上海市中学课本

数学

习题解答选

第一辑

上海教育出版社

上海市中学课本

数学习题解答选

第一辑

上海市中小学教材编写组编

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海中华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 9.5　字数 213,000

1978 年 12 月第 1 版　1978 年 12 月第 1 次印刷

统一书号：K7150·1991　定价：0.55 元

编者的话

为了更好地贯彻党的教育方针，努力提高教育质量，极大地提高整个中华民族的科学文化水平，以适应四个现代化的需要，上海市数学竞赛委员会在今年四、五月间组织了部分大、中学有经验的数学教师，收集了一些中学数学习题，供爱好数学的中学生课外练习．现将这些数学习题作了适当的补充修改，并附上一九七八年全国部分省市数学竞赛题解，汇编成这本《数学习题选编》(第一辑)．我们希望它的出版能对中学数学教学质量的提高和中学课外数学小组活动的开展，起一些积极的推动作用．

《数学习题选编》(第一辑)，从编写到出版，时间十分仓促，又限于水平，缺点和错误不少，希望大家提出宝贵的意见，帮助我们不断地改进．同时在使用这本习题选编时，注意下面几点：

1．这本习题选编的主要对象是中学课外数学小组的参加者．也供数学教师选编补充题时参考．其中一些题目有一定的难度，可在完成教材基本题的基础上选择使用．

2．这本习题选编共选 293 个题，不可能包括各种类型的题目；其中的“提示和解答”，也不一定“标准”，只能作为参考．因此在使用中可随时补充各种类型的题目，在解题时，应发挥各自的创造性．

3．在使用本书的过程中，希望大家进一步做好习题资料的积累工作，为今后编辑出版《数学习题选编》(第二辑)作准备．

在《数学习题选编》(第一辑)出版的时候，我们谨向参加这本习题选编工作的上海市数学会中学数学研究会、部分大、中学校的数学老师，和寄给我们资料的兄弟省市的同志，表示衷心的感谢。

一九七八年十月

目　　录

一、练 习 题

代 数 部 分

1. 在实数集内，解方程组：

(1) $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{x+y+z+1}+5, \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x+y)^2+(y+z)^2=17, \\ \sqrt{x+y}\sqrt{y+z}=2, \\ x^2+2xz+z^2=9. \end{cases}$

2. 设 $\begin{cases} ax+3y=2, \\ 2x+(a-1)y=a. \end{cases}$

(1) 求实数 x, y;

(2) 当$|x|<|y|$时，a 应取哪些实数？

3. 求 $x^2-y^2=105$ 的正整数解.

4. 在平面直角坐标系中，横坐标和纵坐标都是整数的点叫做格点. 求 $4x^2-4xy-3y^2=5$ 的图形上的格点.

5. 解方程：$(2^{2x}+1)(2^{2y}+2)(2^{2z}+8)=2^{5+x+y+z}$.

6. 求方程组：$\begin{cases} x^{x+y}=y^4, \\ y^{x+y}=x \end{cases}$ 的整数解.

7. 化简下式，再计算它的近似值(精确到 0.01)：

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)^{-1}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$
$$-\sqrt[3]{3\sqrt{3}}-4^{-\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{2}},$$

8. 设 $x^2+x+1=0$, 求 x^6+x^{-6} 的值.

9. 在有理数集内, 分解因式:

(1) $5a^{2n+11}x^{4m+6}-20a^{n+8}x^{2m+4}y+20a^5x^2y^2$ (m、n 是正整数);

(2) $x^{5n}+x^n+1$ (n 是正整数);

(3) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$;

(4) $x^4+x^3+x^2+2$;

(5) $x^4+y^4+1-2x^2y^2-2x^2-2y^2$;

(6) $(a+b)^4+a^4+b^4$.

10. 在实数集内, 分解因式:

(1) $2a^4-28a^2+50$;

(2) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)-9$.

11. 若 a_1, a_2, a_3, a_4 都是正的实数, 且

$$a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4=4a_1a_2a_3a_4,$$

问以 a_1, a_2, a_3, a_4 为边的凸四边形是怎样的四边形?

12. 已知

$$f(x)=\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}},$$

求 $f(\sqrt{ab})$.

13. 求 $g(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 的算术平方根.

14. 解不等式:

(1) $\log_a\left(\frac{3}{2}\right)^{-x^2}+\log_a\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}<\log_a\frac{32}{243}$;

(2) $\sqrt{4-x^2}<x+1$;

(3) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x^2}{1+x^2}>0$.

15. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2-3}}-\lg(2x-3)$;

(2) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

16. 求 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的反函数.

17. 讨论下列函数的增减性:

(1) $f(x)=|1+2x|+|x-2|$;

(2) $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(|1+2x|+|x-2|)}$.

18. 在下列函数的图象上任取两点，设这两点连线的中点为 M，过 M 作 y 轴的平行线与图象交于 P 点，比较 M 与 P 纵坐标的大小.

(1) $f(x)=a^x$;　　$(0<a<1,\ a>1)$

(2) $g(x)=\log_a x$.　$(0<a<1,\ a>1)$

19. 实数 k 为何值时，方程 $2x^2+(k-2)x+k-5=0$ 两根平方和最小？并求这两根.

20. 设 $\lg x+\lg y=2$, 求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值.

21. 设 $2x+5y=20$, 求 $\lg x+\lg y$ 的最大值.

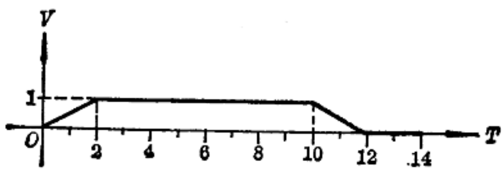
22. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,

(1) 若 $-1<x_1<x_2<1$, 证明 $f(x_2)>f(x_1)$;

(2) 求 $f(x)$的最大值和最小值.

23. 直流发电机的电动势为 E，内电路的电阻为 r. 外电路的电阻为何值时，外电路的电流功率有最大值？最大值是多少？

24. 一列火车从甲站开往乙站的速度V与时间t间的函数关系如下图,求路程S与时间t的函数关系$S=f(t)$,并作出它的草图.



(第 24 题)

25. 证明: 如果$a>b>0$, n是大于1的整数,则

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

(分别用直接证法、反证法和数学归纳法证明.)

26. 已知: $a>0$, $b>0$, $c>0$, 求证: $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

27. 如果$a\geqslant b>0$, n是自然数,求证:

$n(a-b)b^{n-1}\leqslant a^n-b^n\leqslant n(a-b)a^{n-1}$.

28. 证明: 若$\varphi(x)=x^n$(n是大于1的自然数), 则当$x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$时,总有$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}$.

29. 证明: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$.

(n是大于1的自然数)

30. 已知: m, n都是正整数,求证: $\frac{m+n}{2}\geqslant\sqrt[m+n]{m^n n^m}$.

31. 证明: $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

32. 已知: $S_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$, 求证:

对于正整数m、n, 当$m>n$时, $|S_m-S_n|<\frac{1}{2^n}$.

33. 证明：$\dfrac{1}{\log_5 19}+\dfrac{2}{\log_3 19}+\dfrac{3}{\log_2 19}<\dfrac{1}{\log_2 \pi}+\dfrac{1}{\log_5 \pi}$.

34. 证明：$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$

$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^n-1}$.

35. 证明：ax^3+bx^2+cx+d 是一次二项式 $Ax+B$ 的三次方的必要条件是 $27a^2d=b^3$, $27ad^2=c^3$.

36. 已知：a, b, c, d 都是有理数，而 $\sqrt{b}$，$\sqrt{d}$ 是无理数，且 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$，求证：$a=c$, $b=d$.

37. 已知：方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，求证：

(1) 这个方程至多有两个不相等的根；

(2) 若 a、b、c 都是奇数，则这个方程没有整数根.

38. S_m 表示一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 两个根的m次方的和，求证：

$$S_1=-\frac{b}{a},\quad S_2=\frac{b^2-2ac}{a^2},\quad S_m=-\frac{bS_{m-1}+cS_{m-2}}{a}.$$

$(m=3, 4, 5, \cdots)$

39. 证明：$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

40. 证明：如果一个自然数各位数字的和能被 9 整除，则这个数也能被 9 整除.

41. 证明：$n(n+1)(2n+1)$能被 6 整除.

42. 证明：三个连续整数的立方和能被 9 整除.

43. 证明：$n(n^2-1)(n^2-5n+26)$可以被 120 整除.（n 是大于 1 的整数）

44. 证明：$f(n)=3^{3n}-26n-1$ 能被 676 整除.（n 是大于 1 的整数）

45. 等比数列 a, aq, aq^2, …的前 n 项和为 S_n，积为 P_n，每一项倒数的和为 T_n，求证：$P_n^2=\left(\dfrac{S_n}{T_n}\right)^n$.

46. 设 $a_i \neq 0(i=1, 2, \cdots, n)$，证明：$\{a_n\}$是等差数列的充要条件是 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{k-1}{a_1a_k}$.

$$(k=3, 4, 5, \cdots, n)$$

47. 证明：若 $f(0)=0, f(1)=1, f(n+1)=f(n)+f(n-1)$ (n 是正整数)，

则 $f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$,

且其逆命题也成立.

48. 现有 90 张卡片，在每张卡片上都写上一个非负整数，已知这 90 个数的和 S 不超过 1978，试证至少有 3 张卡片上的数相同.

49. 正整数 a, b, c 分别为直角三角形的两条直角边和斜边，且 a, b, c 无公因数．证明：a 与 b, a 与 c, b 与 c 都互质；且 c 是奇数，而 a 与 b 中，一个是奇数，另一个是偶数.

50. 证明：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$．($n$ 是自然数)

51. 求

$$f(x)=(1+x)^{2n}+x(1+x)^{2n-1}+x^2(1+x)^{2n-2}+\cdots+x^n(1+x)^n$$

的展开式中 x^n 的系数．(n 是自然数)

52. 已知$(x^{\lg x}+1)^n$ 的展开式中最后三项系数的和是方程 $3^{y^2}\cdot 9^{-10y}\cdot 81^{-11}=1$ 的正数解，而它的中项是方程

$$3\sqrt{\frac{t}{2}}=100+\sqrt{2t}$$

的解，求 x.

53. 求和：$1+2i+3i^2+\cdots+(4n+1)i^{4n}$．(其中 i 是虚数单位，n 是非负整数)

54. 应用复数的知识证明:

$$\sigma_c=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}$$

$$+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2};$$

$$\sigma_s=\sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{5\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}$$

$$+\sin\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{22}.$$

55. 已知复变数 Z 平面内的曲线 $|Z|=1$, 求经过下列变换所得到复变数 W 平面内的曲线:

(1) $W=Z+A$; $(A=a+bi$, a、b 是实数)

(2) $W=aZ$. $(a>0)$

56. 在复变数 Z 平面内, $|Z-c|+|Z+c|=2a$ $(0<c<a)$表示什么曲线? 并求经过变换

$$W=BZ \ (B=\cos\theta+i\sin\theta)$$

所得到复变数 W 平面内的曲线.

57. x 为哪些实数时, $[1+\cos(-x)-i\sin(-x)]^{1978}$是实数?

58. 求 $5+55+555+\cdots+\underbrace{555\cdots5}_{n个}$ 的和.

59. 求数列 $1, -3, 5, -7, \cdots, (-1)^{n-1}(2n-1), \cdots$的前 n 项的和.

60. 求$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$ 的和.

61. 设 n 为自然数, 求 C_{2n}^k 的极大值.

62. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 能够组成多少能被 3 整除, 且没有重复数字的三位数?

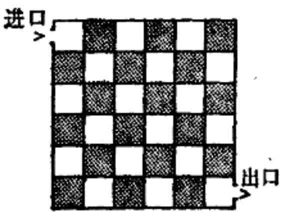
63. 证明: 对所有的正整数 $n>1$, 下列不等式成立:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>1.$$

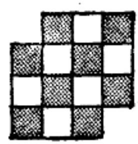
64. 一平面上有 n 条直线，其中无两条平行，也无三条共点，试问这些直线将平面分成多少部分？

65. 证明：在一平面上有 n 条直线，将平面分成若干个小区域，这些小区域可以用黑色和白色涂饰，使每两个相邻的小区域(即有一公共线段的两个小区域)涂有不同的颜色.

66. 如图，是一个 36 间展览室的展览会，每间房间之间都有门可通行. 现在有人想从进口进去，出口出来，每间展览室都走到，但不能重复，问应该怎样走？



(第 66 题)



(第 67 题)

67. 如图，是由 14 个大小相同的正方形所组成的图形. 试证明：不论怎样用剪刀沿着图中直线进行裁剪，总剪不出七个由相邻两小正方形组成的矩形来.

68. 设 N, n 都是自然数，且 $\sqrt[n]{N}$ 不是自然数，求证 $\sqrt[n]{N}$ 是无理数.

69. 设 N 是自然数，且 $\lg N$ 不是整数，求证 $\lg N$ 是无理数.

70. 证明：不论 n 是什么整数，方程 $x^2-16nx+7^s=0$ 没有整数解，这里 s 为正奇数.

71. 求证：11, 111, 1111, …, $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$, …, 这一串数中，没有完全平方数.

72. 设平面上有六个圆，每个圆的圆心都在其余各圆的外部，证明平面上任一点都不会同时在这六个圆的内部.

73. 已知多项式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数，且 $bd+cd$ 是奇数，求证这多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.

74. 证明第一个数字与第三个数字相同，第二个数字与第四个数字相同的四位数，不可能是完全平方数.

75. 证明三个不同素数的立方根不能是一个等差数列中的三项(不必连续).

76. 设 a, b, c 为互不相等的三个整数，试证不存在一个整系数多项式 $P(x)$，满足 $P(a)=b$, $P(b)=c$, $P(c)=a$.

77. 试证素数是无限的.

78. $[x]$表示不超过 x 的最大整数. 求证: $[x]+[y]\leqslant[x+y]$.

79. 求证: (1) $\left[\frac{[nx]}{n}\right]=[x]$;

(2) $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$.

80. $1\times2\times3\times\cdots\times100$ 的末尾有多少零?

81. 试证一个自然数能被 11 整除的充要条件是奇位数字之和与偶位数字之和的差是 11 的倍数.

82. 已知椭圆的焦点坐标为 $F_1(-12, 0)$, $F_2(12, 0)$, 短半轴为 5. 求这椭圆的标准方程，并求出椭圆内部格点的个数.

83. 求不等式 $|x|+|y|<100$ 的整数解的个数.

84. 设 $a, b, c, \cdots, h$ 都是自然数，求证:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)$$

可以表示为不多于两个自然数的平方和.

85. 记 a, b 的最小公倍数为 $[a, b]$, a, b 的最大公约数为 (a, b).

求证: $[a, b](a, b)=ab$.

86. 证明 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$无论加到哪一项为止, 永远得不到整数.

87. 今有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二, 问物几何?

88. 在 1960 年底一个学生在回答关于他的年龄问题时说, 我的年龄等于我出生那年的年份数字和, 问该生当年年龄多少?

89. 已知一个四位数 N 开头两个数字相同, 后面二个数字相同.

(1) 求证 N 是 11 的倍数;

(2) 如果 N 是一个完全平方数, 求$\sqrt{N}$.

90. 一个制造铁盘的车间, 只能控制盘子的重量在指定的 a 克到$(a+0.1)$克之间. 现需要制成重量相差不超过0.005克的两个铁盘来配制一架天平, 问至少要制造几个铁盘, 才能保证完成任务?

91. 证明四万人中至少有两个人是同年同月同日生的; 又在中国, 至少有两万人出生的时间相差不超过 5 秒钟.

92. 设 m 为自然数, 求证在任意$(m+1)$个自然数中, 至少有两个数被 m 除的余数是相同的.

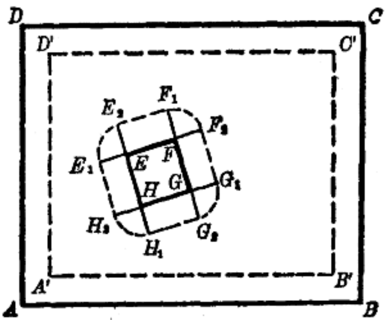
93. 设 n 为自然数, 而 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 为满足 $0\leqslant x_i<1(i=1, 2, \cdots, n+1)$的 $n+1$ 个实数, 则至少有两个数, 它们的差的绝对值小于 $\frac{1}{n}$.

94. 平面上任意五个格点，证明它们之中一定有两点，其连线中点仍是格点.

95. 空间六点，其中无三点共线. 在每两点之间用线段连接并涂上红色或蓝色. 证明至少有一个三角形，它的三条边是一色的.

96. 在 1, 2, …, 100, 这 100 个数中任选 51 个数，证明这 51 个数恒可找出两个数，其中一个为另一个的倍数.

97. 在一个 20×25 的长方形中任意放进 120 个 1×1 的正方形，证明在这个长方形中一定还可以放下一个直径为 1 的圆，使之不和这 120 个正方形中的任何一个相交.



(第 97 题)

98. 有纸片 n^2 张（n 为自然数），在每张上用红蓝铅笔，各任意写一个不超过 n 的自然数，但是要使得红字相同的任意两张上所写的蓝色数字不相同. 现在把每张上的两个数相乘，证明这样得到的 n 个乘积之和是常数，并求出这个数.

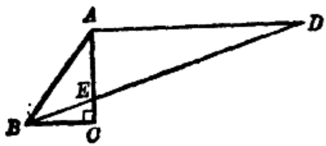
99. 空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，而每一个面又都有奇数条边. 试证之.

100. 在平面上任取三个格点，证明此三点不可能组成正三角形。

平面几何部分

101. 如图，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AD\parallel BC$，B、E、D 是一直线，$DE=2AB$。

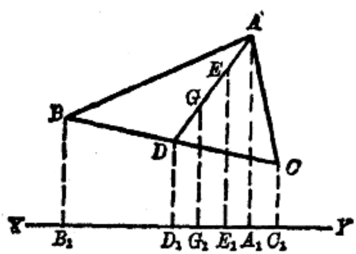
求证：$\angle ABE=\frac{2}{3}\angle ABC$。



（第 101 题）

102. 自 $\triangle ABC$ 的三顶点及重心 G 至形外一直线 XY 作四垂线，设此四垂线的垂足分别为 A_1, B_1, C_1 及 G_1。

求证：$AA_1+BB_1+CC_1=3GG_1$。



（第 102 题）

103. 如图，A,B,C,D 是 $\angle P$ 两边上的点，AD、BC 相交于 F，