高等数学

下册

（第三版）

上海市高等专科学校《高等数学》编写组

上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高 等 数 学

（下 册）

·第三版·

上海市高等专科学校

《高等数学》编写组编

上 海 科 学 技 术 出 版 社

内 容 提 要

《高等数学》(第三版)下册依据高等工程专科学校《线性代数课程教学基本要求》、《线性规划课程教学基本要求》、《概率与数理统计课程教学基本要求》,在第一版、第二版的基础上编写的.全书内容采用模块式结构.本册内容包括矩阵及其运算,线性方程组,特征值、特征向量及二次型,线性规划,随机事件与概率,随机变量,参数估计与假设检验,方差分析和回归分析等.为有助于及时消化和理解,每节或在适当的内容之后,配有练习题.每节后配有习题,每章后配有复习题.书后附有标准答案,供读者参考.

责任编辑 周玉刚

高等专科学校试用教材
高 等 数 学
(下 册)
·第三版·
上海市高等专科学校
《高等数学》编写组编
上海科学技术出版社出版、发行
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所经销
商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 18 字数 421 000
1985年5月第1版
1992年4月第2版
1999年6月第3版 1999年6月第15次印刷
印数:345 001—370 000
ISBN 7-5323-4891-1/O·223
定价:17.20元

高等数学（下册）（第三版）

主　审　朱学炎

主　编　朱弘毅

副主编　陆晋奎

序

教材是任何一所学校中教师与学生接触时间最长的教授、学习和交流的媒体，它不但在校内教学过程中起到至关重要的作用，往往还伴随着学习者毕生的学习、工作和生活.

上海市高等工业专科学校是随着经济建设的发展而成长起来的，并成为上海市高等教育体系中的重要组成部分，形成了一个具有工程专科教育特色的层次. 近几年来，上海市高等工业专科学校积极参加了国家教委组织的专业教学改革试点，在办出工业专科特色，提高教育质量上进行了认真的探索和实践. 如今，以他们的专业改革试点的成果，积极推进高等工业专科的教材建设，是一件很有意义的工作. 特别是从建设系列教材考虑，它是一项很有远见的决策.

教材的主要使用者是学生，因此编写教材应注意下列三个方面：第一，一本好教材应该根据学习对象和该类学科的发展，尽可能地把最新的内容合理地安排其中. 第二，作为教材，其内容编排的顺序、深浅等方面，应该符合人的认知规律，以利于学习. 特别对高等工业专科教材来说还更应该突出联系工业发展的实际，注重技能技巧和应用能力的培养. 第三，教材作为教学的媒体，它应该能起到教书育人的作用，促进学生素质的培养和训练.

这次第一批六门课程：数学、物理、化学、英语、计算机和金工系列教材的编写作了初步的尝试，它凝聚了编写人员的辛劳和心血.

目前，全国高校正在实施面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的建设计划. 高等工业专科系列教材的出版也是上海高等工业专科学校的一件大事，它不仅仅局限于目前的六门教材，而且还有待于更深入的改革和发展. 我们期望上海高等工业专科的教学内容和课程体系改革取得更大的成绩，将以更新、更好的教材奉献于即将来临的 21 世纪，为我国的社会主义建设增添光辉.

张伟江

1995 年 12 月

前　　言

为了迎接21世纪，在上海市教委的组织和领导下，由上海市各高等专科学校联合组成上海市高等专科学校《高等数学》编写组，从目前教改状况及发展要求出发，对编写大纲进行全面的探讨和大胆的改革，力求为培养21世纪人才提供一本具有专科特色的教材.

本教材从高等工程专科学校培养目标出发，参照高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》、《概率与数理统计课程教学基本要求》、《线性规划课程教学基本要求》、《线性代数课程教学基本要求》，在《高等数学》第一版、第二版的基础上进行编写的.

本教材在内容的选取上，除保证必要的系统外，尽量注意到本课程内容的应用性和针对性.重要的概念，尽量从实际问题引出，不过分追求理论证明和推导的严密性，而注意加强那些与实际应用联系较多的基础知识；加强基本运算方法的训练和能力的培养，而不追求过分复杂的计算.为有利于高级工程技术应用型人才的培养，在下册专辟一章讲解线性规划的基本概念、基本理论和基本方法.为有助于及时消化和理解概念及方法，每节或在适当的内容之后，配有练习题.每节后配有习题，每章后配有复习题.

全书内容采用模块式结构，分上、中、下三册.上册七章包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程；中册五章包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，级数，数值计算初步；下册包括线性代数、线性规划、概率与数理统计课程内容.教学授课时数上、中册110～130学时，下册70～84学时.书中注有“*”号的内容(未计算学时)供不同专业、不同要求选用.

本教材由朱弘毅主编，秦耀堂、邵振和、陆晋奎分别为上、中、下册副主编.参加编写的还有(以姓氏笔划为序)：金毛弟、邵建润、张宛平、沐国宝、陆信芳、陈孩未、张瑞瑾、曹颖中等.全书的框架结构由朱弘毅、秦耀堂负责组织.

本书由上海铁道大学朱学炎教授主审，参加审稿的还有(以姓氏笔划为序)：王绍智、李兰舫、周玉刚、张起云、邱慈江、洪蓬、黄炳章、薛闻起等，他们认真地审阅了原稿，并提出了许多宝贵的改进意见，对此我们表示衷心的感谢.

限于编者水平，加之时间仓促，书中一定存在不妥之处，希望使用本书的同行和广大读者批评指正.

编　者

1997年6月

目　录

第十三章　矩阵及其运算

本章及以下两章介绍线性代数的一些基本知识，讨论线性方程组的解法、矩阵化为对角阵及化二次型为标准型等问题.

第一节　矩阵及其运算

一、矩阵的概念

例1　在实际问题中，常会遇到由 n 个未知量、m 个方程组成的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{13-1}$$

显然线性方程组(13-1)完全由下面的数表(13-2)所确定

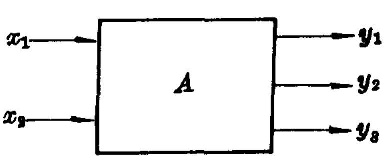
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{13-2}$$

例2　图 13.1(a)表示自动控制工程中的两个输入量 x_1,x_2；三个输出量 y_1,y_2,y_3 的线性系统. 设输入 x_1,x_2 与输出 y_1,y_2,y_3 之间的关系为

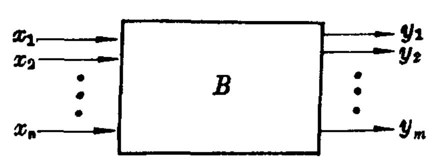
$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + dx_2, \\ y_2 = bx_1 + ex_2, \\ y_3 = cx_1 + fx_2. \end{cases}$$

因为输入与输出之间的关系完全由它们的系数唯一地确定，所以该线性系统可用下面的数表来表示：

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$



(a)



(b)

图　13.1

一般地，图 13.1(b)表示 n 个输入量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$；m 个输出量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性系统，设输入与输出之间的关系为

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases} \tag{13-3}$$

则 n 个输入量 m 个输出量的线性系统也可用下面的数表来表示：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{13-4}$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 都是变量，在数学上，我们称(13-3)式为从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换.

例 3 某类物资有 2 个产地，3 个销地，其调运方案(单位：吨)：

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	3
A_2	4	0	2

也可用数表

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

来表示.

上述这些矩形数表在数学上称为矩阵.

[redacted]

一阶方阵，相当于一个数. 如$(a)=a$.

数表(13-2)称为线性方程组(13-1)的增广矩阵.

数表(13-4)称为线性变换(13-3)的系数矩阵.

下面介绍一些特殊的矩阵.

(1) **零矩阵** 元素都是零的矩阵称为零矩阵，记为O.

(2) **行矩阵、列矩阵** $1\times n$ 矩阵

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

称为行矩阵；$m\times 1$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵.

(3) **对角阵** 不在主对角线上的元素全是零的方阵，称为对角阵. 一般形式为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中主对角线上的元素是$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，未写出的元素都是零.

(4) **单位阵** 主对角线上的元素全是1的对角阵称为单位阵，即

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

用E_n表示(n为单位阵的阶数)，在不引起混淆的情况下，简记为E.

(5) **三角阵** 主对角线以下的元素全为零的方阵称为上三角阵，其一般形式为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

主对角线以上的元素全为零的方阵称为下三角阵，其一般形式为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & & & 0 \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

(6) **对称阵** 满足条件$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$的方阵$(a_{ij})_{n\times n}$称为对称阵. 对称阵的特点是：它的元素以主对角线为对称轴对应相等.

例如，矩阵

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

是对称阵.

定义 2 如果矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵,并且它们的对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 A 与矩阵 B **相等**,记作 $A=B$.

练　　习

1. 写出下列线性方程组的增广矩阵 $\tilde{A}$:

(1) $\begin{cases}2x_1-x_1 & =1,\\ 3x_1+4x_2+x_3 & =0,\\ 6x_1+2x_2-5x_3 & =-2.\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3 & =-1,\\ 2x_1-x_2\quad -x_4 & =2,\\ x_1\quad -x_3 & =3.\end{cases}$

2. 写出线性变换

$$\begin{cases}y_1=x_1-2x_2,\\ y_2=2x_1+x_2-x_3\end{cases}$$

的系数矩阵 A.

3. 零矩阵 $O_{3\times 2}$ 与 $O_{2\times 3}$ 相等吗? 为什么?

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法

例 1 两种物资从两个产地运往三个销地的调运方案分别用矩阵 A 与 B 表示(单位:吨):

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

那么从各产地运往各销地两种物资的总运量,就是把矩阵 A 与矩阵 B 对应的元素相加,得

$$\begin{pmatrix}1+1 & 3+7 & 4+0\\ 0+1 & 2+2 & 1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 10 & 4\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

上面的 2×3 矩阵称为矩阵 A 与 B 的和.

定义 3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$,则 $m\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

称为**矩阵 A 与 B 的和**,记为 $A+B$. 即

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

显然,只有两个矩阵的行数、列数对应相同,才能进行加法运算.

根据矩阵加法的定义,不难验证,加法有如下运算性质(设 A、B、C、O 都是 $m\times n$ 矩阵):

(1) $A+B=B+A$;

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

(3) $A+O=A$.

2. 数乘矩阵

定义 4 数 k 乘矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的每一个元素所得到的矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$称为**数 k 与矩阵 A 的积**,记作 kA 或 Ak,即

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

例如,已知例 4 中 A 物资的单价是 5 万元/吨,则各销地应付给各产地的费用(单位:万元)可用数与矩阵的积表示为

$$5A=5\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 15 & 20 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

由数乘矩阵的定义,我们可以定义矩阵 A 的负矩阵为$(-1)A$,记为$-A$. 从而可以定义两个 $m\times n$ 矩阵 A 与 B 的差为 $A-B=A+(-B)$.

矩阵的数乘具有以下性质(其中 A、B 为 $m\times n$ 矩阵;k、l 为数):

(1) $kA=Ak$;　　(2) $k(A+B)=kA+kB$;

(3) $(k+l)A=kA+lA$;　　(4) $k(lA)=(kl)A$;

(5) $A+(-A)=0$;　　(6) $1\cdot A=A$.

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

求 $2A-3B$.

解 $2A-3B=\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -6 & 0 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 4 & 6 \\ -4 & -15 \end{pmatrix}.$

例 3 设矩阵 X 满足$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}+2X=3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,求 X.

解 $2X=3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $2X=\begin{pmatrix} 8 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 14 \end{pmatrix}$,

$$\therefore\ X=\begin{pmatrix} 4 & -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. 两个矩阵的乘积

矩阵乘法是矩阵的重要运算. 我们从下面的实例引出矩阵的乘法.

设有两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2. \end{cases} \tag{13-7}$$

若要求得从 t_1,t_2 到 y_1,y_2,y_3 的线性变换，可将(13-7)代入(13-6)，整理，得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})t_2, \\ y_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21})t_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22})t_2. \end{cases} \tag{13-8}$$

线性变换(13-8)可看成先作线性变换(13-7)再作线性变换(13-6)的结果，称为线性变换(13-6)与(13-7)的乘积，相应地把线性变换(13-8)所对应的矩阵定义为线性变换(13-6)与(13-7)所对应的矩阵的乘积，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

一般地，我们有

定义 5 设有矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，规定**矩阵 A 与 B 的乘积**是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中，

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$

$$(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n),$$

并记
$$C = AB.$$

乘积矩阵 $C=AB$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 就是矩阵 A 的第 i 行与矩阵 B 的第 j 列的对应元素乘积之和，即

$$AB = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{is} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{sj} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots \quad c_{ij} \quad \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} = C.$$

注意 只有当左面的矩阵 A 的列数等于右面的矩阵 B 的行数时，这两个矩阵才能相乘.

例 4 求 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

解
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2\times1+3\times5 & 2\times2+3\times(-1) & 2\times(-1)+3\times0 \\ 4\times1+0\times5 & 4\times2+0\times(-1) & 4\times(-1)+0\times0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

例 5 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 AB，BA.

解
$$AB=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{pmatrix},$$
$$BA=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

说明 由例 5 可知：(1) 矩阵乘法一般不满足交换律；

(2) 两个非零矩阵的乘积矩阵可能是零矩阵，从而当 $AB=0$ 时，一般不能推出 $A=0$ 或 $B=0$；同样，当

$AB=AC$ 时，即使 $A\neq O$，也不一定有 $B=C$.

对于线性方程组(13-1)，我们称

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为线性方程组(13-1)的系数矩阵. 若记

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

则由矩阵相等和矩阵乘法的定义，可以把线性方程组(13-1)表示成矩阵形式

$$AX=B$$

把线性变换(13-3)表示成矩阵形式

$$Y=AX$$

矩阵乘法具有下列性质(假设运算可进行)：

(1) $(AB)C=A(BC)$；

(2) $A(B+C)=AB+AC$；　　$(B+C)A=BA+CA$；

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$　(λ 是一个数).

例6　已知两个线性变换

$$\begin{cases} z_1=3y_1+2y_2, \\ z_2=y_1-4y_2; \end{cases}\qquad \begin{cases} y_1=x_1+4x_2+x_3, \\ y_2=2x_1+x_2-x_3. \end{cases}$$

求从 x_1,x_2,x_3 到 z_1,z_2 的线性变换.

解　令 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

则这两个线性变换可分别表示为

$$Z=AY \quad 与 \quad Y=BX.$$

于是从 x_1,x_2,x_3 到 z_1,z_2 的线性变换为

$$Z=AY=A(BX)=(AB)X=CX.$$

其中　$$C=AB=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 14 & 1 \\ -7 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

因此，从 x_1,x_2,x_3 到 z_1,z_2 的线性变换为

$$\begin{cases} z_1=\ \ 7x_1+14x_2+x_3, \\ z_2=-7x_1\qquad\quad +5x_3. \end{cases}$$

容易验证

$$A_{m\times n}E_n = E_m A_{m\times n} = A_{m\times n};$$
$$A_{m\times n}O_n = O_m A_{m\times n} = O_{m\times n}.$$

下面用矩阵的乘法，来定义 n 阶方阵的幂.

定义 6 设 A 为 n 阶方阵，k 是正整数，称 k 个 A 的连乘积为方阵 A 的 **k 次幂**，记作 A^k，即

$$A^k = \underbrace{A\ A\ \cdots\ A}_{k个}.$$

当 k,l 都是正整数时，由矩阵乘法的结合律，可得

$$A^k A^l = A^{k+l};\ (A^k)^l = A^{kl}.$$

因为矩阵乘法一般不满足交换律，所以一般地

$$(AB)^k \neq A^k B^k.$$

规定 $A^0 = E.\ A^1 = A.$

例 7 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$，（$k$ 是正整数）.

解 ∵ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

依次类推，可得 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 矩阵的转置

定义 7 把 $m\times n$ 矩阵 A 的行换成同序数的列，所得的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的转置矩阵. 记为 A^T.

例如，$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

的转置矩阵为

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

显然，方阵 A 为对称阵的充要条件是 $A = A^T$.

矩阵的转置，满足下述运算规律（假设运算是可行的）：

(1) $(A^T)^T = A$；

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$；

(3) $(kA)^T = kA^T$（k 是一个数）；

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

例 8 已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 $(AB)^T$.