中等专业学校教材

工科专业通用

高等数学

GAODENG SHUXUE

金一鷗　范尙志　黄　飞編

人民教育出版社

編写說明

本书是根据中华人民共和国教育部1963年中等专业学校工科专业通用的数学教学大綱(修訂草案)的要求，在1956年出版的中等专业学校工业性质专业适用的《高等数学》教材的基础上，参考了1960年出版的試用教材，并且吸取了几年来教学实踐的經驗編写的。在編写中，注意了与初等数学的銜接和学生的接受能力，并且加强了基本概念的讲述和实际計算技能的訓练。

本书在內容方面，比1956年的教材增加了弧的微分和曲綫的曲率，书末并增添一个附录，包括极坐标、参变量方程、簡易微分方程和簡易积分表，以适应某些专业的需要。

为了学生学习和教师选题的方便，把习题分成复习問题、习题和总习題三类，分插在各节、各章之后。其中复习問题可作为学生复习教材內容的参考，习題用于布置作业，总习题是作为复习和提高运算能力用的。

本书初稿曾于1962年印发北京、上海两市，江苏、广东、四川和辽宁等省有关学校征求意見，并請北京工业学院孙树本先生进行审閱。根据各方面的宝貴意見，編者及王延馨等同志进行了討論，作了必要的修改。在这里，对所有参加审閱和提供意見的同志們表示感謝。在編写本书初稿时，得到了江爱滋、江志信、王加秋等同志的帮助，在此一并致謝。

限于时間和編者的水平，缺点和錯誤在所难免，希各地教师和讀者予以指正。

金一鷗、范尚志、黄　飞

1963年1月

目　录

第二篇 微分学初步

第三篇 积分学初步

附　录

緒　言

在初等数学里，代数主要研究数量間的运算法則，几何主要研究图形的性质，三角虽两者兼有，但仍和代数、几何一样主要研究的还是不变的量(常量)和不变的图形，所以尙可以用靜止的观点去研究它們。而在高等数学中，解析几何、微分学、积分学所研究的对象，主要是变化的量(变量)和变化的图形，所以必須用运动的观点去研究它們。

本书共分三篇：第一篇平面解析几何学基础；第二篇微分学初步；第三篇积分学初步。

解析几何是通过笛卡儿坐标，用代数方法研究几何图形的一門課程，在这里，代数和几何密切地結合在一起了。

微分学和积分学，通常簡称为微积分学，它以无穷小量和变量的极限概念为基础，幷由此建立微积分学的基本理論和运算法則。

高等数学和其他学科一样，都是导源于生产实踐，幷为生产实踐服务的。在十七世紀，生产的迅速发展，引出了物理、天文、几何和力学上的一系列問題，而这些問題又不能从初等数学中获得解决，于是就产生了高等数学中的一些基本概念和方法，这些概念和方法是由笛卡儿、牛頓、萊布尼茲等数学家，总結了前人的經驗而創立的。

高等数学是学好基础技术課和专业課的重要工具，我們必須很好掌握它。

第一篇　平面解析几何学基础

解析几何是以代数方法研究几何图形的一門数学，它把几何問題化为代数的計算来研究，使数与形密切地結合起来，这种結合的基本方法是坐标法。

第一章　坐标法

用数表示点的位置的方法叫做坐标法。例如：用一个实数来表示直綫上一点的位置；用一对实数来表示平面上一点的位置等，这些在代数里都已經讲过。但坐标法是高等数学中最基本的問題，因此，我們有必要再加以闡述。

§1-1　平面上点的直角坐标

确定平面上点的位置的一对实数，叫做这个点的**坐标**。各种坐标中，最常用的是直角坐标。

在平面上取两条有方向而且互相垂直的直綫，这两条直綫叫做**坐标軸**；水平直綫 Ox 叫做**横軸**，鉛垂直綫 Oy 叫做**纵軸**，它們的交点 O 叫做**坐标原点**。并取定一个长度单位[①]（图 1-1）。在 Ox 軸上規定由原点起向右为正方向，向左为負方

① 一般两軸上取同一个长度单位，但也可以各取不同的长度单位。

向；在 Oy 軸上由原点起向上为正方向，向下为負方向。Ox 軸、Oy 軸、原点 O，以及所取定的长度单位全体，称为**直角坐标系或笛卡儿坐标系**[①]。

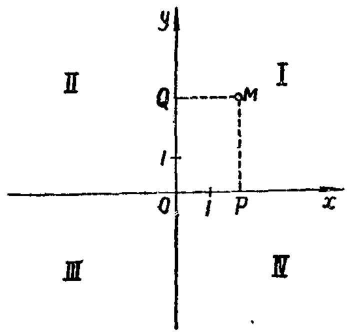

图 1-1

設 M 为坐标平面上任一点，过 M 点向 Ox 軸及 Oy 軸作垂綫，其垂足分别为 P 和 Q（图 1-1）。用取定长度单位量 OP 所得的数 x，叫做 M 点的**横坐标**（簡称横标），如 P 在 O 点的右边，横标 x 为正数，如在左边，則为負数。

用同样长度单位量 OQ 所得的数 y，叫做 M 点的**纵坐标**（簡称纵标），如 Q 在 O 点的上方，纵标 y 为正数，如在下方，則为負数。

上面所說的一对实数 x 和 y 叫做 M 点的坐标，記作 $M(x, y)$。

因为有了 M 点就确定了 P 点和 Q 点，随之也就得到唯一的一对实数 x 和 y。反之，对于任一对实数 x 和 y，可以在横軸与纵軸上分别定出 P 点和 Q 点，从这两点各引垂直于坐标軸的垂綫，就得到它們唯一确定的交点 M。从这里知道平面上的一点 M 与一对实数 x 和 y 之間有一一对应的关系。

Ox 軸与 Oy 軸将平面分为四部分，各部分叫做**象限**。由

① 笛卡儿是法国的数学家和哲学家，他总結了前人的經驗，于 1637 年发表过解析几何学的最初著作。

点的两个坐标都为正的那个象限开始，按反时針的方向依次叫做第一，第二，第三与第四象限(图 1-1 中分别用 I, II, III 与 IV 来表示)，那末在各个象限內点的坐标符号如下表所示:

坐标 \ 符号 \ 象限	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

坐标法是数与形相結合的基本方法，所以讀者应該牢固地掌握下面两个問題的解法:

1° 由已知点 M，求它的坐标;

2° 由已知坐标(x, y)，求它所确定的点。

例 1. 图 1-2 中的点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，$M_3(x_3, y_3)$，$M_4(x_4, y_4)$，$M_5(x_5, y_5)$和$M_6(x_6, y_6)$有坐标:

1° $x_1 = Q_1M_1 = OP_1 = +4$,

$y_1 = P_1M_1 = OQ_1 = +3$;

2° $x_2 = Q_2M_2 = OP_2 = -1$,

$y_2 = P_2M_2 = OQ_2 = +2$;

3° $x_3 = Q_3M_3 = OP_3 = -4$,

$y_3 = P_3M_3 = OQ_3 = -3$;

4° $x_4 = Q_3M_4 = OP_1 = +4$,

$y_4 = P_1M_4 = OQ_3 = -3$;

5° $x_5 = 0$,

$y_5 = OM_5 = +4$;

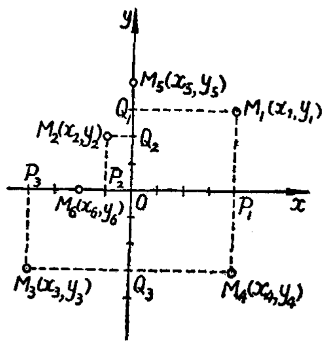

图 1-2

6° $x_6=OM_6=-2$,

$y_6=0$。

又从图 1-2 中容易看出来：如果点在横軸上，則它的纵标 y 等于零；如果点在纵軸上，則它的横标等于零；如果点与坐标原点重合，則它的坐标 x 和 y 都等于零。

例 2. 作出下列各点：

1° $M_1(4,3)$;

2° $M_2(-1,2)$;

3° $M_3(-4,-3)$;

4° $M_4(4,-3)$;

5° $M_5(0,4)$。

解： 如图 1-3 的作法，便可得出上述各点。

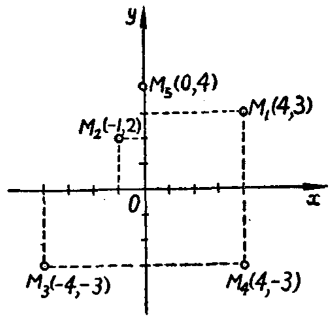

图 1-3

根据平面几何中关于点的軸对称和中心对称的定义，从图 1-3 中可以看出：

点 M_1 与 M_4 的横标相等，纵标的絕对值相等而符号相反，显然它們是关于 Ox 軸对称的；

点 M_4 与 M_3 的纵标相等，横标的絕对值相等而符号相反，显然它們是关于 Oy 軸对称的；

点 M_1 与 M_3 的横标及纵标都是絕对值相等，符号相反，显然它們是关于原点对称的。

例 3. 如果点 $A(a,3)$ 是在第二象限內（图 1-4），試写出与它关于

1° Ox 軸；2° Oy 軸；3° 原点

对称的点的坐标。

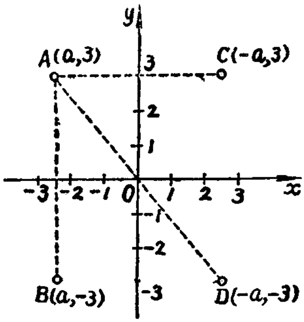

图 1-4

解: 如图 1-4 可知:

1° 与点 $A(a,3)$ 关于 Ox 軸对称的点 B 的坐标为 $(a, -3)$;

2° 与点 $A(a,3)$ 关于 Oy 軸对称的点 C 的坐标为 $(-a,3)$;

3° 与点 $A(a,3)$ 关于原点对称的点 D 的坐标为 $(-a, -3)$。

例 4. 設边长为 4 的正三角形，它的底边与 Ox 軸重合，而且这条边的中点是原点。求这个三角形的三个頂点的坐标。

解: 設这个正三角形的第三个頂点 C 落在 Oy 軸的正的一半上(图 1-5)。因为 $\triangle AOC$ 是直角三角形，且 $\angle CAO = 60°$，所以

$$OC = AC \cdot \sin 60° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

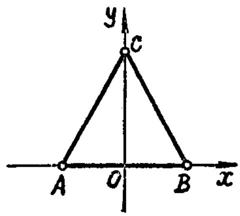

图 1-5

于是三个頂点的坐标分别是: $A(-2,0)$, $B(2,0)$ 和 $C(0, 2\sqrt{3})$。

如果頂点 C 落在 Oy 軸的負的一半上，那末三个頂点的坐标分别是 $A(-2,0)$, $B(2,0)$ 和 $C(0, -2\sqrt{3})$。

§1-2 两点間的距离

假設有两个点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$。試用坐标来表示它們間的距离。

設A与B的距离为d，如图1-6由A点与B点分别作Ox軸的垂綫AP与BQ，并經过A点引平行Ox軸的直綫AC交BQ于C，则得直角三角形ABC。由勾股定理得

$$d^2=AB^2=AC^2+CB^2. \quad (1)$$

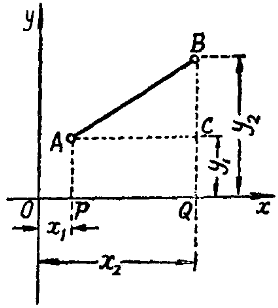

图 1-6

但

$$AC=PQ=OQ-OP=x_2-x_1,$$

$$CB=QB-QC=$$

$$=QB-PA=y_2-y_1.$$

将AC与CB这两个值代入等式(1)，得

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

由此，得

$$\boldsymbol{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}. \quad (\mathrm{I})$$

在根式前面永远取正号(+)，因为两点間的距离永远是正的。应当注意，在推演公式(I)的时候，我們假設A与B两点都在第一象限，因此，它們的坐标都是正的。同样可以证明A与B两点在任何其他一个象限或者分别在两个象限时，上面的公式也都是成立的。这个公式用語言叙述出来，就是：两点間的距离等于这两个点的同名坐标之差的平方和的平方根。

如果两点中有一点是坐标原点，即(0,0)，另一点的坐标是(x,y)，那末这一点到原点的距离公式为

$$\boldsymbol{d=\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (\mathrm{II})$$

例1. **試求$A(-3,5)$和$B(1,2)$两点之間的距离。**

解: 由已知条件可知 $x_1=-3$, $y_1=5$; $x_2=1$, $y_2=2$。把这些坐标代入公式(I), 得

$$AB=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}=$$
$$=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5.$$

例 2. 求与已知点 $M_1(1,2)$; $M_2(-1,-2)$; $M_3(2,-5)$ 等距离的一点。

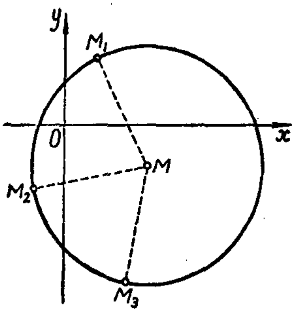

图 1-7

解: 在平面上, 有了一点的坐标, 就可以找到这个点。所以在解析几何里求一点就是求它的坐标。

假設 x, y 为所求点 M 的坐标。由已知条件, 得

$$MM_1=MM_2,$$
$$MM_2=MM_3.$$

按公式(I), 得

$$MM_1=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2};$$
$$MM_2=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2};$$
$$MM_3=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}$$

于是得方程組

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2},\\ \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}.\end{cases}$$

解之, 得 $x=\frac{8}{3}$, $y=-\frac{4}{3}$[①], 因此所求的点是 $M\Big(\frac{8}{3},$

---

① 本书凡遇到解无理方程和分式方程所得到的根, 都是經过驗算的。

$-\frac{4}{3}\Big)$。

显然，求得的点 $M\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ 就是过三个已知点 M_1, M_2, M_3 的圓的中心(图 1-7)。

例 3. 設 $A(1,5)$ 和 $B(x, 2)$ 两点間的距离为 5，求 B 点的横标 x。

解： 由已知条件可知 $x_1=1$，$y_1=5$；$x_2=x$，$y_2=2$。

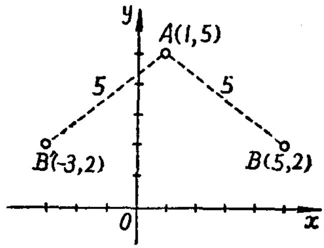

图 1-8

把这些坐标代入公式(I)，得

$$\sqrt{(x-1)^2+(2-5)^2}=5.$$

两边各自平方，并整理，便得

$$x^2-2x-15=0.$$

解这二次方程，可得

$$x=-3 \text{ 或 } x=5.$$

于是知所求 B 点的横标为 -3 或 5 (如图 1-8)。

复习問題

1. 什么叫做坐标法、直角坐标系和点的坐标？
2. 試述两点間的距离公式。它是怎样证明的？

习題 1-1

1. 平行于

$1°$ Ox 軸；　　$2°$ Oy 軸

的直綫上的点，它們的坐标有什么特点？

2. 在坐标軸夹角的平分綫上的点，它們的坐标有什么关系？

3. 写出图 1-9 中各点的坐标。

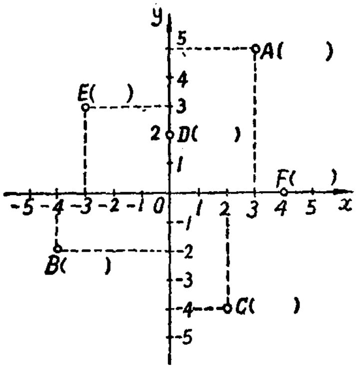

图 1-9

4. 作出下列各点并指出哪些点是关于 Ox 軸、Oy 軸、原点对称的。

1° $A(1,1)$; 2° $B(3,1)$; 3° $C(5,-2)$;

4° $D(-3,1)$; 5° $E\left(0,2\frac{1}{2}\right)$; 6° $F\left(0,-2\frac{1}{2}\right)$;

7° $G(-1,-1)$; 8° $H(0,0)$.

5. 如果点 $M(2,b)$ 是在第四象限內，試写出与它关于

1° Ox 軸；2° Oy 軸；3° 原点

对称的点的坐标。

6. 图 1-10 中，$ABCDEF$ 是正六边形，中心在原点，边长为 a，求它的六个頂点的坐标。

7. 試在横軸上求一点 A，使它与点 $B(4,6)$ 的距离为 10 个单位。

8. 已知一个三角形的三个頂点分别为 $(3,4)$，$(-2,4)$，$(2,2)$，試求它的周长。

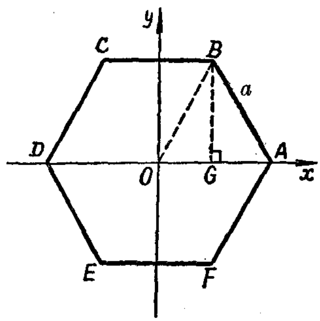

图 1-10