-11) 中 c_2^2 通常可以忽略不计。从同式中可以看出：第一、切线变位 w_2 为径向变位的 v_2 的 φ_2 倍；第二、切线荷载 p_{s2} 的作用为径向荷载 p_{r2} 作用的 φ_2 倍，而 φ_2 属 10^{-1} 数量级，故前二者分别比后二者小一个数量级；第三、式中的柔度矩阵是对称的；第四、其中与 p_{r2} 和 p_{s2} 相应的主对角系数分别为 1 和 φ_2^2 ，即后者约小两个数量级，所以前者比非主对角线系数绝对值大一个数量级，而后者反之。由此可以推断，由这样的柔度矩阵组成的多拱体系的超静定力的正则方程组的解会给出比 p_{r2} 大得多的切线力 p_{s2} 。这就是说，在实际拱桥上相邻拱片之间会产生比径向剪力大得多的纵向剪力。以上所述也适用于对称平面挠曲的情形，详见以后。

这里的 $\bar{v}_2$ 按式 (2-12) 表示单位径向荷载 $p_{r2} = 1$ 产生的径向变位即挠度的峰值，它相当于以半个拱长 $S/2$ 为跨度的简支梁在这个荷载下的跨中央挠度。拱轴压缩的影响表现于微不足道的系数 c_2^2 ，它将在以后的计算中忽略不计。

(三) 单拱的对称平面挠曲

拱的对称平面挠曲不容易求得简单而又精确的解析解，因为在这种情形弯矩和轴力的影响并重，而且 1、3、5…个半波的挠曲相互联系。为了解决荷载横向分布这个工程实际问题，这里试图用能量法来求得实用上简便的近似解。

1. 荷载和变位函数

前节曾指出，变位函数既要满足边界条件，又要和荷载函数相同。这在径向变位 v 好办，在切线变位 w 则难于选到恰当、简便的函数。这里选用的如下，参阅图 2-4，

$$p_r(s) = p_{r1} \cos \lambda_1 s + p_{r3} \cos \lambda_3 s + p_{r5} \cos \lambda_5 s \quad (2-14)$$

$$\begin{aligned} v(s) &= v_1 \cos \lambda_1 s + v_3 \cos \lambda_3 s + v_5 \cos \lambda_5 s \\ p_s(s) &= p_{s13} f_{13}(s) + p_{s35} f_{35}(s) \end{aligned} \quad (2-15)$$

$$w(s) = w_{13} f_{13}(s) + w_{35} f_{35}(s)$$

$$\begin{aligned} f_{13}(s) &= (\sin \lambda_1 s + \sin \lambda_3 s) \\ f_{35}(s) &= (\sin \lambda_3 s + \sin \lambda_5 s) \end{aligned} \quad (2-16)$$

其中

所有函数都满足边界条件式 (2-7)；

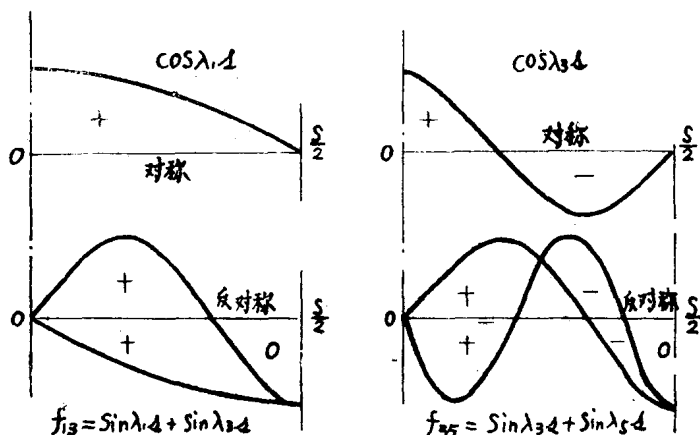


图 2-4

$$[v] = 0, [w] = 0,$$

$$\left[v'' + \frac{w'}{R}\right] = 0, \quad \therefore [v''] = [w'] = 0$$

2. 能量式

弹性变形能量可利用式 (2-4)、(2-5) 和上列变位函数来计算

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2} \int_s \left[B_x \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{dw}{R ds} \right)^2 + K \left(\frac{dw}{ds} - \frac{v}{R} \right)^2 \right] ds \\ &= \frac{S}{4} (a_1 v_1^2 + a_3 v_3^2 + a_5 v_5^2) - \frac{S}{2} [b_1 v_1 w_{13} + b_3 v_3 (w_{13} + w_{35}) + b_5 v_5 w_{35}] \\ &\quad + \frac{S}{4} [(d_1 + d_3) w_{13}^2 + 2d_3 w_{13} w_{35} + (d_3 + d_5) w_{35}^2] \end{aligned} \quad (2-17)$$

其中

$$\begin{aligned} a_k &= B_x \lambda_k^4 + \varphi_k^2 K \lambda_k^2, \\ b_k &= \varphi_k (B_x \lambda_k^3 + K \lambda_k), \quad \varphi_k = \frac{1}{R \lambda_k} = \frac{2\varphi_0}{k\pi}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{S} \\ d_k &= \varphi_k^2 B_x \lambda_k^4 + K \lambda_k^2, \end{aligned} \quad (2-18)$$

A_i 的变分为

$$\delta A_i = \sum \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i \quad (2-19)$$

其中 α_i 代表变位参数 $v_1, v_3, v_5, w_{13}, w_{35}$ 。

荷载位势的变分为

$$\begin{aligned} -\delta A_o &= \int_s (p_r \delta v + p_s \delta w) ds \\ &= -\frac{S}{2} [p_{r1} \delta v_1 + p_{r3} \delta v_3 + p_{r5} \delta v_5 + (2p_{s13} + p_{s35}) \delta w_{13} \\ &\quad + (p_{s13} + 2p_{s35}) \delta w_{35}] \end{aligned} \quad (2-20)$$

平衡条件的能量表达式为

$$\delta A_i - \delta A_o = 0 \quad (2-21)$$

由此得出变位参数的方程组。

3. 变位方程组和解

下面给出五个变位参数的联立方程组。作了三种情况的解：(1) 只取 v_1 、 v_3 、 w_{13} ；(2) 取 v_1 、 v_3 、 w_{13} 、 w_{35} ；(3) 取 v_1 、 v_3 、 v_5 、 w_{13} 、 w_{35} 。实际数例分析表明，对于荷载横向分布实用计算，可以取用情况 (1) 的解。

方程组如下

$$K\lambda_1^2 \begin{bmatrix} \mu_1\varphi_1^2 & 0 & 0 & -\varphi_1 & 0 \\ & \mu_3\varphi_1^2 & 0 & -3\varphi_1 & -3\varphi_1 \\ & & \mu_5\varphi_1^2 & 0 & -5\varphi_1 \\ \text{对 称} & & & 10 & 9 \\ & & & & 34 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \\ w_{13} \\ w_{35} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{r1} \\ p_{r3} \\ p_{r5} \\ 2p_{s13} + p_{s35} \\ p_{s13} + 2p_{s35} \end{Bmatrix} \quad (2-22)$$

$$\text{其中} \quad \mu_k = 1 + \nu_k, \quad \nu_k = k^4 c_1^2 / \varphi_1^2 \quad (2-23)$$

取三项 v_1 、 v_3 、 w_{13} 的解可写成如后。令

$$\bar{v}_3 = \frac{1}{B_x \lambda_3^4 (1 - \varphi_3^2)^2}, \quad z = (1 - \varphi_3^2)^2,$$

$$\text{得出} \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ 2w_{13} \end{Bmatrix} = \bar{v}_3 \cdot z \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{9}\mu_3 + \nu_3\right) & \frac{1}{3} & \frac{2}{9}\mu_3\varphi_1 \\ & 1 & \frac{2}{3}\varphi_1 \\ \text{对 称} & & \frac{4}{9}\mu_3\varphi_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{r1} \\ p_{r3} \\ p_{s13} \end{Bmatrix} \quad (2-24)$$

以一个集中荷载 P_r 作用于拱顶为例。把 P_r 展开成 $p_{r1} = p_{r3} = 2P/S$ 代入上式，然后以式 (2-14)、(2-15) 的 v 和 w 代入式 (2-4)，则得到弯矩 M 和轴力 N 。它们在拱顶截面的数值 M_c 和 $N_c = H$ 分别为按一般结构力学方法求得的精确值的 62% 和 85%。值得指出的有两点：第一、仅仅 p_{r1} 产生的 v 、 w 形成 ε 即拱轴力 N ， p_{r3} 所属的 v 、 w 形成的 $\varepsilon = 0$ ，即 $N = 0$ 。第二、 p_{r3} 产生的 M_c 占这个 62% 中的 3/4，即约占 M_c 精确值的一半。

增取变位参数 w_{35} 或 v_5 和 w_{35} ，即前述的情况 (2) 或 (3)，对式 (2-24) 的柔度矩阵系数影响极微：仅第一行的第一个和第三个系数分别增加 $\nu_3/25$ 和 $\nu_3\varphi_1/25$ ，其余的不变。但拱轴力 N 主要由于 $v_5(p_{r1})$ 而增大 25%。其次是 $p_{r5} = 2P/S$ 和 v_5 共同使前述的 M_c 近似值从 62% 提高到 82%，不过总的说来，对 M_c 是 p_{r3} 起主要作用。

(四) 单拱的扭转和侧向挠曲

1. 情况说明

分析单拱的扭转是为了在荷载横向分布计算中能够考虑拱桥的抗扭刚度和各片拱之间的刚性连接。这两个因素在梁式桥的荷载横向分布中表现出重要作用。

拱的扭转总是和侧向挠曲相互结合在一起，处理这个问题时，困难在于拱桥在侧向挠曲时是两端嵌固的，因而单拱的侧向挠曲线也应反映这个特征。这使对侧向挠曲难于求得侧向变位函数 $u(s)$ 和侧向荷载函数 $p_n(s)$ 形式相同的精确解。即使仿照在前一节在对称平面挠曲中对 $w(s)$ 和 $p(s)$ 采用的近似方法来处理，也还存在一个需要克服的困难。这就是，在荷载横向分布计算中体现拱片之间连接内力的 $p_n(s)$ 、 $p_r(s)$ 、 $p_s(s)$ 和扭矩 $m(s)$ 必须是互相配合的函数。其具体要求为：

$$p_n(s) \propto m(s) \propto p_r(s) \propto \frac{dp_s(s)}{ds} \quad (2-25)$$

其中 $\propto$ 表示形式相同。关于 p_r 和 p_s 的配合条件已在平面挠曲中照顾到了。对于 $m(s)$ 的要求也容易办到。要 $p_n \propto u(s)$ 而且符合上式,则唯有侧向挠曲为两端铰支时才可能。

鉴于侧向挠度 $u(s)$ 极小,尤其是在宽桥,而在沿桥宽对称分布的实际设计荷载下甚至接近于零,故考虑把 $u(s)$ 的边界条件由两端嵌固放松为两端铰支,以便满足上述要求。这样做对荷载横向分布计算结果带来的误差不大,还可以适当增大拱截面的侧向抗弯刚度计算值来减小误差,见后。

2. 拱的扭转和侧向挠曲基本方程和它的解

常截面圆弧拱的扭转和侧向挠曲的弹性平衡微分方程的演引可参阅有关文献,例如[9],这里从略。现将方程写出如下:

$$\begin{aligned} -C\theta'' + \frac{B_y}{R^2}\theta - \frac{C+B_y}{R}u'' &= m_s(s) \\ -\frac{C+B_y}{R}\theta'' + B_y u'''' - \frac{C}{R^2}u'' &= p_n(s) \end{aligned} \quad (2-26)$$

其中 $\theta(s)$ 、 $m_s(s)$ 和 $u(s)$ 、 $p_n(s)$ 分别表示扭转角、扭矩荷载和侧向变位、侧向荷载,参阅图1—4; C 和 B_y 分别为单拱截面的自由扭转刚度和侧向挠曲刚度。约束扭转作用经过数字计算证明微不足道,可以忽略不计。

按照前面所说,这里 $\theta(s)$ 和 $u(s)$ 的边界条件为:

$$[\theta] = 0, [u] = 0, [u''] = 0 \quad (2-27)$$

满足式(2—26)、(2—27)的变位函数和形式相同的荷载函数可表示如下

$$\begin{Bmatrix} m_s(s) \\ p_n(s) \\ \theta(s) \\ u(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_3 & \cdots & m_2 & \cdots \\ p_{n1} & p_{n3} & \cdots & p_{n2} & \cdots \\ \theta_1 & \theta_3 & \cdots & \theta_2 & \cdots \\ u_1 & u_3 & \cdots & u_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \lambda_1 s \\ \cos \lambda_3 s \\ \vdots \\ \sin \lambda_2 s \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2-28)$$

带奇数1、3、…和偶数2、…的项分别代表对称的和反对称的扭转与侧向挠曲。每四个脚号相同的变位和荷载是一组独立的解。把它代入式(2—26)后可求得变位参数和荷载参数的关系如下:

$$\begin{Bmatrix} u_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} = \bar{v}_k \begin{bmatrix} (\mu_{bk} + \mu_c \varphi_k^2) & -(\mu_{bk} + \mu_c)/R \\ -(\mu_{bk} + \mu_c)/R & (\mu_{bk} \varphi_k^2 + \mu_c) \lambda_k^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{nk} \\ m_{sk} \end{Bmatrix} \quad (2-29)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= \frac{1}{B_x \lambda_k^4 (1 - \varphi_k^2)^2} \\ \mu_{bk} &= \frac{B_x}{e_k B_y}, \quad \mu_c = \frac{B_x}{C} \end{aligned} \quad (2-30)$$

这里把拱截面的侧向抗弯刚度 B_y 乘了一个增大系数 e_k ,以补偿将拱在侧向挠曲中的嵌固端当作铰支端的误差。近似地按照以拱长 S 为跨度的梁作1、2、3个半波挠曲时两端嵌固和两端铰支的最大挠度相等来求 e_k 。设分别在波中央受一个集中荷载,则得到

$$e_1 = \frac{192}{48} = 4$$

$$e_2 = \sqrt{5} = 2.236$$

(2-31)

$$e_3 = \left(\frac{2\sqrt{5} + 1}{3} \right)^3 = 1.75$$

三、拱单元变位矩阵

本章为建立多拱体系超静定力的正则方程作准备。在前一章的基础上，分析超静定力形成的拱荷载，从而算出对应于超静定力的变位的柔度矩阵。还要算出超静定力对单拱的截面产生的变形，即拱截面柔度矩阵。这两个柔度矩阵之和便给出拱单元（一片整拱）的柔度矩阵。此外尚需拱单元荷载变位矩阵。由此就可以建立所求的正则方程。

（一）超静定力形成的单拱荷载

图 3-1 表示有、无悬拱波的双曲拱桥划分单拱的两种情况。截面上 0 点为截面的形心，c 点为扭转中心。在前一章分析中，拱的径向和切线荷载 p_r 和 p_s 是通过 0 点的，侧向荷载 p_n 则通过 c 点，扭矩荷载 m_s 是绕 c 点。在图 (a) 绘出作用于拱单元两边 i、j（参阅图 1-4）的超静定内力 $V^i, W^i, U^i, M^i, V^j, W^j, U^j, M^j$ 。它们都是坐标 s 的函数，并且分别和 p_r, p_s, p_n, m_s 的函数形式相同。现在要求出八个超静定力形成的四个荷载。

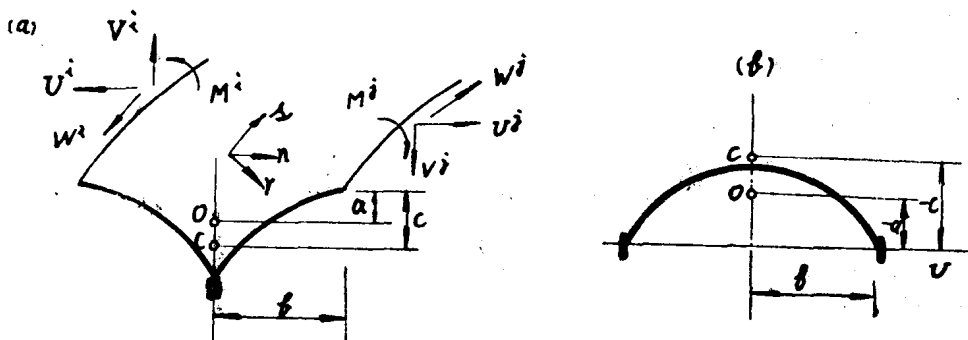


图 3-1

首先可以列出八个超静定力形成的在三个坐标轴方向的力和力矩：

$$p_r = V^j - V^i$$

$$p_s = W^j - W^i$$

$$p_n = U^j - U^i$$

$$m_s = M^j - M^i + (V^j + V^i)b + (U^j - U^i)c$$

(3-1)

$$m_n = (-W^j + W^i)a$$

$$m_r = -(W^j + W^i)b$$

前四个直接就是所求荷载，后两个的作用还要分析。 m_n 表示拱在平面挠曲中一部分弯矩 M_n 的增长率，即