■ 杨象富　赵伟祥　编

■ 教育科学出版社

QM DH YF

巧妙的换元法

巧妙的换元法

杨象富　赵伟祥编

教育科学出版社

·编　　者：杨象富　赵伟祥
·责任编辑：金宏瑛
·封面设计：王四海
·版式设计：黄　星
·出　　版：教育科学出版社（北京·北三环中路46号）
·发　　行：新华书店北京发行所
·印　　刷：北京市顺义县燕华营印刷厂

QIAOMIAO DE HUANYUAN FA
巧妙的换元法
开本：787毫米×1092毫米 1/32 印张：5.375 字数：117.900
1988年11月第1版　1988年11月第1次印刷
印数：00,001—10,500册
ISBN 7-5041-0117-6

G·096/　定价：1.20元

前　言

“换元”的思想和方法，在数学里有广泛的应用。不少数学问题的解决，“难”就难在换元，“巧”也巧在换元。有时，通过适当的代换，不但可以简化书写，变繁为简，更重要的是能够使数量关系明朗化，化难为易。

“换元法”在初一代数中已正式提出，在以后的中学数学教材里又屡次出现不同形式的换元。在解决难度较大的问题（如数学竞赛题）和学习高等数学时，换元法被用得更多、更巧。但由于出现换元法的地方比较分散，换元的形式又多种多样，使人难见全貌，不易熟练掌握。在这本小册子里，我们将比较全面、系统地介绍初等数学里两类基本的换元法和其他常用的代换法。我们相信，本书对读者较好地掌握代换的技能技巧，提高解题能力，培养学习兴趣，会有一定的帮助。

本书共三章，合计13节。每节后面都安排有练习题，这是全书的重要组成部分。最后的“答案、提示或解答概要”供对照和参考，为了节省篇幅和顾及本书的系统，对每道练习题一般只作出一种提示或解答。

目　　录

一、第Ⅰ类换元法

把题目中重复出现的式子或较繁的式子（如$f(x)$），看作一个整体，并用字母（如y）来表示，这种代换称为第Ⅰ类代换，常记为“设$f(x)=y$”．这类代换可以简化书写，变繁为简，有时还能使数量关系明朗化，使问题易于解决．

本章前三节分别介绍被代换式$f(x)$是有理式、根式和初等超越函数式的情况，后两节是比值代换和整体代换．

1．有理式的代换

〔例1〕　解方程：$(16x^2-9)^2+(16x^2-9)(9x^2-16)+(9x^2-16)^2=(25x^2-25)^2$.

分析式子$16x^2-9$和$9x^2-16$重复出现，且$25x^2-25$是这两个式子的和，可以考虑用两个字母表示它们.

解　设$16x^2-9=a$，$9x^2-16=b$，原方程就是：

$a^2+ab+b^2=(a+b)^2$，即$a^2+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$，

$$\therefore\ ab=0.$$

就是　$(16x^2-9)(9x^2-16)=0$.

解之，得　$x_{1,2}=\pm\dfrac{3}{4}$，$x_{3,4}=\pm\dfrac{4}{3}$.

下面看一个较复杂的例子.

〔例2〕　实数x、y、z满足

$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2$

$$+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2. \qquad (1)$$

求 $\dfrac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$的值.

解 设$y-z=\alpha$，$z-x=\beta$，$x-y=\gamma$. （2）

于是 $y+z-2x=\beta-\gamma$，$z-x-2y=\gamma-\alpha$，

$x+y-2z=\alpha-\beta$.

代入（1），得 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2$，

就是 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha=0$. （3）

又从（2）可以知道：$\alpha+\beta+\gamma=0$， （4）

$\therefore \quad (\alpha+\beta+\gamma)^2=0$.

即 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=0$. （5）

（3）+（5），得 $2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2=0$，

即 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$，

已知α、β、γ是实数，$\therefore \alpha^2\geqslant 0$，$\beta^2\geqslant 0$，$\gamma^2\geqslant 0$，

故有 $\alpha^2=\beta^2=\gamma^2=0$，

即 $\alpha=\beta=\gamma=0$. （6）

由此得 $y-z=z-x=x-y=0$，

所以 $x=y=z$.

于是 $$\frac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}=$$

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}=1.$$

这里的代换式（2）把条件（1）简化为（3）及（4），从而比较容易地得出非常简明的关系式（6），使问题由难变易.

〔例3〕若a、b、c、d都是正数，求证：

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}\geqslant\frac{4}{3}.$$

分析　此题繁在分母，使用代换法，将求证式左边四个分式的分母（多项式）分别用单个字母表示，从而原题可以转化为一个比较容易证明的不等式.

证明　设$b+c+d=A\ (>0)$　　(1),

$c+d+a=B\ (>0)$　　(2),

$d+a+b=C\ (>0)$　　(3),

$a+b+c=D\ (>0)$　　(4).

以上四式相加得　$3(a+b+c+d)=A+B+C+D$,

即　$$a+b+c+d=\frac{1}{3}(A+B+C+D)\qquad(5)$$

从(5)式分别减去(1)、(2)、(3)、(4)式,可得$a=\frac{1}{3}(B+C+D-2A)$, $b=\frac{1}{3}(C+D+A-2B)$,

$c=\frac{1}{3}(D+A+B-2C)$, $d=\frac{1}{3}(A+B+C-2D)$.

欲证原不等式，只要证：

$$\frac{B+C+D-2A}{3A}+\frac{C+D+A-2B}{3B}+\frac{D+A+B-2C}{3C}+\frac{A+B+C-2D}{3D}\geqslant\frac{4}{3},$$

即　$$\frac{B+C+D-2A}{A}+\frac{C+D+A-2B}{B}+\frac{D+A+B-2C}{C}+\frac{A+B+C-2D}{D}\geqslant 4,$$

即　$$\left(\frac{B+C+D+A}{A}-3\right)+\left(\frac{C+D+A+B}{B}-3\right)$$

$$+\left(\frac{D+A+B+C}{C}-3\right)+\left(\frac{A+B+C+D}{D}-3\right)\geqslant 4.$$

即
$$\frac{A+B+C+D}{A}+\frac{A+B+C+D}{B}+\frac{A+B+C+D}{C}$$
$$+\frac{A+B+C+D}{D}\geqslant 16,$$

$$(A+B+C+D)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)\geqslant 16.$$

由于A、B、C、D都是正数，根据平均数不等式，就有

$$(A+B+C+D)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)\geqslant 4\sqrt[4]{ABCD}\cdot$$
$$4\sqrt[4]{\frac{1}{ABCD}}=16.$$

〔例4〕 设a、b、c都是正数，求证：

$$(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)\leqslant abc.$$

分析 因为a、b、c都是正数，并且含有乘积的形式，可以考虑用平均数不等式，即“和”的形式不小于“积”的形式。为此应设法换元，使求证式的左边变形为“积”，而右边为“和”的形式.

证明 设$a+b-c=x$，$c+a-b=y$，$b+c-a=z$，

可以计算得$a=\dfrac{x+y}{2}$，$b=\dfrac{x+z}{2}$，$c=\dfrac{y+z}{2}$.

由于a、b、c都是正数，故x、y、z中至多只有一个负数（因为很明显地，如果x、y、z中有两个或两个以上是负数，则a、b、c中至少有一个为负数，就与a、b、c都是正数相矛盾）.

（1）当x、y、z中仅有某一个为负数时，显然有

$abc>xyz=(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)$.

（2）当x、y、z都是非负数时，有

$$abc=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+z}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\geqslant\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xz}\cdot\sqrt{yz}$$

$$=xyz=(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a).$$

因此，当a、b、c都是正数时，所证不等式成立。

〔例5〕 已知$f\left(\frac{2}{x}+1\right)=\lg x$，求$f(x)$。

分析 把$\frac{2}{x}+1$视为一个新的自变量，就容易解决问题.

解 设$\frac{2}{x}+1=y$，则$x=\frac{2}{y-1}$，因此就有

$$f(y)=\lg\frac{2}{y-1}=\lg 2-\lg(y-1),$$

即 $f(y)=\lg 2-\lg(y-1)$，

$\therefore$ $f(x)=\lg 2-\lg(x-1)$.

与解决例5同样的思想方法，我们可以很方便地处理关于方程的根的变换的某些问题。其中最基本的有三种情况，即方程的根减h，根k倍($k=-1$时是相反数)和根的倒数. 现在分别简述如下：

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是$n$次方程.

（1）欲求另一个n次方程$\phi_1(y)=0$,使两方程的根之间存在关系：$y_i=x_i-h$（$i=1, 2, \cdots n$）. 我们只要用$x=y+h$代入$f(x)$，得

$$f(y+h)=a_n(y+h)^n+a_{n-1}(y+h)^{n-1}+\cdots+a_1(y+h)+a_0=0.$$

经上式整理就可以得到所求的$\phi_1(y)=0$.

例如，求以方程$x^3-3x^2-x+3=0$的根减2为根的方程.

令$x-2=y$，则$x=y+2$，代入已知方程得

$$(y+2)^3-3(y+2)^2-(y+2)+3=0.$$

整理可得 $y^3+3y^2-y-3=0$，这就是所求的方程.

（2）欲求另一个n次方程$\phi_2(y)=0$，使$y_i=kx_i$（$i=1,2,\cdots n$），只要用$x=\dfrac{y}{k}$代入$f(x)$，得

$$f\left(\frac{y}{k}\right)=a_n\left(\frac{y}{k}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{y}{k}\right)+a_0=0.$$

即 $\phi_2(y)$

$$=a_ny^n+ka_{n-1}y^{n-1}+k^2a_{n-2}y^{n-2}+\cdots+k^{n-1}a_1y+k^na_0=0.$$

这里有明显的规律：即将$f(x)$的系数从x的最高次项起顺次乘以$k^0=1$，k，k^2，$\cdots$，k^{n-1}，k^n就可以了.

（3）欲求另一个n次方程$\phi_3(y)=0$，使$y_i=\dfrac{1}{x_i}$（$i=1,2\cdots,n$），只要用$x=\dfrac{1}{y}$代入$f(x)$，得

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=a_n\left(\frac{1}{y}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{1}{y}\right)+a_0=0.$$

即 $\phi_3(y)=a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y+a_n=0.$

正好是将$f(x)$的系数顺序颠倒过来.

练 习 一

1． 解方程： $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{10}{3}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right).$

2． 解方程：$(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3$.

（$a+b\neq0$）.

3．解方程：$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$

$(abc\neq 0,\ ab+bc+ca\neq 0)$.

4．解方程组：

$$\begin{cases} 6xyz+xy+2yz+3zx=-35, \\ 7xyz+3xy+yz+3zx=-51, \\ 9xyz+2xy+4yz+3zx=-43. \end{cases}$$

5．计算：$(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3$
$-(a+b-c)^3$.

6．计算：$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)$
$+(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$
$+(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$
$-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

7．求证：$(3a-b-c)^3+(3b-c-a)^3+(3c-a-b)^3$
$-3(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)$
$=16(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

8．求证：$(a-x)^4(y-z)^4+(a-y)^4(z-x)^4+$
$(a-z)^4(x-y)^4=2[(a-y)^2(a-z)^2(x-y)^2(x-z)^2$
$+(a-z)^2(a-x)^2(y-z)^2(y-x)^2+(a-x)^2$
$(a-y)^2(z-x)^2(z-y)^2]$.

9．已知$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$
$=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$,
求证：$ac=bd$

10．设$x+y+z=3$，求

$p=\frac{3(x-1)(y-1)(z-1)}{(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3}$的值.

11．若实数x、y适合方程：

$ay-bx=c\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$，且 $c\neq 0$，

$|c|\neq|b|$，求证：$c^2\leqslant a^2+b^2$.

12. 已知a、b、c都是正数，求证：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

13. 设a、b、c、d都是正数，求证：

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}$$

$$\geqslant\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{a+b+c+d}.$$

14. 设$x+y+z>0$，求证：

$(x+y+z)^3$

$\geqslant 27(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

15. 解方程组：

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{7}+\frac{z}{10}=\frac{x}{7}+\frac{y}{10}+\frac{z}{4}=\frac{x}{10}+\frac{y}{4}+\frac{z}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}.$$

*16. 若a、b、c为互不相等的正数，求证：

$$(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b)$$
$$+(a-b)^2(a+b-c)>0.$$

17. 求函数$f(x)$，该函数对任何$\chi\in R$有定义，且满足条件

$$2f(x)+f(1-x)=\chi^2.$$

18. a、$b\in\mathrm{R}$，求证方程$(x-a)(x-a-b)=1$

(1)恒有实数根，(2)两根中一个大于a，一个小于a.

19. 若不等式$ax^2+bx+c>0$的解是$\alpha<\chi<\beta$（$\alpha>0$），用α、β表示不等式$cx^2-bx+a>0$之解.

*20. 设二次函数$y=ax^2+bx+c$，且$|y|_{x=0,1,2}|\leqslant 1$，

证明：$\max\limits_{x\in[0,2]}|y|\leqslant 4$.

*21 已知由方程$x_1x_2x_3\cdots x_{1985}=1$，$x_1-x_2x_3\cdots x_{1985}=1$，$\cdots$ $x_1x_2-x_3x_4\cdots x_{1985}=1$，$x_1x_2x_3-x_4x_5\cdots x_{1985}=1$，$x_1x_2\cdots x_{1984}-x_{1985}=1$所组成的方程组，试求$x_{1984}$的值.

2. 根式的代换

有关根式的许多问题，常常转化为有理式来解决. 根式的有理化有很多方法，换元法也是其中的一种重要方法. 它的思路是把一些较复杂的根式通过换元转化为有理式，然后归结为讨论一些较简单的根式问题.

〔例 1〕解方程：$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$.

分析 解无理方程通常是先把一些根式适当地放置在等号两边，再对两边作同次乘方化为有理方程，然后求解. 但对本题这样做并不容易，注意到

$$(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2=2x+7+2\sqrt{x^2+7x},$$

而原方程可写成

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}+2x+7-42=0.$$

就是$(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})-42=0$. 故可考虑用换元法.

解 原方程就是 $(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})-42=0$，令$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=y\ (y>0)$，有 $y^2+y-42=0$.

$\therefore\ y=-7$（舍去），$y=6$.

即 $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6$.

就是 $\sqrt{x+7}=6-\sqrt{x}$.

两边平方得：

$$x+7=36-12\sqrt{x}+x,$$
$$12\sqrt{x}=29.$$

$$\therefore \qquad \sqrt{x}=\frac{29}{12},\ x=\frac{841}{144}.$$

经过检验，可知它是原方程的根。

注：本题如设$\sqrt{x}=a$，$\sqrt{x+7}=b$，原方程就是

$$a+b+2ab=42-a^2-b^2,$$

即 $\quad (a+b)^2+(a+b)-42=0.$

于是有 $\quad a+b=-7$或$a+b=6.$

仍归结为解$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6.$

〔例 2〕 设$a\geqslant\frac{1}{8}$，求证：

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1.$$

证明 设$\sqrt{\frac{8a-1}{3}}=x$，则$\frac{8a-1}{3}=x^2$，可得$a=\frac{3x^2+1}{8}$.

代入求证式的左边，经过化简就可得证.

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{3x^2+1}{8}+\frac{1}{3}\left(\frac{3x^2+1}{8}+1\right)\cdot x}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1+3x+3x^2+x^3}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{2}\right)^3}=\frac{1+x}{2},$$

同样，通过计算可得

$$\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=\frac{1-x}{2}.$$

$\therefore$ 左边$=\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}=1.$

〔例 3〕 解方程：$5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}-2=0 \qquad (1)$

分析 此例如果把含根式的项移到右边，再两边平方，将

出现四次方程．如果用例2的解法，设$\sqrt{5x^2-1}=y$，则

$$x=\pm\sqrt{\frac{y^2+1}{5}},$$

代入原方程并不能简化．此例应作以下的“部分代换”．

解　原方程就是$(5x^2-1)-x\sqrt{5x^2-1}+x-1=0$.

设$\sqrt{5x^2-1}=y$，可得$5x^2-1=y^2$，经过部分代换得

$$y^2-xy+x-1=0. \qquad (2)$$

分解因式得　$(y-1)(y+1-x)=0$.　　(3)

$y-1=0$，就是$\sqrt{5x^2-1}=1$，可解得$x=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$；

$y+1-x=0$，就是$\sqrt{5x^2-1}=x-1$（*），可解得$x=\frac{1}{2}$，$x=-1$．因为当$x=\frac{1}{2}$时，$x-1<0$，不能满足方程（*）．而$x=-1$也显然不能满足，因此$x=\frac{1}{2}$，$x=-1$都是增根．

经检验，可知$x=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$是原方程的根．

由方程（1）变形到（2），未知数从一个（x）增加为两个（x，y），似乎是倒退了，但（2）是整式方程且容易转化为（3）的形式，最终使问题由困难变容易．因此某一方面的暂时倒退，有时会换来实质上的进展，还是值得的．

〔例4〕　解方程：$x^2+2x\sqrt{3x^2+1}+3=0$.

解　设$\sqrt{3x^2+1}=y$（$y>0$），则$3x^2+1=y^2$，

$$\therefore\ x^2=\frac{y^2-1}{3}.$$

代入原方程得$\frac{y^2-1}{3}+2xy+3=0$，即$y^2+6xy+8=0$.

于是原方程转化为下列方程组：

$$\begin{cases} 3x^2+1=y^2\ (y>0), & (1) \\ y^2+6xy+8=0. & (2) \end{cases}$$

(1)×8−(2)，消去常数项整理得

$$3y^2+2xy-8x^2=0,$$

即 $(y+2x)(3y-4x)=0$.

由$y=-2x$代入(1)，解得$x_1=1$，$x_2=-1$.

当$x=1$时，$y<0$，它是增根；

$x=-1$满足原方程.

由$y=\frac{4}{3}x$代入(1)，得$11x^2+9=0$，无实根.

所以，原方程的根为$x=-1$.

一般地引进新的未知数作部分代换后，无理方程如能转化为二元方程组，而这方程组能用通常的方法求解，就可以求得原无理方程的解.

〔例5〕 解方程：$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-1}=x$.

分析 注意方程中各项之间的关系，现在有

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1},$$

$$x=\frac{1}{2}[(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{x-1})^2].$$

解 设$\sqrt{x+1}=A\ (A\geqslant0)$，$\sqrt{x-1}=B\ (B>0)$.

原方程就是 $A+B-AB=\frac{1}{2}(A^2+B^2)$.

即 $A^2+B^2+2AB-2(A+B)=0$.