

初中数学复习资料

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会编

新 知 識 出 版 社

初中数学复习资料

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会編

新 知 識 出 版 社

一九五八年·上海

初中数学复习资料

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会編

*

新知識出版社出版

(上海湖南路9号)

上海市書刊出版业营业許可証出 015 号

上海市印刷五厂印刷 新华書店上海发行所总經售

*

开本: 850×1168 1/32 印張: 9 1/16 字数: 241,000

1958年5月第1版 1958年5月第1次印刷

印数: 1—260,000 本

統一書号: 7076·309

定 价: (7)0.95元

序 言

本会为了帮助初高中毕业同学做好复习工作，决定编写初高中数学复习资料，以提供同志们参考，并希望对中学数学复习资料的研究，得到广泛的交流。

这本初中数学复习资料，包括算术、代数、几何三个部分。它的主要内容包括复习重点教材，指出同学们易犯的錯誤，通过范例闡明概念等的应用，并着重于解题过程中的分析思考，以培养同学的解题能力。每个單元都附有习题可选作练习之用。本书不仅适用于初中数学总复习，而且可以按照各年級的进度，从中选取复习内容。至于本书所选的范例与习题，大部分是符合于課本范围的，但也有些略深，可以根据教学实际适当选用。

本会在编写本书前，曾拟就编写计划，經編輯組多次討論，确定编写提綱。然后由李承福、潘为南、施懿德諸同志提供材料，由赵型、黄松年两同志执笔写成初稿。再經余元希、楊荣祥两同志校訂，最后由楊荣祥同志作了修正。虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望同志们予以批評和指正。

中国数学会上海分会中学教学研究委员会

1958年2月

目 录

(一) 算 术

第一單元	整数	1
第二單元	量的度量	12
第三單元	整数应用問題	17
第四單元	数的整除	26
第五單元	分数和小数	33
第六單元	分数应用問題	45
第七單元	比和比例	56

(二) 代 数

第一單元	有理数	66
第二單元	整式	77
第三單元	多項式的因式分解	85
第四單元	分式	96
第五單元	一元一次方程	105
第六單元	多元一次方程組	121
第七單元	应用問題	136
第八單元	不等式	152

(三) 平面几何

第一單元	几何图形的基本概念	162
第二單元	三角形	175
第三單元	平行四边形和梯形	199
第四單元	軸对称与中心对称	235
第五單元	圓	245
第六單元	圓的内接与外切三角形和四边形	264

(一) 算 术

第一單元 整 数

I. 教材提要

§1. 自然数与自然数列 1、2、3、124、3,038 等都叫做自然数。自然数的个数是无限多的。把自然数由小到大一个一个地順次排列的这一列数 1、2、3、4、5、……叫做自然数列。自然数列的性质是：它有第一个数 1(單位)，但没有最后一个数，因而自然数列是无限的。

对自然数与自然数列这两个名称应加以区别，自然数列指的是 1、2、3……这一列“有始无終”的有順序的数列的整体，而自然数是这一数列里任何一个單独的数。

§2. 自然数的大小 自然数列里没有相同的数，对任意两个自然数列里的数，排在前面的較小，排在后面的較大。

§3. 整数 零(0)也是一个数，但不是自然数。它比任何自然数都小。零与一切自然数都叫做整数。

§4. 数与数字 表示“多少”或“哪一个”的叫做数，数用数字来表示。数是多得不得了，但在十进位記数法里用来表示数的，只有下面十个阿拉伯数字：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9。一个数里可以只有一个数字，如 4；但也可以有几个数字，如 365。

365 是用三个数字表示的数，叫做三位数。3 是百位上的数字(表示三个百，即 300)，6 是十位上的数字(表示六个拾，即 60)，5 是个位上的数字(表示五个單位，即 5)。365 是 3 个百、6 个十、5 个單位的和，但不等于三个数字的和。关于这些名称的意义，必須弄清楚。

§5. 多位数的讀法和写法 例如 601,938,035 是一个九位数,讀做六亿零一百九十三万八千零三十五,关于多位数的讀法和写法可根据課本进行复习。

§6. 数的四舍五入 有时按照实际的需要我們把数四舍五入到指定的数位,即求出这个数的精确到指定位的近似数。例如,我国在1953年6月30日24时調查得的全国人口数为 601,938,035。如果四舍五入精确到千万,我們說全国人口的近似值是6亿。又如把 23,547 四舍五入精确到1,000的近似值为 24,000,精确到100的近似值为 23,500,精确到10的近似值为 23,550。

§7. 罗馬数字与罗馬記数法

罗馬記数法用的数字(罗馬数字)是:

$$I=1, V=5, X=10, L=50, C=100.$$

1、2、3、4、5、6、7、8、9的罗馬記数法为

$$I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.$$

而 XXIV 表示 24, LXXVIII 表示 78, XCIV 表示 94。关于这部分內容可根据課本进行复习。

§8. 四种基本运算——加、減、乘、除

加法: 加数甲+加数乙=和。

減法: 被減数-減数 =差。

乘法: 被乘数×乘数 =积。(或因数甲×因数乙=积)

除法: 被除数÷除数 =商。

§9. 四种基本运算的相互关系:

1. 加法与減法互为逆运算:

例如, 加数甲+加数乙=和,

則 和 -加数甲=加数乙;

和 -加数乙=加数甲。

例如, 被減数-減数 =差,

則 差 +減数 =被減数;

且 $\text{被減數} - \text{差} = \text{減數}.$

2. 乘法是相同加數加法的簡便算法:

例如, $\text{某數} + \text{某數} = \text{某數} \times 2.$

3. 乘法與除法互為逆運算:

例如, $\text{因數甲} \times \text{因數乙} = \text{積},$

則 $\text{積} \div \text{因數甲} = \text{因數乙} (\text{如甲不是 } 0);$

$\text{積} \div \text{因數乙} = \text{因數甲} (\text{如乙不是 } 0).$

例如, $\text{被除數} \div \text{除數} = \text{商},$

則 $\text{商} \times \text{除數} = \text{被除數};$

且 $\text{被除數} \div \text{商} = \text{除數}.$

4. 在有余數的除法里:

$(\text{被除數} - \text{余數}) \div \text{除數} = \text{不完全的商},$

$\text{被除數} - \text{余數} = \text{不完全的商} \times \text{除數},$

$\text{被除數} = \text{不完全的商} \times \text{除數} + \text{余數},$

$(\text{被除數} - \text{余數}) \div \text{不完全的商} = \text{除數}.$

§10. 除和除以 $\div$ 號應讀成“除以”, 不要讀成“除”, 如 $49 \div 7$, 讀成 49 除以 7, 也可以讀成 49 被 7 除, 也可以讀成以 7 除 49, 但不能讀成 49 除 7.

§11. 關於零的乘、除運算

1. 如果一個因數是零, 不論其他因數是什麼, 積就一定等於零.

2. 如果所有的因數都不是零, 積就不會等於零.

3. 如果被除數是零, 只要除數不是零, 商總等於零.

4. 零不能當做除數. 任何數除以零, 我們都認為沒有意義.

關於零的運算, 常常容易弄錯, 希望特別注意.

§12. 基本運算律

1. 加法交換律: $a + b = b + a.$

2. 加法結合律: $(a + b) + c = a + (b + c).$

3. 乘法交換律: $a \times b = b \times a.$

4. 乘法結合律: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

5. 乘法对于加法的分配律: $(a+b) \times m = am + bm$.

§13. 乘方 相同因数相乘叫做乘方。乘方有着簡便写法, 例如 $3 \times 3 \times 3 \times 3$ 写成 3^4 , 3 叫做底数, 4 叫做指数。

§14. 运算的順序

1. 連在一起的几个加、减运算, 应自左到右依次地进行运算。

例如, $185 - 42 + 43 = 143 + 43 = 186$,

而 $185 - 42 + 43 = 100$ 是錯誤的。

2. 連在一起的几个乘、除运算, 应自左到右依次地进行运算。

例如, $500 \div 100 \times 5 = 5 \times 5 = 25$,

而 $500 \div 100 \times 5 = 1$ 是錯誤的。

3. 在沒有括号的式子里, 首先进行乘方运算, 其次进行乘、除运算, 最后进行加、减运算。

例如:

$$3 + 5 \times 6^2 - 8^2 \div 4 = 3 + 5 \times 36 - 64 \div 4 = 3 + 180 - 16 = 167.$$

4. 有括号的算式, 括号里的式子按照上面規定的順序先演算, 把括号去掉后和括号外的数再按照規定的順序演算。如果有几层括号, 就由最里层括号做起。

例如: $3 + 2 \times \{ [5 \times (3 + 4) - 2 \times 13] \div 3 - 1 \} - 2$

$$= 3 + 2 \times [(5 \times 7 - 2 \times 13) \div 3 - 1] - 2$$

$$= 3 + 2 \times [(35 - 26) \div 3 - 1] - 2$$

$$= 3 + 2 \times (9 \div 3 - 1) - 2$$

$$= 3 + 2 \times (3 - 1) - 2$$

$$= 3 + 2 \times 2 - 2$$

$$= 3 + 4 - 2$$

$$= 5.$$

§15. 根据运算律和运算性質改变运算順序

1. 利用加法交換律与加法結合律, 把能湊成整百或整十的数先相

加。例如：

$$\begin{aligned} & 10,556 + 8,074 + 9,444 + 926 + 1,047 \\ &= (10,556 + 9,444) + (8,074 + 926) + 1,047 \\ &= 20,000 + 9,000 + 1,047 = 30,047. \end{aligned}$$

2. 利用乘法交换与结合律，使乘积为某些数与 10 的方幂的积的各因数先相乘。例如：

$$\begin{aligned} & 250 \times 125 \times 4 \times 8 = (250 \times 4) \times (125 \times 8) \\ &= 1,000 \times 1,000 = 1,000,000. \end{aligned}$$

3. 利用乘法对于加法的分配律使运算趋于简捷。例如，

$$\begin{aligned} & 87 \times 156 + 11 \times 156 + 2 \times 156 \\ &= (87 + 11 + 2) \times 156 = 100 \times 156 = 15,600. \end{aligned}$$

4. 某数减去若干个数的和，可以把这个和里的各个加数分别从某数里一一减去。即

$$a - (b + c + d) = a - b - c - d.$$

例如：

$$185 - (85 + 79) = 185 - 85 - 79 = 100 - 79 = 21.$$

5. 若干个数的和减去某数，可以从这个和里的一个加数减去某数，再和其他加数相加。即

$$\begin{aligned} (a + b + c) - d &= (a - d) + b + c \quad (\text{如 } a \geq d), \\ &= a + c + (b - d) \quad (\text{如 } b \geq d), \\ &= a + b + (c - d) \quad (\text{如 } c \geq d). \end{aligned}$$

例如：

$$(279 + 36 + 64) - 179 = (279 - 179) + 36 + 64 = 200.$$

6. 用某数去乘或除两个数的差，可以用这个数分别去乘或除被减数和减数，然后从所得的第一个积或商里减去第二个积或商。（在除的时候，要每次都没有余数。）

即

$$\begin{aligned} (a - b) \times c &= a \times c - b \times c; \\ (a - b) \div c &= a \div c - b \div c. \end{aligned}$$

例如：

$$99 \times 12 = (100 - 1) \times 12 = 100 \times 12 - 1 \times 12 = 1,200 - 12 \\ = 1,188;$$

$$(700 - 112) \div 7 = 700 \div 7 - 112 \div 7 = 100 - 16 = 84.$$

7. 用某数除若干个数的和，可以用这个数分别去除各个加数（要每次除的时候都没有余数），然后把所得的各个商加起来。

即 $(a + b + c) \div d = a \div d + b \div d + c \div d.$

例如：

$$(143 + 390 + 78) \div 13 = 143 \div 13 + 390 \div 13 + 78 \div 13 \\ = 11 + 30 + 6 = 47.$$

8. 用若干个数的积去除某数，可以先用第一个因数去除某数，再用第二个因数去除所得的商，再用第三个因数去除第二次所得的商，这样依次做下去，直到最后一个因数当作除数为止。

即 $a \div (b \times c \times d) = a \div b \div c \div d.$

例如：

$$1,008 \div 42 = 1,008 \div (2 \times 3 \times 7) = 1,008 \div 2 \div 3 \div 7 \\ = 504 \div 3 \div 7 = 168 \div 7 = 24.$$

9. 用某数去除若干个数的积，可以用这个数去除积里的一个可以被它除尽的因数，再和其他的因数相乘。

即 $(a \times b \times c) \div d = a \div d \times b \times c.$

例如：

$$(351 \times 134 \times 5) \div 117 = 351 \div 117 \times 134 \times 5 \\ = 3 \times 134 \times 5 = 2,010.$$

我們要善于应用以上一些性質，使运算趋于最簡便最迅速。

§16. 已知数的变化所引起的和、差、积、商的变化

1. 关于和的变化：

(1) 如果任何一个加数增加（或减少）一个数，而其他各加数不变，那末它们的和也增加（或减少）同一个数，

(2) 如果任何一个加数增加一个数,另一个加数减少同一个数,而其他加数不变,那末它们的和不变。

2. 关于差的变化:

(1) 如果被减数增加(或减少)一个数,减数不变,那末差也增加(或减少)同一个数。

(2) 如果减数增加一个数,被减数不变,那末差就减少同一个数。

(3) 如果减数减少一个数,被减数不变,那末差就增加同一个数。

(4) 如果被减数与减数都增加同一个数,或都减少同一个数,那末差不变。

3. 关于积的变化:

(1) 如果一个因数扩大(或缩小)若干倍,其他因数不变,那末积也扩大(或缩小)同样的倍数。

(2) 如果一个因数扩大若干倍,另一个因数缩小同样的倍数,而其他因数不变,那末它们的积不变。

4. 关于商的变化(指没有余数的除法):

(1) 如果被除数扩大(或缩小)若干倍,除数不变,那末它们的商也扩大(或缩小)同样的倍数。

(2) 如果除数扩大若干倍,被除数不变,那末它们的商缩小同样的倍数。

(3) 如果除数缩小若干倍,被除数不变,那末它们的商扩大同样的倍数。

(4) 如果被除数与除数同时都扩大(或都缩小)同样的倍数,那末它们的商不变。

从这些关系中,一方面可以看出它们之间的相互依赖相互制约的关系;另一方面,应用了这些关系也可以使有些运算更为简捷。

例如:

$$3,276 - 199 = (3,276 + 1) - (199 + 1) = 3,277 - 200 = 3,077;$$

$$3,200 \div 25 = (3,200 \times 4) \div (25 \times 4) = 12,800 \div 100 = 128;$$

$$(1,755 \div 135) \times (270 \div 2) = (1,755 \times 135 \div 135) \times (270 \div 2 \div 135) \\ = 1,755 \times 1 = 1,755.$$

§17. 关于增加、扩大、减少、缩小的意义 “一个数增加多少”是指这个数加上所增加的数后的和；“一个数扩大多少倍”是指这个数乘上所扩大的倍数后的积；“一个数减少多少”是指从这个数里减去所减少的数后得到的差；“一个数缩小多少倍”是指这个数除以所缩小的倍数后的商。对这些术语的含义，我们必须弄清楚。

例如： 16 增加 3，即 19； 16 扩大 3 倍，即 48；

16 减少 4，即 12； 16 缩小 4 倍，即 4。

在日常生活中，还有增加多少倍与增加到多少倍两种不同的说法。“增加多少倍”是指所增加的数是原数的若干倍；而“增加到多少倍”是指原数加上所增加的数后所成的数是原数的若干倍。“增加到多少倍”就是扩大这些倍数；而“增加多少倍”则比扩大这些倍后的结果还多着一个原数。

兹列表说明如下：

如原数为 4	增加 6	增加 6 倍 (即扩大 7 倍)	增加到 6 倍 (即扩大 6 倍)
	$4+6=10$	$4+4 \times 6=28$	$4 \times 6=24$

II. 范 例

1. 演算：

$$(1) 6 - [4 - 4 \times (6 - 2 \times 3)];$$

$$(2) \{[(24 - 16) \times 3 - 4 \times 6] \div (36 \div 3 - 2 \times 5) + 40\} \div 4.$$

解

$$(1) \text{原式} = 6 - [4 - 4 \times (6 - 6)] = 6 - (4 - 4 \times 0) = 6 - 4 = 2;$$

$$(2) \text{原式} = [(8 \times 3 - 24) \div (12 - 10) + 40] \div 4$$

$$= (0 \div 2 + 40) \div 4 = 40 \div 4 = 10.$$

说明：关于这一类例题必须注意运算次序和零的运算。

2. 应用最简便的方法计算下列各题:

(1) $76+36+46+24+64$;

(2) $37 \times 125 \times 4 \times 4 \times 2 \times 25$;

(3) $124 \times 38 + 124 \times 51 + 124 \times 14 + 76 \times 96 + 76 \times 7$;

(4) $2,688 \div 48 + 13 \times 99$.

解

(1) $76+36+46+24+64=(76+24)+(36+64)+46=246$;

(2) $37 \times 125 \times 4 \times 4 \times 2 \times 25 = 37 \times (125 \times 4 \times 2) \times (4 \times 25)$
 $= 37 \times 1,000 \times 100 = 3,700,000$;

(3) $124 \times 38 + 124 \times 51 + 124 \times 14 + 76 \times 96 + 76 \times 7$
 $= 124 \times (38 + 51 + 14) + 76 \times (96 + 7)$
 $= 124 \times 103 + 76 \times 103 = (124 + 76) \times 103 = 200 \times 103$
 $= 20,600$;

(4) $2,688 \div 48 + 13 \times 99$
 $= 2,688 \div (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3) + 13 \times (100 - 1)$
 $= 2,688 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 3 + 13 \times 100 - 13 \times 1$
 $= 1,344 \div 2 \div 2 \div 2 \div 3 + 1,300 - 13$
 $= 672 \div 2 \div 2 \div 3 + 1,287$
 $= 336 \div 2 \div 3 + 1,287$
 $= 168 \div 3 + 1,287$
 $= 56 + 1,287$
 $= 1,343$.

说明: 关于这一类例题, 需应用各种运算定律、运算性质, 适当地变更运算次序或运算种类, 使运算趋于简便迅速。

3. 将下列各演算中所缺的数字(记有*的)填上:

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \begin{array}{r} 38 * 8 \\ 274 * \\ + 3 * 20 \\ \hline * * 143 \end{array}
 \end{array}$$

解 根据逆运算关系:

个位数上所缺的数字是 $13-8=5$, 十位数上所缺的数字是 $13-2-4=7$, 百位数上所缺的数字是 $20-15=5$, 应用加法运算得出和里所缺的两个数字分别为 1 与 0, 即本题应为:

$$3,878 + 2,745 + 3,520 = 10,143.$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad \begin{array}{r} 4 * 23 \\ - 12 * * \\ \hline * 205 \end{array}
 \end{array}$$

解 根据逆运算关系:

个位数上所缺的数字是 $13-5=8$, 十位数上所缺的数字是 $1-0=1$, 百位数上所缺数字是 $2+2=4$, 应用减法得出差里所缺数字为 $4-1=3$, 即本题应为:

$$4,423 - 1,218 = 3,205.$$

4. 某数的 12 倍减去 30, 再除以 81, 所得的商加上 4 是 6. 求这个数.

解 根据逆运算关系依次进行运算:

$$[(6-4) \times 81 + 30] \div 12 = (2 \times 81 + 30) \div 12 = 192 \div 12 = 16.$$

答: 这个数是 16.

5. 某人演算一除法题, 除数为 307, 但这人演算时误把除数当作 37, 因此得到不完全的商 58 及余数 3, 问正确答案数应该多少?

解 这一题的被除数可以从逆运算关系先求得:

$$58 \times 37 + 3 = 2,146 + 3 = 2,149.$$

于是,

$$2,149 \div 307 = 7.$$

答: 正确的商为 7.

6. 3 扩大 2 倍后再增加 3 倍,再缩小 2 倍,再增加 16,問結果是什麼?

解

$$(3 \times 2 + 3 \times 2 \times 3) \div 2 + 16 = (6 + 18) \div 2 + 16 = 12 + 16 = 28.$$

答: 結果是 28.

III. 习 題

用最簡捷的方法演算下列各題:

1. $752 + 1,248 \div (108 - 91 + 9)$;
2. $328 + 672 \div (72 \div 9 \times 4)$;
3. $511 - 11 \times (45 \div 15 \times 3)$;
4. $999 - 199 \times (15 \times 0 + 2 \div 1 + 1)$;
5. $1,500 + 500 \div (250 + 0 \div 250)$;
6. $540 \div 18 + 5 \times 64 - 40 \div 2$;
7. $(540 \div 18 + 5) \times (64 - 40 \div 2)$;
8. $540 \div 18 + 5 \times (64 - 40 \div 2)$;
9. $(540 \div 18 + 5) \times 64 - 40 \div 2$;
10. $(540 \div 18 + 5 \times 64 - 40) \div 2$;
11. $1,009 + 3,654 + 8,991 + 6,546$;
12. $78 \times 999 + 125 \times 72$;
13. $1,872 - (300 + 272 + 500)$;
14. $(72 \times 250 \times 17) + 18 + 1,692 \div 36$;
15. $(56 + 44) \times 0 + 1 \div 1 + 0 \div 100 + 9$;
16. $1 \div 1 + 0 \div 692 + 699 \div 1$;
17. $400 - 165 + 35 \div 100 + 1 \times 20$;
18. $(52 \div 13 - 4) \times (52 \div 13 + 4)$;
19. $8 - \{7 - [6 - (5 - 1) - 2] - 1\}$;
20. $1 + 2 \times \{2 + 3 \times [3 + 4 \times (4 + 5 \times 6) \times 7 + 8] - 9\}$.

寫出下列各數的讀法:

21. 32,456,718,900;
22. 270,040,057.

用羅馬數字寫出下列各數:

23. 49;

24. 87.

答案: (1) 800, (2) 349, (3) 412, (4) 402, (5) 1,502, (6) 330, (7) 1,540, (8) 250, (9) 2,220, (10) 155, (11) 20,200, (12) 86,922, (13) 800, (14) 17,047, (15) 10, (16) 700, (17) 2,270, (18) 0, (19) 2, (20) 719.

IV. 思考題

1. 在下列算式中的空白处(用 * 表示的)填上数字:

$$\begin{array}{r} (1) \quad 56*7 \\ \quad 9341 \\ + \quad *32 \\ \hline 1518* \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad 52*8 \\ - 2*1* \\ \hline *083 \end{array}$$

2. 一个数增加 3 倍后又扩大 3 倍, 再增加 100, 然后缩小 2 倍, 再减少 36, 得 50. 問原数多少? (答: 6.)

3. 以某数除 12, 再除以 2, 得商为 1, 若以这个数乘 12, 再乘以 2, 得数是什么? (答: 144.)

4. 在一个三位数里, 百位数是个位数的 50 倍, 問个位数字是百位数的几倍? 如果把这个三位数的个位数字与百位数字对調, 那末新数的百位数是个位数的几倍? (答: 2 倍, 200 倍.)

5. 在减法里, 被减数增加一个数, 同时减数减少同样的一个数, 差的变化怎样?

6. 在乘法里, 一个因数扩大 4 倍, 另一个因数扩大 3 倍, 其他因数如果不变, 积的变化怎样?

7. 在除法里, 被除数增加 7 倍, 如要使商扩大 32 倍, 除数的变化应该怎样?

8. 在两个加数的加法里, 如果一个加数增加, 另一个加数减少, 而增加与减少的数不同, 那末他們的和的变化怎样? 分別几种情况进行討論.

第二單元 量的度量

I. 教材提要

§1. 数与量 1、2、5、16 等是数, 1 小时、2 米、5 千克、16 立方厘米等是量. 小时、米、千克、立方厘米等叫做量的單位. 我們把帶有單位量的数叫做名数, 不帶單位量的数叫做不名数.

§2. 度、量、衡 測定东西的長短叫做度, 測定东西的容量或体积