1978年

全国函数论会议论文综述部分

函数论专辑

HANSHULUN ZHUANJI

科学技术文献出版社重庆分社

函 数 论 专 辑

中国科学技术情报研究所重庆分所　　编 辑
科学技术文献出版社重庆分社　　出 版
重庆市市中区胜利路91号
四川省新华书店重庆发行所　　发 行
科学技术文献出版社重庆分社印刷厂　　印 刷

开本：787×1092毫米1/16　印张：6.75　字数：16 万
1979年9月第一版　　1979年9月第一次印刷
印数：21400

书号：13176·49　　定价：0.70元

前　　言

1978年5月，在上海举行了函数论学术交流会，到会代表有80人，宣读论文52篇，综合报告17篇，专题报告1篇，这本会议集由于篇幅限制，只摘要辑录了其中的一部分。

这次会议是在粉碎“四人帮”以来，经中国科学院数学所的同志从1977年4月开始，从调查研究到组织筹备后，在全国各分支学科中首先进行的一次全国性的学术会议。在调查筹备的过程中，更深切更具体地了解到“四人帮”对基础理论的严重破坏。好端端的一个在我国比较有基础，有老一辈数学家带领，有相当数量队伍，有接近国际前沿工作的函数论学科，从四有几乎变成四无。在调查研究过程中，一提到怎样恢复函数论的理论研究工作，“痛定思痛”与“心有余悸”的情绪，很自然地在函数论工作者中间流露出来。与此同时，无不愤怒声讨四人帮的罪恶，并为数学理论工作受到应有的重视而高兴。

华国锋同志为首的党中央对我国科学事业的关心，大大地鼓舞了全国函数论工作者。从会议的筹备到会议的召开，情况就有了很大的进展。“科学的春天”已经使函数论这块小小的园地呈现了活跃的新气象。百花齐放的前景，可以从这本小册子看到一些徵象了。为了加快实现我国的四个现代化，我们预期着硕果累累的收获季节，在这块园地上能更快地到来。

这次会议限于当时的条件，还没有能真正反映出全国函数论方面研究工作的全貌，还有很重要的工作面没有涉及。这本小册子又是会议的部分报告的辑录，当然更有它的局限性，由于“四人帮”的破坏，当时数学教学与科研方面还处在百废待举的时刻，数学界的主要力量，还不得不放在数学教学，数学教材，数学竞赛等方面的重要工作上。数学学会组织的学术活动当时还来不及展开，会议集的篇幅也有所限制，这些都是这次会议与会议集的主要不足之处。

这次会议是在上海召开的，得到了上海市科协，复旦大学，上海师大等单位的大力支持。会议集的出版得到了中国科技情报研究所重庆分所和有关工作同志的辛勤协作，在此一并表示感谢。

1978年全国函数论会议秘书组

目 录

关 于 Schwarz 引 理

陆启铿（中国科学院数学研究所）

Schwarz 引理的研究一直是多复变数函数论中一个活跃的领域，习知单复变函数的Schwarz 引理是考虑在单位圆 B内解析的函数 $f(z)$，当 $|f(z)|\leqslant 1$，且$f(0)=0$时，则有 $|f(z)|\leqslant|z|$. 原来 Schwarz 的证明（Gesammelte Abhandlungen, 1890, Vol Ⅱ, p.109）仅仅对 $f(z)$是单叶的情形，而现在所熟知的形式和证明实际上是来源于C. Carathéodory（Math. Ann., 1912, 52 (1), 107—144).而Pick(Math. Ann., 1915, 77, 1—6; 7—23)则给出了Schwarz引理的几何含义，即若 f: B→B 是解析映照，则对B中任两点 z_1,z_2 有

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right|\leqslant\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|, \tag{1}$$

这等价于对任一点$z\in B$，有

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}. \tag{2}$$

等式在一点成立当且仅当 f 是把 B一一地映为B.

上面第一个不等式的几何含义是在解析映照下非欧距离缩小；第二个不等式是非欧体积缩小。

此后，在单复变数中 Schwarz 引理最重要的是Ahlfors的推广(Trans. Amer. Math. Soc., 1938, 43, 359—364)：在单位圆B中命

$$ds^2=\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}, \tag{3}$$

（称谓Poincaré度量），设W是Riemann曲面，f: B→W 是解析的，若 W 中有度量 $d\sigma^2=\rho^2(w)|dw|^2$，它的曲率$k=-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\log\rho^2}{\partial w\partial\bar{w}}$小于单位圆中 Poincaré 度量的曲率(= −4)，则恒有 $f^*d\sigma^2\leqslant ds^2$，这里$f^*d\sigma^2$ 表示以 $w=f(z)$ 代入$d\sigma^2$中。这个结果第一次指出了曲率与距离缩小的关系。

由于 Schwarz 引理在单复变数函数论中应用是很多的(例如见上面所引用的Carathéodory与 Ahlfors的文章)，因此有不少人努力把它推广到多复变数。有的人研究距离缩小，有的人研究体积缩小，这两者在多复变数中通常是不等价的。

Carathéodory (Math. Ann, 1926, 97, 76—98)在C^n的有界域D中引进度量

$$M_D(a,b)=\sup_{\varphi\in\varepsilon(D)}E(\varphi(a),\varphi(b)), \tag{4}$$

其中

$$E(t_1,t_2)=\tfrac{1}{2}\log\left(1+\left|\frac{t_2-t_1}{1-\bar{t}_1t_2}\right|\right)\Big/\left(1-\left|\frac{t_2-t_1}{1-\bar{t}_1t_2}\right|\right)$$

表示单位圆B中两点t_1,t_2的非欧距离，$\varepsilon(D)$表示在D中解析的函数适合$|\varphi|<1$的集合，a,b为D中任意两点，这度量现称为Carathéodory度量，它是距离缩小的，即若f: D→D 是解析映照，则对任两点a, b∈D有$M_D(f(a), f(b))\leqslant M_D(a,b)$. 在一般情形仅知道$M_D(a,b)$是a与b的连续函数，而并不是a与b的可微分函数(例如双圆柱的情形就是如此)，因此不能由此导出一微分度量，故不能由此直接得出体积缩小的结论。H. Cartan(Bull. Soc. Math. de France, 1930, 58, 199—219)证明：若D是C^n中包含原点的一有界域，f: D→D是解析映照适合$f(0)=0$，则$\left|\det\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0}\leqslant 1$，等号成立的充要条

件为f把D一一地映为自己，这里$\frac{\partial f}{\partial z}$表示映照$f$的函数矩阵，这个结果是说在原点体积是缩小的。如果D是可递的，不难证明，在D的任一点也是体积缩小的。但是与单复变数的情形不一样，体积缩小不能导出距离缩小。

单复变数的Schwarz引理最初仅限于单位圆讨论，因此自然地考虑把D限制为单位超球$B^n=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n;\ z\bar{z}'<1\}$时的Schwarz引理，这里把z看作$1\times n$矩阵，$z'$表示z的转置，$\bar{z}$表示z的复共轭。Bochner-Martin(“Several complex variables，1948)，Bureau(J. Math. Pure Appl.，1952，3，160—190)证明：若f：$B^n\to B^n$是解析映照，且$f(0)=0$，则$f(z)\overline{f(z)}'\leqslant z\bar{z}'$。由于知道超球$B^n$中任两点$z_1,z_2$的非欧距离为$\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{\chi(z_2,z_1)}/(1-\sqrt{\chi(z_2,z_1)})$其中$\chi(z_2,z_1)=(z_2-z_1)(1-\bar{z}_1'z_2)^{-1}\overline{(z_2-z_1)}'/(1-z_1\bar{z}_2')$(陆启铿，多复变函数与西几何，数学进展，1956，2,567—661)，上面的Schwarz引理即$\chi(0,\ f(z))\leqslant\chi(0,z)$。由$B^n$的可递性不难得出$\chi(f(z_2),\ f(z_1))\leqslant\chi(z_2,z_1)$，此即距离缩小。由于$\chi(z_2,z_1)$对$z_2,z_1$是可微分的，取$z_1=z$，$z_2=z+dz$，用Taylor展式，有$\chi(z+dz,z)=ds^2+\cdots$，其中$ds^2=dz(1-\bar{z}'z)^{-1}d\bar{z}'/(1-z\bar{z}')=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}h_{\alpha\beta}(z,\bar{z})dz_\alpha d\bar{z}_\beta$。略去不等式$\chi(f(z+dz),\ f(z))\leqslant\chi(z+dz,z)$中dz高于二阶的项，有$f^*ds^2\leqslant ds^2$。这是微分度量的距离缩小，由此显然得出$\det(h_{\alpha\bar{\beta}}(f,\bar{f}))\left|\det\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2\leqslant\det(h_{\alpha\beta}(z,\bar{z}))$，此即体积缩小。

然而超球不过是典型域的非常特殊的一种(见华罗庚，多复变函数论中典型域的调和分析，科学出版社，1956)，自然地会考虑到典型域的Schwarz引理的形式。Ozaki—Kashivagi—Tsubi (Sci. Rep. Tokyo. Kyoiku. Daigaku，Section A，1954，4,109—116，317—318)在典型域$R_I=\{I-Z\bar{Z}'>0$，Z为$m\times n$复矩阵$\}$中定义度量$\|Z\|=\text{l. u. b}\left\{\frac{u'ZZ'\bar{u}'}{u\bar{u}'}\right\}^{\frac{1}{2}}$，而证明$f:R_I\to R_I$是解析的，且$f(0)=0$时有$\|f(Z)\|\leqslant\|Z\|$。王大明(毕业论文，1962)证明这样定义的度量$\|Z\|$就是$R_I$域的由原点到Z点的Carathéodory度量，因此上面结果是包含于Carathéodory的Schwarz引理之中。

如果我们把Schwarz引理看作是单位圆B内解析的有界函数的一阶导数的估值，即若$f(z)$在B内解析，且$|f(z)|\leqslant M$，则有

$$\left|\frac{df(z)}{dz}\right|\leqslant M\frac{1}{1-|z|^2},\tag{5}$$

其中$\frac{1}{1-|z|^2}$是Poincaré度量ds中$|dz|$的系数。

在C^n的有界域D中存在Bergmann核函数$K(z,\bar{t})$，由此可以定义Bergman度量

$$ds^2=dz\,T(z,\bar{z})d\bar{z}',T(z,\bar{z})=\left(\frac{\partial^2\log K(z,\bar{z})}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}\right)^{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n}.$$

这个度量有很好的性质，它是内蕴的，并且是实解析的。对于这个度量，形式(5)的Schwarz引理可以推广为：若$f=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$是在C^n的有界域D内解析，且$f(z)\overline{f(z)}'\leqslant M^2$，则必有

$$\frac{\partial f}{\partial z}\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}'\leqslant M^2T(z,\bar{z})\tag{6}$$

(陆启铿，数学学报，1957，7，370—420)，这里$A\leqslant B$表示方阵$B-A$是正定的。由此可以推出：若D是C^n中有界域并且可递，则存在一仅与D有关的正数$K_0(D)$ ($\geqslant1$)使得当f：$D\to D$是解析，有

$$f^*ds^2\leqslant k_0(D)ds^2.\tag{7}$$

$k_0(D)$是一解析不变量。在典型域的情形，$k_0(D)$的值皆可计算出来，并且$k_0(D)=1$的充要条件为D是超球。由此可见一般地Bergman度量不是距离缩小的。1966年A. Korànyi证明在典型域的情形，$k_0(D)$等于对称空间的秩。1967年小林(S. Kobayashi，J. Math. Scc. Japan)证明：如R是典型域，其全纯曲

率$\geqslant -A$，而F是一Kaehler流形，其全纯曲率$\leqslant -B$(A,B为正数)，则对任一解析映照f：$R\to F$ 有 $f ds^2{}_F\leqslant\frac{A}{B}ds^2{}_R$．这是把曲率与Schwarz引理联系起来，证明的方法也是推广Ahlfors所证明的Schwarz引理方法。最初想把Ahlfors结果推广到多复变数的是Dinglas(Fostschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass，1966，477—494)及陈省身(Proc. Symposia in Pure Math.，1968，Vol 11，157—170)。他们证明：若B^n是单位超球，F是Hermite-Einstein流形，其标量曲率$\leqslant -2n(n+1)$，则对任一解析映照f：$B^n\to F$是体积缩小的。丘成桐(1975，Summer Institute，Shing—Tung Yau)证明更一般的情形：设F是完备的Kaehler流形，其Ricci曲率大于一负常数，A是一Hermite流形，其全纯双截曲率小于一负常数，则对任意解析映照f：$F\to N$恒有$f^*ds^2{}_N\leqslant k ds^2{}_F$，其中k是只与F及N的曲率有关的常数。

小林(J. Math. Soc. Japan，1967，19，460—480)在一复流形F上如下地引进一伪度量：设$a,b\in F$，任一F的点串$p_0=a,p_1,\cdots,p_{k-1}$，$p_k=b$称为由a到b的链，如果有一串映单位圆B入F的映照$f_1,\cdots,f_k$及B的两点串$a,\cdots,a_k$与$b_1,\cdots,b_k$，使得$f_i(a_i)=p_{i-1}$，$f_i(b_i)=p_i$，$i=1,\cdots,k$．命

$$K_F(a,b)=\inf[E(a_1,b_1)+\cdots+E(a_k,b_k)],$$

inf是对所有可能的链。这是一伪度量，即满足所有度量的性质，除了$K_F(a,b)=0$未必有$a=b$。设F与N皆是复流形，f：$F\to N$是解析，则$K_N(f(a),f(b))\leqslant K_F(a,b)$．即小林伪度量是距离缩小的。如果F上的小林伪度量是真正的度量，即$K_F(a,b)=0$充要条件为$a=b$，则称为双曲流形。关于双曲流形已经有许多结果(陈志华同志另有报告，亦可参阅S. Kobayashi，Bull. Amer. Math. Soc.，1976，82，357—416)这里从略。

还有其它的人寻求距离缩小的度量，如Chern—Levine—Nirenberg(Global Analysis，1969，119—139)定义了新的距离缩小度量，但应用较少。

如Carathéodory度量一样，小林度量一般不是可微分的，故不能用两点无穷接近的方法直接定义微分度量(如果能够，自然有体积缩小)。于是Reiffen(Math. Ann. 1965，161)另外定义Carathéodory微分度量：

$$C_D(z,\dot z)=\sup_{f\in\varepsilon(D)}\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}\dot z_\alpha\right| \qquad (7')$$

其中$\dot z$属于D的z点的切空间$T_z(D)$。Royden(Several Complex Variables Ⅱ. Lecture notes in Math. 185，125—137)定义小林的微分度量为

$$F_F(z,\dot z)=\inf 1/R, \qquad (8)$$

其中R取所有实数，使得存在解析映照$\varphi(u)$把半径R的圆$|u|<R$映入F适合$\varphi(0)=z$，$\dot z=\frac{d\varphi(0)}{du}$．对于这些微分度量在解析映照下的距离是缩小的，然而一般地这些微分度量不能书为微分几何的微分度量$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}h_{\alpha\bar\beta}\dot z^\alpha\dot{\bar z}^\beta$的形式，故仍不能直接由此得出体积缩小的结论。

如设法定义一些距离缩小的度量一样，有人设法定义一些体积缩小的测度。D. A. Pelles(Amer. J. Math.，1975，97，1—15)在复流形F上如下定义测度：命$\lambda_n(E)$为单位超球B^n上的点集E的非欧体积，即$\lambda_n(E)=\int_E\frac{dv}{(1-zz')^{n+1}}$其中dv为欧氏体积元素。设A为复流形F的子集。命$A_i(i=1,2,\cdots)$为$B^n$中如此的子集，使得对应有一串$f_i$：$A_i\to F$适合$A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}f(A_i)$．命A的测度为

$$\mu_F(A)=\inf\left\{\sum_i\lambda_n(A_i)\right\}.$$

若f是映F入复流形N的解析映照，则体积缩小，即$\mu_N(f(A))\leqslant\mu_F(A)$。

最近国外有一种趋势是把 Schwarz引理推广到实的情形，最初是 Kierman (Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 148, 185—197). 考虑 Riemann 曲面的K拟共形映照的 Schwarz 引理，例如，若w：B→B是单位圆的拟解析映照，则有$|w(z_1)-w(z_2)|\leqslant 16|z_1-z_2|^{\frac{1}{K}}$，$z_1, z_2 \in B$. 后来被人推广到实n维 Riemann流形的调和K拟共形映照(J. Math. Jokushima Univ., 1971, 5, 17—23). 陈省身与 Goldberg 曾讨论在一定条件下调和映照是体积缩小的(Amer. J. Math. 1975, 97, 133—147). 接着 Goldberg—Ishihara 讨论了在什么条件下调和K拟共形映照是距离缩小。

若在(5)式中把 Schwarz 引理看作是映照函数f的一阶微分估值，而命dS表Poincaré度量，则(5)能写为

$$\left|\frac{df(z)}{ds}\right|\leqslant M, \tag{9}$$

而(6)亦可相应地书为

$$\sum\left|\frac{df_\alpha(z)}{ds}\right|^2\leqslant M, \tag{10}$$

其中ds是Bergman度量，$f=(f_1,\cdots,f_n)$ 是映照函数。自然要问，高阶微分的估值是什么？但我们知道$\frac{d^2f(z)}{ds^2}$不是在解析映照下协变的，而要引进协变微分或固有微分使之协变。实际上，固有微分的概念在单复变函数论中是曾经不自觉地应用过，不过似乎还未有人指出过这就是微分几何上的固有微分(intrinsic derivative). 例如考虑单位圆上的单叶函数$f(z)$时，习知有不等式

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leqslant\frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

(例如见Hayman, Multivalent functions, 1958, 公式(1.6)), 此即

$$\left|f''(z)-\frac{2\bar{z}}{1-|z|^2}f'(z)\right|\leqslant\frac{4|f'(z)|}{1-|z|^2}.$$

左边绝对值中的表达式其实就是$f(z)$的二阶固有微分$\frac{\delta^2 f(z)}{\delta s^2}$，则上式能书为

$$\left|\frac{\delta^2 f}{\delta s^2}\right|\leqslant 4\left|\frac{\delta f(z)}{\delta s}\right|.$$

由此可见，上式是共形映照下不变的。如果$f(B)$是一凸域，此不等式可以改进为

$$\left|\frac{\delta^2 f}{\delta s^2}\right|<2\left|\frac{\delta f}{\delta s}\right|.$$

(例如见Ahlfors, Conformal Invariant, 定理I.5)

在C^n的有界域D中我们可利用 Bergman 的核函数$K(z,\bar{t})$来定义固有微分，而把一阶本性微分的估值(10)式推广到高阶的固有微分的估值得出

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left|\frac{\delta^m f_\alpha}{\delta s^m}\right|^2\leqslant\frac{M^2}{K(z,\bar{z})}$$

$$\int_D\left|\frac{\delta^m K(z,\bar{t})}{\delta s^m}\right|^2 dv_t. \tag{11}$$

(陆启铿：有界域解析映照的固有微分的估值，科学通报，1978). 当$m=1$上式即(10)式。

如果我们以$\dot{z}=\frac{dz}{ds}$及以

$$F_m(z,\dot{z})=\left[\frac{1}{m!\,m!\,K(z,\bar{z})}\times\int_D\left|\frac{\delta^m K(z,\bar{t})}{\delta s^m}\right|^2 dv_t\right]^{\frac{1}{2m}}$$

来定义一 Finsler 几何，利用不等式(11)可以证明Carathèodory微分度量

$$C_D(z,\dot{z})\leqslant\lim_{m\to+\infty}F_m(z,\dot{z}).$$

特别在典型域的情形

$$C_D(z,\dot{z})=\lim_{m\to+\infty}F_m(z,\dot{z})=\overline{\lim_{m\to\infty}}F_m(z,\dot{z})=F_D(z,\dot{z}),$$

即小林与Carathèodory微分几何皆是此Finsler几何的极限情形。看来对于一般的有界域D，似有$\overline{\lim_{m\to\infty}}F_m(z,\dot{z})\leqslant F_D(z,\dot{z})$，但是对此还未能证明。

另一未解决的问题是，什么样的有界域D的核函数$K(z,\bar{t})$，$(z\in D,\ t\in D)$没有零

点？这个问题对于解析映照是十分重要的。我们知道有界域的许多具体例子的核函数没有零点(陆启铿，数学学报，1966，16，269—281)。Shwarzcynski(Proc. Amer. Math. Soc.，1966，16)称$K(z, \bar{t})$无零点的域为L域。他证明如果有一串域$D_m \subset D$迫近有界域D，当每一D_m是L域时，D必是L域。但他指出n=1时圆环$0<r<|z|<1$不是L域，接着Rosenthal(Proc. Amer. Math. Soc.，1969，21，33—38)证明在n=1时如果D是双连通并且是L域，则必解析等价于挖去一点的圆。Matsura (Proc. J. Math.，1973，49，405—424)证明有界的完备的圆型域必定是L域。Suita—Yamada (Proc. Amer. Math. Soc.，1976，59，222—224)证明非单连通的有限的Riemann曲面不是L域，现在主要问题是单连通的有界域或再加条件，同时是拟凸域（n>1）时（Greene—Wu，Function theory on manifolds which possess a pole，Lecture Notes，in Math.)是否是L域？

关于双曲流形与全纯映射

陈 志 华 （中国科学院数学研究所）

本文是对近年来出现的多复变函数论的一个被称之为“双曲流形”的新的分支和另一个近年来在多复变函数论中有较大进展的值分布理论分支(一般人通称全纯映射理论)作一最简单介绍。

一、双曲流形的定义与基本性质

众所周知在单复变函数论中，有一个十分重要的结果——Schwarz引理，它是单复变函数论中一个十分有用、十分深刻的结果，古典的函数论的叙述为：D是C^1中的单位圆，f是D上的全纯函数，$f(0)=0$，而且$|f(z)|<1$在D上成立，则$|f(z)|\leqslant|z|$。此引理有另一个用几何语言表达的方式为：单位圆D上有一个微分度量$ds^2=\frac{1}{(1-|z|^2)^2}dz\otimes d\bar{z}$，它决定了D上的一个距离$\rho$，D关于距离$\rho$是完备的，而Schwarz引理就是对$\forall f\in Hol(D,D)$ (Hol(M,N)表示由M到N的全纯映射全体所成的集)与$\forall a,b\in D$，有$\rho(f(a),f(b))\leqslant\rho(a,b)$。S. Kobayashi就是企图在一般的复流形上找到类似于D中距离ρ那样的距离，使Schwarz引理成立。S. Kobayashi [1] [2] 在1967年明确的提出双曲伪矩的概念。

设D是一个单位圆(C^1中)，M是一个复流形，对M中任何两点p,q，如能存在一串$p=p_0$，$p_1,\cdots$，$p_r=q$与a_1，$b_1,\cdots$，$a_r,b_r\in D$，以及$f_1,\cdots,f_r\in Hol(D,M)$，使

$$
\begin{array}{ll}
f_1(a_1)=p_0; & f(b_1)=p_1,\\
f_2(a_2)=p_1; & f_2(b_2)=p_2,\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots,\\
f_r(a_r)=p_{r-1}, & f_r(b_r)=p_r,
\end{array}
\quad (1.1)
$$

这样的$\{(p_i)\ (a_i,b_i)\ (f_i)\}$就称为连接p，q的全纯链，每个这样的全纯链，对应一个非负数$\sum_{i=1}^{r}\rho(a_i,b_i)$，定义$d_M(p,q)=\inf\sum_{i=1}^{r}\rho(a_i,b_i)$，这里inf是对所有连接p,q的全纯链取的。从定义易于验证d_M是一个伪

矩，亦有人称其为S. Kobayashi伪矩。

下面我们来看这个伪矩的一些最基本性质。

命题1 设 M,N是二个复流形，f：$M \to N$；$f \in Hol(M,N)$，则对 $\forall p,q \in M$，必有

$d_N(f(p),f(q)) \leqslant d_M(p,q)$.

命题2 对C^1中的单位圆，有 $d_D = \rho$.

命题3 设M是一个复流形，在其上有一个伪矩d'_M，它对$\forall f \in Hol(D,M)$与$\forall a,b \subset D$有

$\rho(a,b) \geqslant d'_M(f(a),f(b))$,

则$d'_M \leqslant d_M$.

定义 一个复流形M，如 $d_M(a,b)=0$之充要条件是$a=b$，则称M为双曲流形。亦即当伪矩 d_M 成为一个真距离时，称M为双曲流形。一个双曲流形 M关于距离 d_M 是完备的，就称M为完备双曲流形。

可以验证当 M为双曲流形时，d_M 所决定的拓扑与M原来的拓扑是一致的。

对于 C^1中的单位圆D, $d_D=\rho$,而D关于ρ是完备的，因此 D是完备双曲流形。对于一个一般的复流形要从 d_M 的定义直接去判断它是否双曲？是否完备双曲，这是很困难的。下面的一些命题可以供给我们一批双曲流形与完备双曲流形的实例。

命题4 (a)两个复流形 M_1, M_2，如果全纯同构，则必同时为双曲(完备双曲)。

(b)两个复流形$M_1 \subset M_2$，如M_2双曲，则M_1亦然。

(c)两个复流形M_1、M_2，$\forall p_1,q_1 \in M_1$；$p_2,q_2 \in M_2$，则有

$d_{M_1}(p_1,q_1)+d_{M_2}(p_2,q_2) \geqslant d_{M_1 \times M_2}$;
$((p_1,p_2),(q_1,q_2)) \geqslant Max(d_{M_1})(p_1,q_1)$,
$d_{M_2}(p_2,q_2))$.

由(c)知道，如M_1, M_2双曲(完备双曲)，则$M_1 \times M_2$亦然。

设$\tilde{M}$, M是两个复流形，f：$\tilde{M} \to M$；$f \in Hol(\tilde{M}, M)$，且$f(\tilde{M})=M$，对$\forall m \in M$，存在m的一个开邻域U，使$\pi^{-1}(U)$的每一连通分支与U在f之下同胚。则称$(\tilde{M},f,M)$是一个全纯复盖，或者说$\tilde{M}$是 M的一个全纯复盖。

命题5 f：$\tilde{M} \to M$ 是一个全纯覆盖，则$\tilde{M}$是(完备)双曲当且仅当M是(完备)双曲。

如 $M=p^1-\{$ 3个点 $\}$，则其有万有覆盖是单位圆，因此$p^1-\{$ 3个点 $\}$是完备双曲流形。

命题6 (E,F,π,M) 是以F为纤维，M为底的全纯纤维丛，则当F和M是(完备)双曲时，E亦是(完备)双曲。

(关于纤维丛的定义见一般近代的微分几何书)

命题7 一个(完备)Hermite 流形M，如它的全纯截曲率有一个负常数上界，则M是(完备)双曲。

(关于Hermite几何的基本性质可见于陆启铿[3]之附录或其他微分几何书)

上面的定义与命题都是对M是复流形陈述的，事实上M的正则性是不重要的，因此这些定义与命题对于复空间也都成立，关于复空间的定义见 R. C. Gunning, H. Rossi[4]。这七个命题，从双曲伪矩的定义出发不难给出证明。

有一类流形，它的双曲伪矩特别简单，即对任何两点的双曲伪矩都是零，这类流形称为双曲平凡的。最简单的例子是C^1、C^n，因为 D内0点与0任意相近的点均可以一个全纯映射映成 C^n上任意两点，因此 C^n 中任两点之双曲伪矩可以小于一个任意小的正数，因此必为零。由 $P^n \supset C^n$，故 $d_{P^n} \equiv 0$，另外 $C^1-\{0\}$，$C^n-\{0\}$ 亦是双曲平凡的，因为 exp：$C^1 \to C^1-\{0\}$ 是一个满全纯映射，因此$d_{C^1-\{0\}} \equiv 0$, $d_{C^n-\{0\}} \equiv 0$亦为显然。另外在紧Riemann曲面中，当亏格 $g=0$时，它就是P^1；$g=1$时，是环面，它以 C^1 为万有覆盖，因此都是双曲平凡的，但对$g \geqslant 2$时，可以证明此时紧Riemann 面是完备双曲的。

二、双曲流形的若干函数论性质

任何一本单复变函数论的书上，都会提到特别精彩的小Picard 定理：在 C^1 上定义的全纯(亚纯)函数，如不取两个(三个)以上的值，则这个函数必是常数。将它改书为全纯映射的语言，即为 f：$C^1 \to P^1-\{$ 3个不同的点 $\}$ 的全纯映射必为常数。从双曲流形的观点来看 C^1 是双曲平凡的，而 $P^1-\{$ 3 个不同的点 $\}$ 是双曲流形，自然想到应该有

定理1 f：$N \to M$，N、M为两个复流形，$d_N \equiv 0$，M为双曲，$f \in Hol(N, M)$，则 f 必为常数。

证明：$\forall a, b \in N$, $d_M(f(a), f(b)) \leqslant d_N(a, b) \equiv 0$. 因此由M为双曲，故 $f(a)=f(b)$.

这个用两句话证明的多复变数的第一个较一般的小Picard定理是在单复变函数的小Picard定理发现后九十年才得到的。定理 1 的最简单情况就是单复变的小Picard定理，但是定理 1 究竟给了我们多少东西，取决于对双曲平凡流形与双曲流形的了解程度。作为小Picard定理的形式推广，自然还提出全纯映射 f：$C^m \to P^n-\{$ $2n+1$个居最广位置的超平面 $\}$或 f：$C^m \to P^n-\{$ $2+n$ 个居最广位置的超平面 $\}$ 是否是退化或常值？M. L. Green[5]和M. Fujimoto[6]都在1972年证明了如下结果：全纯映射 f：$C^m \to P^n-\{$ $n+k$ 个居最广位置的超平面 $\}$，则 $f(C^m) \subset [n/k]$ 维的投影子空间中。这就回答了上面的问题，即 $k=2$ 时，$f(C^m)$ 是在 P^n 的真子空间中；当 $k=n+1$ 时，$f(C^m)$ 就是一点。显然，如果我们知道 $P^n-\{$ $2n+1$ 个居最广位置的超平面 $\}$是一个双曲流形，则由定理1，自然得出问题一半之解，但这个事实是 1973 年[7][8]中才得以证明。

任何一个复流形M，如对 $\forall f \in Hol(C^1, M)$ 必为常值，则称M不允许复直线。定理1说明每个双曲流形是不允许复直线的；但是反之则不然，这有 D. Eisenman和L. Talor 给出简单的例子。$M=\{(z,w) \in C^2;\ |z|<1, |zw|<1\}-\{(0, w);\ |w| \geqslant -\}$，任何的 $f=(f_1, f_2)$：$C \to M$的全纯映射一定是常值，同时亦不难证明M不是双曲的。

经典的单复变函数论的大 Picard 定理是：$f(z)$在$0<|z|<R$ 全纯，如果不取两个以上的有限值，则0点必不是 f 的本性奇点，即0或为 f 的可取奇点，或为极点。今改叙为全纯映射的语言，即为 f：$0<|z|<R \to P^1-\{$ 3 个不同点 $\}$之全纯映射，则 f 必可扩充为 $\bar{f}$：$D_R=\{|z|<R: z \in C^1\} \to P^1$.

现在自然想靠助双曲流形来推广大Picard 定理，最理想的推广自然是 f：$X-A \to M \subset Y$是全纯映射，其中X是一个复空间，A是X的一个复子空间，M 是双曲流形，它在复空间 Y 中是相对紧的，则 f 可以扩充为全纯映射 $\bar{f}$：$X \to Y$. 但是事实上并没有那么乐观的结果，而只是在某些具体条件下，我们才能扩充。下面我们引进一些必需用到的概念。

定义 Ω是C^n中的一个域，S是Ω中的一个子集，如对任何$a \in \Omega$，都存在一个 a 的邻域 N_a，使$S \cap N_a$正好是在 N_a 上定义的有限个全纯函数 $f_1, \cdots, f_p$的公共零点。此即

$$S \cap N_a=\{z \in N_a | f_1(z)=f_2(z)=\cdots f_p(z)=0\}.$$

易证S是Ω中的闭子集。当 $S \neq \Omega$时，$\Omega-S$在Ω中稠，且 $\Omega-S$为连通集。这个S就称为解析集。

复空间、复子空间的概念请参看文献〔4〕，简单的讲复空间就是一个拓扑空间，其局部同构于一个解析集。

定义 $M \subset Y$，M在Y中相对紧，Y是一复空间，M是一双曲复空间，今$\{p_n\}$，$\{q_n\} \in M$的两个点列。如$d_M(p_n, q_n)$不趋于零，当$\{p_n\}\{q_n\}$趋于$\bar{M}$的不同点时，就称M是双曲嵌入于Y的。

最简单的双曲嵌入的例子是 $Y=P_1$

(C)，$M=P_1(C)-\{$ 3个不同点 $\}$，文献〔7〕〔8〕中亦证明$M=P_n(C)-\{$ $2n+1$个居最广位置的超平面 $\}$是双曲嵌入于$Y=P_n(C)$。

关于大Picard定理有如下几种推广

定理2 $f: D^*=D-\{0\}\to M\subset Y$，$\forall f\in Hol(D^*,M)$，M是双曲嵌入于Y，则$f$可扩充为$\hat{f}: D\to Y$。

定理2之中取$Y=P_1(C)$，$M=P_1(C)-\{$ 3个不同点 $\}$，就是经典的大Picard定理。

M.M.Kwack[9]证明了$f: X-A\to M$，M为紧双曲流形，X是一个复流形，A是一个$\mathrm{codim}_x A\geqslant 1$的解析集的情况与当M是完备双曲流形，而$\mathrm{codim}_x A\geqslant 2$时的情况。当M用紧复空间代替流形时，上述结果亦真。

P.Kiernan[10]在1973年进一步证明了

定理3 $M\subset Y$，M为双曲复空间且双曲嵌入于复空间Y，$\{f_k\}\in Hol(D^*,M)$，$\{z_k\}\{z'_k\}\in D^*$是两个不同点列，$z_k\to 0$，$z_k'\to 0$而且$f_k(z_k')\to q\in Y$，则有

(i) $f_k(z_k)\to q$,

(ii) $f_k: D^*\to M$可全纯扩充为$\hat{f}_k: D\to Y$,

(iii) $\hat{f}_k(0)\to q$。

定理4 A是流形X上闭复子空间，如A是正规截的(即局部$X-A$可同构于$(D^*)^n\times D^l$)，则任何$f: X-A\to M\subset Y$(M,Y之条件如定理3)的全纯映射可扩充为$\hat{f}: X-A\to Y$的全纯映射。

下面的例子说明，当M非紧时正规截的条件是必要的。

$M=D\times\{C-(1,-1)\}\subset P_1(C)\times P_1(C)$，这个M是双曲嵌入于$P_1(C)\times P_1(C)$，现在$X=D\times D$，而

$A=\{(z,w)\in D\times D|z=0\}\cup\{(z,w)\in D\times D|z=\pm w\}$。

今定义$f: X-A\to M$ $f(z,w)=(z,w/z)$，这个f无法扩充到整个X上，因无法定义$\hat{f}(0,0)$，使$\hat{f}$为连续。

单复变函数论另一个重要的结果是Montel的正规定则：$\{f_i\}_{i\in I}$是在C^1的一个域Ω上定义的全纯函数族，而且都不取两个有限值a,b，则$\{f_i\}_{i\in I}$是一个正规族（即$\{f_i\}_{i\in I}$之任一序列或是有子序列在Ω内一致收敛或是一致发散于∞）。将Montel正规定则改叙为全纯映射的语言，即为$\{f_i\}_{i\in I}$ $:\Omega\to P^1-\{$ 3个不同点 $\}$的全纯映射族$\{f_i\}_{i\in I}$之任一序列$\{f_n\}$或是有收敛子序列或是一致地发散(在这里一致发散是指一致地趋于P^1中所除去的那三个点)

关于正规定则在多复变函数中的推广，最值得提的是Wu H.[11]在1967年的工作。他首先引进了"紧发散"的概念来描叙映射序的发散情况。

定义 $\{f_n\}: M\to N$，$\{f_n\}\in Hol(M,N)$，M，N均为复空间，如果对M中之任一紧集K与N中任一紧集K_1，能找到一个正整数n_0，当$n>n_0$时，永有$f_n(K)\cap K_1=\phi$，就称$\{f_n\}$是紧发散的。

他又定义了紧绷空间(Taut space)的概念。

定义 如N是一个复空间，对任何一个复空间，如$Hol(M,N)$中之任一序列$\{f_n\}$，它或是有子序列收敛于$Hol(M,N)$的一个元素或是紧发散，就称N是一个紧绷空间。

这里$Hol(M,N)$中引进的拓扑就是通常的紧开拓扑，紧绷空间的定义即使$Hol(M,N)$成为正规族的空间N（对于任意的复空间M）。

定理5 如果复空间是连通、局部紧的完备双曲复空间，则是紧绷空间。

H.Wu[11]又引进了紧密复空间(Tight complex space)的概念。

定义 设N是一个复空间，d'是N上一个与N的拓扑等价的距离，如果对任一复空间M，$Hol(M,N)$是等度连续的，则称N为紧密复空间。

等度连续是指对任给的$\varepsilon>0$，$\forall m\in M$，必存在一个m的邻域U，使$\forall m'\in U$，$\forall f\in Hol(M,N)$均有$d'(f(m),f(m'))<\varepsilon$。

定理 6 如N是双曲复空间，则(N,d_N)是紧密的。反之，如果(N,d')是紧密的，则N必为双曲。

上面我们简单陈述了大Picard定理、小Picard定理与正规定则的推广。这些定理在单复变中成立都是基于 $P^1-\{3$ 个不同点$\}$这个空间的性质，但是这个空间不仅是双曲，而且完备双曲与双曲嵌入于$P^1(C)$，在单复变讨论中这些性质的差异并不显著，而在这里我们知道双曲性质可以推出小Picard定理，双曲嵌入是推广大Picard定理的一个不可少的条件，完备双曲决定了正规定则的成立。这些概念之间的关系大部分已有讨论，有人猜想完备双曲与紧缩空间等价，但是至今未能证明，也未能枚举反例。

在这一节的最后我们要提及一个重要的事实，象D、D^*这种最简单的流形，它们的双曲矩离在一定程度上可以计算出来，但是一般未必有那样好的结果，Royden[12]证明对任一复空间，其之双曲伪矩可以由一个广义Finsler伪度量所决定（设X是一个复空间，$T(X)$表示X上的切丛，G是定义在$T[X]$上一个非负可测函数，而且对任一$v\epsilon T(X)$，有$G(\lambda v)=|\lambda|G(v)$，$\forall\lambda\epsilon C^1$，就称G为一个广义Finsler伪度量），双曲伪矩的Finsler伪度量$F_X(v)$定义如下：对$\forall v\epsilon T[X]$

$$F_X(v)=\inf_{f\in Hol(D,X)}\{\|u\|:u\epsilon T(D),\ f_*(u)=v\},$$

$\|u\|$表示$T(D)$中之元u，以D之Schwarz-Pich度量来度量u的长度。Royden[12]证明$F_X(v)$是$T(X)$上之上半连续函数，而且其决定双曲伪矩。这个结果的证明后来为S. Kobayashi[13]所简化，$F_X(v)$就称为X之双曲伪矩的无穷小形式，这是一个十分重要的问题，但是至今所知甚微。

以上是关于双曲流形的最简单的介绍，主要是函数论性质，如有进一步的兴趣可参阅S. Kobayashi[14]的一篇综合性文章与他写的一本书[15]。

三、关于全纯映射

现在一般都用“全纯映射”表示研究多复变函数的值分布理论，单复变的值分布理论已经有十分丰富与深刻的内容，但是多复变函数论的值分布的理论还是处在极不成熟的状态，虽然这个问题几乎与单复变的值分布理论同时开始有人探讨，早在1922年P. Fatou[16]，1933年L. Bieborbach[17]都给出了一个从$C^2\to C^2$的全纯映射f在C^2上无处退化，但是$C^2-f(C^2)$的测度不为零，这个例子说明与单复变的小Picard定理有完全不同的性质，亦是说明多变数的值分布与单变数的值分布有本质区别。在R. Nevalinna[18]给出他的著名的第一基本定理与第二基本定理之后不久，L. V. Ahlfors[19]和T. Shimizu[20]给出一个有几何意义的特征函数$T_0(f,r)$（它与R. Nevalinna所给出的特征函数$T(f,r)$，当$r\to+\infty$时，只差一个常数），它在多复变函数的值分布理论中起了重要的作用。考虑多复变函数论的值分布理论，首先希望得到类似于R. Nevalinna的第一基本定理与第二基本定理的结果，一直到1960年，陈省身[21]第一个得到了多复变数的第一基本定理，陈的结果是：f：$C^m\to P^m$是全纯映射，如果f满足

(1) $T_0(r)\to+\infty$，当$r\to+\infty$

(2) $\displaystyle\int_{r_0}^{r}\frac{v_1'(t)}{t^{2m}}dt=O(T_0(r))$，

则$P^m-f(C^m)$之测度为零。这里

$$(3.1)\quad T_0(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{v_0(t)}{t^{2m-1}}dt,\quad v_k(t)=\int_{B_t}f^*\Omega^{m-k}\wedge\Omega_0{}^k,$$

B_t是C^m中半径为t的超球，Ω_0是C^m上欧氏度量所对应的二次形式$\Omega_0=\dfrac{\sqrt{-1}}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}d\zeta_i\wedge d\bar{\rho}_i$（$\rho_i$是$C^m$中的欧氏座标），现在较详细的解释一下$\Omega$，m维复投

影空间P^m上有一个Fubini—Study度量

$$ds^2=\frac{1}{\langle Z,Z\rangle}\left\{\langle Z,Z\rangle\langle dZ,dZ\rangle-\langle dZ,Z\rangle\langle Z,dZ\rangle\right\},$$
这里$Z=(z^0,\cdots,z^m)\in P^m$；$\langle Z,w\rangle=\sum_{i=0}^{m}z^i\bar{w}^i$，这个$ds^2$对应一个二次形式

$$\Omega=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{1}{\langle Z,Z\rangle^2}\left\{\langle Z,Z\rangle\sum_{i=0}^{m}dz^i\wedge d\bar{z}^i-\left(\sum_{i=0}^{m}dz^i\bar{z}^i\right)\wedge\left(\sum_{j=0}^{m}d\bar{z}^jz^j\right)\right\}=\frac{\sqrt{-1}}{\pi}d'd''\log|Z|=dd^c\log|Z|,$$

其中$d'=\sum_{i=0}^{m}dz^i\frac{\partial}{\partial z^i}$；$d''=\sum_{i=0}^{m}d\bar{z}^i\frac{\partial}{\partial\bar{z}^i}$；

$d=d'+d''$；$d^c=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(d''-d')$和$|z|=\langle z,z\rangle^{1/2}$。

(3.1)中所定义的$T_0(r)$，当$m=1$时就是L.V.Ahlfors所定义的特征函数。陈省身之文的主要点是设法表示出奇异链$f(B_r)$与A之相交数$n(r,A)$（这里$A\in P^n$，表示P^n之一点）

$$(3.2)\quad n(r,A)-v_0(r)=\int_{f(\partial B_r)}\Lambda.$$

这里Λ是一个$2n-1$次形式，其之作用相当于单复变值分布中产生$m(f,r)$的项。

1968—69年伍鸿熙[22]推广了陈的结果，证明非积分的第一基本定理在更广的范围存在（即(3.2)）。

关于开Riemann曲面到P^n（或到Grassmann流形）已有较好的结果，可在文献[23][24][25]中找到，这个结果可以用来得f：$C^m\to P^n$的全纯映射的第一基本定理。设ξ表示C^m中过原点的一条复直线，则C^m中所有这样的复直线构成一个P^{m-1}，现在将f限制在ξ上，就得到f_ξ：$C^1_\xi\to P^n$的一个全纯映射，对它应用已有的结果得到第一基本定理。再对ξ积分就可以得到f的第一基本定理。关于较详细的证明见之于P.Griffith和J.King[26]。关于从C^n到P^n的全纯映射的第二基本定理，这十几年来也有不少人作尝试，其中较成功的是J.Carlson和P.Griffith[27]的工作，他们得到f：$C^n\to P^n$的全纯映射的亏量公式$\sum_i\delta(A_i)\leqslant n+1=\chi(P^n)$，这里$A_i$是$P^n$中居最广位置的超平面。文献[26][27]都是对一般的代数流形到一般的投影代数流形作的第一、第二基本定理，内容极为丰富，而且还有在代数几何的应用是值得对全纯映射有兴趣的读者一读。这十几年国外从事全纯映射研究的人不少，发表的文章数量亦甚多，由于篇幅所限这里只是提到极少的几篇笔者认为特别有价值的。另外W·Stoll长期从事多复变数的值分布理论，在1970年他所写的一本书[28]详细地总结了他个人的工作，另外最近他又发表了一篇综合性文章[29]值得有兴趣于这方面的同志参考。

参 考 文 献

〔1〕S.Kobayashi, J.Math. Soc.Japan, 19(1967), 481—485.

〔2〕S.Kobayashi, J.Math. Soc.Japan, 19 (1967), 460—480.

〔3〕陆启铿，典型流形与典型域，上海科技出版社，1963.

〔4〕R. C. Gunning; H. Rossi, analytic Functions of several complex variables, Printice-Hall series in Modern Analysis, 1965.

〔5〕M. L. Green. Trans. Amer. Math. Soc., 169(1972), 89—103.

〔6〕H. Fujimoto, Tôhoku Math. J.24 (1972), 415—422.

〔7〕P.J.Kiernan; S.Kobayshi, Nagoya Math.J., 50(1973), 199—216.

〔8〕H. Fujimoto, J.Math. Soc. Japan, 25(1973), 235—249.

〔9〕M. H. Kwack, Ann. Math., 90 (1969), 9—22.

〔10〕 P. Kiernan, Trans of A. M. S., 172(1973), 347—355.

〔11〕 Wu H., Acta. Math., 139 (1967), 193—233.

〔12〕 H. L. Royden, Lecture Notes in Math. Vol.185, 125—137.

〔13〕 S. Kobayashi, Tóhoku Math. J., (2)25 (1973), 481—486.

〔14〕 S. Kobayashi, Bulletin of A. M. S., Vol82, №3 (1976), 357—416.

〔15〕 S. Kobayashi, Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marcel Dekker, inc, New york, 1970.

〔16〕 P. Fatou, C. R. Acad. Sci. Paris, Vol 175, (1922), 1030—1033.

〔17〕 L. Bieberbach, Preuss. Acad. Wiss. Silzngsber, (1933), 476—479.

〔18〕 R. Nevalinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphics, Paris, (1929).

〔19〕 L. V. Ahlfors, C. B. 7 congr. Math. Scoda, Oslo, (1929), 84—88.

〔20〕 T. Shimizu, Jap. J. Math., 6, (1929) 119—171.

〔21〕 Chern. S.S, Ann. of Math. Vol71, №7 (1960)。

〔22〕 Wu H., J. Diff. Geom., 2 (1968), 197—202, J. Diff. Geom., 2 (1968) 369—384, J. Diff. Geom, 3(1969), 83—94, J. Diff. Geom, 3 (1969), 433—446.

〔23〕 H. Weyl, Meromorphic functions and analytic curves, Annals of Math. studies, №12, Princeton Univ. Press., 1943.

〔24〕 Chern S. S., Complex manifolds without potential theory, D. Van Norstand company, 1967.

〔25〕 Wu H., The equidistribution theory of holomorphic curves, Annals of Math. studies, №64, 1970.

〔26〕 P. Griffiths; J. King., Acta Math., 130 (1973), 145—220.

〔27〕 J. Carlson; P. Griffiths, Ann. of Math., (2) 95 (1972), 557—584.

〔28〕 W. Stoll, Lecture Notes in Math., 135.

〔29〕 W. Stoll, Bulletin of A. M. S., Vol32, №2, March(1977), 166—183.

C^n 中域的分类理论

许以超 (中国科学院数学研究所)

§1. 引言

C^n中域D_1到D_2上的一一对应σ: $w_j=f_j(z_1,\cdots,z_n)$, $1\leqslant j\leqslant n$称为同构，如果$f_1,\cdots,f_n$在D_1上全纯。当$D_1=D_2$，则称为自同构。显然同构是等价关系。域的分类理论指1.分类问题，即求出在这个等价关系下的全系不变量；2.实现问题，即在每个等价类中找出一个具有最简形状的标准域。这些问题是多复变函数论的基本问题之一。在n＝1时，问题已得到完整的解决。当n>1，这些问题远未解决。下面就介绍这方面的发展状况。

§2. C^2中域的分类理论

迄今关于C^n中域的分类工作，都是围绕着有界情形。在1935年H. Cartan证明了有

界域的(最大)自同构群G为有限维实李变换群，域中任一点p，点p之迷向子群H_p为G之紧子群。在$n=2$时，有界域D称为Thullen域（或简称T域），如果D中存在一点p，使$\dim G>\dim H_p$。已有的分类结果是完全解决了如下四类域的分类：T-Reinhardt域（P. Thullen 1930），T-圆型域(H. Cartan 1932)，T-半圆型域(许以超，王德霖 1977)，T-正(m,p)圆型域(许以超 1963)。关于一般情况如下：由于1907年Poincaré证明了C^2中单连通域双圆柱和超球互不同构，从而揭开了多复变函数论域的分类理论的序幕。从1907—1932年间，集中研究了C^2中有界域的分类。H. Cartan(1931，1932)定义了(m,p)圆型域，其中整数m,p有$m\geqslant|p|$；$m>0$，m,|p|互素。且证明了有界域D中若点p(不妨设它为原点)使迷向子群维数最大，同时它不可分解，即不同构于低维有界域的拓扑积，则存在同构，将它映为(多叶)有界(m,p)圆型域，或超球，或有界Reinhardt域，或僵域（迷向子群不连通，单位分量为零维），或死域（迷向子群连通，且零维）。Thullen及Cartan给出了各种类型单叶域之例。关于单叶的僵域及死域，及有界反圆型域，有界反(m,p)圆型域以及非Thullen的Reinhardt域，圆型域，半圆型域及正(m,p)圆型域等没有任何结果。所以即使在$n=2$的情形，分类理论没有什么进展。

§3. C^n中强拟凸域的分类

在$n\geqslant2$时除了利用自同构群G为实Lie群，É. Cartan在1935年还指出有界域的Bergman核函数$K(z,\bar z)$在分类理论中扮演了重要的角色。这是因为其伴随Kaehler型$\sum\frac{\partial^2\log K(z,\bar z)}{\partial z_i\partial\bar z_j}dz_i\otimes d\bar z_j$是Kaehler度量，从而可以运用复几何的工具。在$n\geqslant2$时，已有的分类结果都是关于拟凸域的。C^n中一域D称为拟凸的，结果它有界，且任取$z_0\in\partial D$，存在z_0的邻域U_0及U_0上C^2类函数$\varphi(z)$，使$D\cap U_0=\{z\in U_0;\ \varphi(z)<0\}$。且任取$q\in U_0$，$\operatorname{grad}\varphi|_q\neq0$，$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\bar z_j}\right)_q\geqslant0$。称为强拟凸的，如果$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\bar z_j}\right)_q>0$。这时可证存在$R^{2n}$上$C^2$类函数$\varphi(z)$，使$D=\{z\in C^n;\ \varphi(z)<0\}$。且任取$q\in\partial D$，$\operatorname{grad}\varphi|_q\neq0$，$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\bar z_j}\right)_q>0$。当$\varphi(z)$为多项式，则D称代数强拟凸域，当$\varphi(z)$解析或光滑，相应地D称解析或光滑强拟凸域。从1974年Fefferman及陈省身，Moser的工作发表以来，光滑强拟凸域的分类成为当前一个很引人注意的分支。Fefferman给出了光滑强拟凸域的Bergman核函数的渐近展开式$K(z,\bar z)=\varphi(z)^{-(n+1)}F(z)+(\log\varphi(z))G(z)$，其中F，G在$\bar D$光滑，F在$\partial D$附近无零点。利用这一结果Fefferman解决了这样一个古老的猜想：光滑强拟凸域的同构能光滑地开拓到边界，使成为边界上的光滑同构。这样一来，光滑强拟凸域的边界上的光滑不变量必为此域的解析不变量。从而引起了研究$2n-1$维实光滑强拟凸超曲面的必要性。

对强拟凸超曲面，在解析情形，当$n=2$早已被Poincaré（1907）注意到。B. Segre（1931），É. Cartan（1932）求出了$n=2$时强拟凸实解析超曲面的全系局部解析不变量。当$n>2$时，陈省身和Moser有了重大突破。他们从两个不同角度来研究。一是用标准超曲面在全纯映射下的像来逼近已知曲面，特别用二阶密切来建立已给曲面的标准形；另一个是在已给曲面上引进一主丛，且构造了一个Cartan联络，证明了陈-Moser定理：设M为C^{n+1}中实解析超曲面，在每点非退化，则在M上存在一个以H为结构群的主纤维丛，它有这样的Cartan联络，其值取在SU$(p+1,q+1)$之Lie代数中，这里$p+q=n$，且M的Levi型的符号差为$p-q$。M和M′间若解析等价，则它们的丛之间有一个保联络的同构（参看N. Tanaka 1962,1976）。后来，

H.Jacobowitz在1977年将这两种观点作了统一的处理。

具体类型强拟凸域的分类有两个结果。S.M.Webster（1977）从代数几何角度给出了C^n中椭球的完全分类。Burns—Shnider则证明了光滑强拟凸域同构于超球的几种等价条件：齐性、自同构非紧、自同构群有完全不连续子群Γ，使域模Γ紧。

§4.Cartan猜想

关于拟凸域分类，进展最大的是齐性有界域的分类。一域称为齐性的，如果存在自同构，将任一指定点映为一固定点。熟知齐性有界域为拟凸域。关于齐性有界域分类的第一个结果是É.Cartan在1936年给出了对称有界域的分类，除了两个例外域外，解决了实现问题。É.Cartan证明对称有界域齐性，且是典型域及两个例外域的拓扑积（一域称为对称，如果对此域中任一点，存在此域之自同构，以此点为孤立不动点，且α^2为恒等变换）。两个例外域的实现是M.Ise在1969年给出的。关于É.Cartan工作的简化，有三类工作，一是用Harish—Chandra在1956年从半单Lie群理论给出的存在性证明出发，在1964年J.A.Wolf给出了四大类的实现。一是Kaecher用1957年建立的实锥理论，用半单Jordan代数的分类给出了实现。一是我们在1965年用Bergman核函数给出存在性证明，且实现了四大类典型域。É.Cartan在1936年提出了一个著名的猜想：C^n中具有不变体积元素，其伴随Kaehler度量定正，则同构于对称有界域。从1936年到1959年间，关于分类理论没有任何进展，原因是人们都希望给出Cartan猜想是肯定的证明。1954年A.Borel证明了齐性有界域的自同构群若半单，则必对称。1955年L.Koszul独立地证明了Cartan猜想在自同构群半单时是肯定的。到1957年，Hano将半单条件放宽到幺模。同时，Koszul给出了具有不变体积元素的齐性复流形的自同构群G的Lie代数所适合的条件，从而引进了J.Lie代数的概念。在1959年Pjatetzki-Shapiro在n＝4，5时给出了Cartan猜想的反例。1963年Pjatetzki-Shapiro，Vinberg，Gindikin计算了J.Lie代数，从而证明了齐性有界域的(最大)自同构群同构于代数Lie群，且迷向子群为最大紧，又齐性有界域在三角Lie群下单可递（Lie群若同构于上三角方阵构成之Lie群，则称为三角群），从而证明了齐性有界域同构于齐性Siegel域。和Cartan猜想类似，华罗庚在1946年提出了齐性有界域的Bergman度量的全纯截曲率必取负值的猜想，这个猜想被陆启铿与许以超在1961年举出反例所否定。

§5.齐性Siegel域

设V为R^n中以原点为顶点的开凸锥，不包含整条直线，$F(u,u)=(f_1(u,u),\cdots,f_n(u,u))$，使$f_j(u,u)$在$C^m$上为Hermite型，且$F(u,u)\in\overline{V}$，$u\in C^m$；$F(u,u)=0$当且仅当$n=0$。则$D(V,F)=\{(z,u)\in C^n\times C^m; I_m(z)-F(u,u)\in V\}$称为Siegel域。当$F\equiv0$称为第一类，$F\not\equiv0$称为第二类。易证Siegel域同构于有界域。记$GL(V)$为$GL(n,R)$中使V映为自身的线性变换构成之闭子群。设存在Lie群$G\subset GL(V)$在V上可递，且任取$A\in G$，存在$Q\in GL(m,C)$，使$F(u,u)A=F(uQ,uQ)$，$u\in C^m$。则$D(V,F)$在$w=zA+\alpha+2\Gamma_{-1}F(uQ,\beta)+\Gamma_{-1}F(\beta,\beta)$，$v=uQ+\beta$，$\alpha\in R^n,\beta\in C^m,A\in G$下可递，这时称$D(V,F)$为齐性Siegel域。上面提到齐性有界域的分类为齐性Siegel域的分类。这是分类结果的一个重大进展。在1970年Kaup，Matsushima，Ochiai证明了齐性Siegel域同构则必线性同构，且它诱导了锥的线性同构。另一方面，熟知齐性有界域同构于不可分解齐性有界域的拓扑积。而不可分解齐性锥定义为不能线性同构于两个低维锥的拓扑积，则Kaneyuki和Tanaka(1967)证明了齐性Siegel域D(V，F)不可分解当且仅当V不可分解。这样一来，齐性有界域的分类化为不可分解齐性锥