

中等专业学校教材

工科专业通用

高等数学

GAODENG SHUXUE

金一鷗 范尙志 黃 飞編



人民教育出版社

編 写 說 明

本书是根据中华人民共和国教育部 1963 年中等专业学校工科专业通用的数学教学大綱(修訂草案)的要求,在 1956 年出版的中等专业学校工业性质专业适用的《高等数学》教材的基础上,参考了 1960 年出版的試用教材,并且吸取了几年来教学实践的經驗編写的。在編写中,注意了与初等数学的衔接和学生的接受能力,并且加强了基本概念的讲述和实际計算技能的訓練。

本书在內容方面,比 1956 年的教材增加了弧的微分和曲綫的曲率,书末并增添一个附录,包括极坐标、参变量方程、簡易微分方程和簡易积分表,以适应某些专业的需要。

为了学生学习和教师选题的方便,把习题分成复习問題、习题和总习题三类,分插在各节、各章之后。其中复习問題可作为学生复习教材內容的参考,习题用于布置作业,总习题是作为复习和提高运算能力用的。

本书初稿曾于 1962 年印发北京、上海两市,江苏、广东、四川和辽宁等省有关学校征求意见,并請北京工业学院孙树本先生进行审阅。根据各方面的宝贵意見,編者及王延馨等同志进行了討論,作了必要的修改。在这里,对所有参加审阅和提供意見的同志們表示感謝。在編写本书初稿时,得到了江爱滋、江志信、王加秋等同志的帮助,在此一并致謝。

限于時間和編者的水平, 缺点和錯誤在所难免, 希各地教師和讀者予以指正。

金一鷗、范尚志、黃 飛

1963年1月

目 录

編写說明	Ⅶ
緒言	1

第一篇 平面解析几何学基础

第一章 坐标法	2
§ 1-1 平面上点的直角坐标	2
§ 1-2 两点間的距离	6
§ 1-3 綫段的定比分割	11
第一章总习题	16
第二章 直綫	18
§ 2-1 直綫的方程的概念	18
§ 2-2 平行于坐标軸的直綫的方程 坐标軸的方程	21
§ 2-3 直綫的斜角与斜率	23
§ 2-4 直綫的方程的两种主要形式	27
§ 2-5 直綫的一般方程	30
§ 2-6 两直綫的夹角	35
§ 2-7 两直綫平行和垂直的条件	39
§ 2-8 两直綫的交点	42
第二章总习题	46
第三章 二次曲綫	50
§ 3-1 曲綫与方程	50
§ 3-2 圓	53
§ 3-3 橢圓	59
§ 3-4 橢圓形状的研究	61
§ 3-5 橢圓的离心率 橢圓与圓的关系	66
§ 3-6 双曲綫	70
§ 3-7 双曲綫形状的研究	73
§ 3-8 双曲綫的漸近綫	75
§ 3-9 双曲綫的离心率	79
§ 3-10 等軸双曲綫	80
§ 3-11 抛物綫	84

§ 3-12 抛物线形状的研究	86
§ 3-13 二次函数 $y = Ax^2 + Bx + C$ 的图象	91
§ 3-14 二次曲线是圆锥截线	95
第三章总习题	98

第二篇 微分学初步

第四章 极限的理论	103
§ 4-1 绝对值概念与有关的基本公式	103
§ 4-2 无穷小量	106
§ 4-3 无穷大量	111
§ 4-4 无穷大量与无穷小量的关系	113
§ 4-5 无穷小量的基本性质	114
§ 4-6 变量的极限	117
§ 4-7 关于变量的极限的基本定理	121
§ 4-8 无穷小量的比较	126
第四章总习题	130
第五章 函数与函数的连续性	131
§ 5-1 函数及函数的定义域	131
§ 5-2 复合函数	137
§ 5-3 基本初等函数与初等函数	139
§ 5-4 函数的增量	145
§ 5-5 函数的连续性及连续函数的极限的求法	148
第五章总习题	156
第六章 导数	158
§ 6-1 函数的变化率——导数的概念	158
§ 6-2 求导数的一般法则	164
§ 6-3 曲线的切线 曲线的斜率 导数的几何意义	168
§ 6-4 导数的存在与函数连续性的关系	172
§ 6-5 求导数的基本公式和法则	174
§ 6-6 常量的导数	176
§ 6-7 自变量(即函数 $y=x$)的导数	176
§ 6-8 函数的代数和的导数	177
§ 6-9 两个函数乘积的导数	178
§ 6-10 指数为正整数时的幂函数的导数	179
§ 6-11 两个函数之商的导数	185

§ 6-12 复合函数的导数	188
§ 6-13 当 $x \rightarrow 0$ 时, 比 $\frac{\sin x}{x}$ 的极限	193
§ 6-14 三角函数的导数	195
§ 6-15 数 e 自然对数	200
§ 6-16 对数函数的导数	202
§ 6-17 指数为任何实数时的幂函数的导数	205
§ 6-18 指数函数的导数	206
§ 6-19 反三角函数的导数	209
§ 6-20 二阶导数 二阶导数的力学意义	213
第六章总习题	215
第七章 导数的应用	218
§ 7-1 函数的增减性	219
§ 7-2 函数的极大值和极小值	225
§ 7-3 求函数极值的第一法则	227
§ 7-4 极值的应用问题	232
§ 7-5 曲线的凹凸和拐点	239
§ 7-6 求函数极值的第二法则	247
§ 7-7 函数作图	252
第七章总习题	257
第八章 微分及其应用	260
§ 8-1 函数的微分	260
§ 8-2 微分的几何意义	263
§ 8-3 微分的求法	264
§ 8-4 微分在近似计算上的应用	268
§ 8-5 弧的微分	275
§ 8-6 曲线的弯曲程度——曲率	277
§ 8-7 曲率圆和曲率半径	283
第八章总习题	286

第三篇 积分学初步

第九章 不定积分	288
§ 9-1 原函数的概念	288
§ 9-2 不定积分	291
§ 9-3 由初始条件决定积分常量	294

§ 9-4 积分法的基本公式和法则	297
§ 9-5 直接积分法	301
§ 9-6 代换积分法	306
第九章总习题	320
第十章 定积分	322
§ 10-1 定积分的概念	322
§ 10-2 定积分的计算公式	329
§ 10-3 定积分的性质	333
第十一章 定积分的应用	338
§ 11-1 平面图形的面积	338
§ 11-2 旋成体的体积	344
§ 11-3 变力所作的功	350
§ 11-4 液体的压力	354
第十一章总习题	359
附 录	
第十二章 极坐标 参变量方程	361
I 极坐标	361
§ 12-1 平面上点的极坐标	361
§ 12-2 曲线的极坐标方程	363
§ 12-3 极坐标方程的作图法	365
§ 12-4 极坐标与直角坐标的关系	369
II 参变量方程	372
§ 12-5 参变量方程的概念	372
§ 12-6 参变量方程的作图法	374
§ 12-7 椭圆、摆线和圆的渐伸线的参变量方程	376
第十三章 简易微分方程	382
§ 13-1 基本概念	382
§ 13-2 可分离变量的一阶微分方程	386
简易积分表及其使用法	394
习题答案	412

緒 言

在初等数学里,代数主要研究数量間的运算法則,几何主要研究图形的性质,三角虽两者兼有,但仍和代数、几何一样主要研究的还是不变的量(常量)和不变的图形,所以尚可以用靜止的观点去研究它們。而在高等数学中,解析几何、微分学、积分学所研究的对象,主要是变化的量(变量)和变化的图形,所以必須用运动的观点去研究它們。

本书共分三篇:第一篇平面解析几何学基础;第二篇微分学初步;第三篇积分学初步。

解析几何是通过笛卡儿坐标,用代数方法研究几何图形的一門課程,在这里,代数和几何密切地結合在一起了。

微分学和积分学,通常簡称为微积分学,它以无穷小量和变量的极限概念为基础,并由此建立微积分学的基本理論和运算法則。

高等数学和其他学科一样,都是导源于生产实践,并为生产实践服务的。在十七世紀,生产的迅速发展,引出了物理、天文、几何和力学上的一系列問題,而这些問題又不能从初等数学中获得解决,于是就产生了高等数学中的一些基本概念和方法,这些概念和方法是由笛卡儿、牛頓、萊布尼茲等数学家,总结了前人的經驗而創立的。

高等数学是学好基础技术課和专业課的重要工具,我們必須很好掌握它。

第一篇 平面解析几何学基础

解析几何是以代数方法研究几何图形的一門数学，它把几何問題化为代数的計算来研究，使数与形密切地結合起来，这种結合的基本方法是坐标法。

第一章 坐标法

用数表示点的位置的方法叫做坐标法。例如：用一个实数来表示直綫上一点的位置；用一对实数来表示平面上一点的位置等，这些在代数里都已經讲过。但坐标法是高等数学中最基本的問題，因此，我們有必要再加以闡述。

§ 1-1 平面上点的直角坐标

确定平面上点的位置的一对实数，叫做这个点的坐标。各种坐标中，最常用的是直角坐标。

在平面上取两条有方向而且互相垂直的直綫，这两条直綫叫做坐标軸；水平直綫 Ox 叫做橫軸，鉛垂直綫 Oy 叫做縱軸，它們的交点 O 叫做坐标原点。并取定一个长度单位^①（图 1-1）。在 Ox 軸上規定由原点起向右为正方向，向左为負方

① 一般兩軸上取同一个长度单位，但也可以各取不同的长度单位。

向;在 Oy 轴上由原点起向上为正方向, 向下为负方向。 Ox 轴、 Oy 轴、原点 O , 以及所取定的长度单位全体, 称为直角坐标系或笛卡儿坐标系^①。

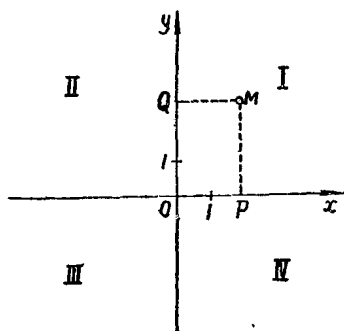


图 1-1

設 M 为坐标平面上任一点, 过 M 点向 Ox 轴及 Oy 轴作垂綫, 其垂足分别为 P 和 Q (图 1-1)。用取定长度单位量 OP 所得的数 x , 叫做 M 点的横坐标(简称横标), 如 P 在 O 点的右边, 横标 x 为正数, 如在左边, 则为负数。

用同样长度单位量 OQ 所得的数 y , 叫做 M 点的纵坐标(简称纵标), 如 Q 在 O 点的上方, 纵标 y 为正数, 如在下方, 则为负数。

上面所說的一对实数 x 和 y 叫做 M 点的坐标, 記作 $M(x, y)$ 。

因为有了 M 点就确定了 P 点和 Q 点, 随之也就得到唯一的一对实数 x 和 y 。反之, 对于任一对实数 x 和 y , 可以在横轴与纵轴上分别定出 P 点和 Q 点, 从这两点各引垂直于坐标轴的垂綫, 就得到它們唯一确定的交点 M 。从这里知道平面上的一点 M 与一对实数 x 和 y 之間有一一对应的关系。

Ox 轴与 Oy 轴将平面分为四部分, 各部分叫做象限。由

^① 笛卡儿是法国的数学家和哲学家, 他总结了前人的經驗, 于 1637 年发表过解析几何学的最初著作。

点的两个坐标都为正的那个象限开始，按反时针的方向依次叫做第一，第二，第三与第四象限(图 1-1 中分别用 I, II, III 与 IV 来表示)，那末在各个象限内点的坐标符号如下表所示：

象限 符号 坐标	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

坐标法是数与形相结合的基本方法，所以读者应该牢固地掌握下面两个问题的解法：

1° 由已知点 M ，求它的坐标；

2° 由已知坐标 (x, y) ，求它所确定的点。

例 1. 图 1-2 中的点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$ 和 $M_6(x_6, y_6)$ 有坐标：

$$1^\circ x_1 = Q_1 M_1 = OP_1 = +4,$$

$$y_1 = P_1 M_1 = OQ_1 = +3;$$

$$2^\circ x_2 = Q_2 M_2 = OP_2 = -1,$$

$$y_2 = P_2 M_2 = OQ_2 = +2;$$

$$3^\circ x_3 = Q_3 M_3 = OP_3 = -4,$$

$$y_3 = P_3 M_3 = OQ_3 = -3;$$

$$4^\circ x_4 = Q_4 M_4 = OP_1 = +4,$$

$$y_4 = P_1 M_4 = OQ_3 = -3;$$

$$5^\circ x_5 = 0,$$

$$y_5 = OM_5 = +4;$$

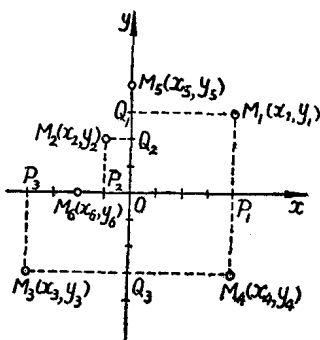


图 1-2

$$6^\circ \quad x_6 = OM_6 = -2,$$

$$y_6 = 0.$$

又从图 1-2 中容易看出来: 如果点在横轴上, 则它的纵标 y 等于零; 如果点在纵轴上, 则它的横标等于零; 如果点与坐标原点重合, 则它的坐标 x 和 y 都等于零。

例 2. 作出下列各点:

$$1^\circ \quad M_1(4, 3);$$

$$2^\circ \quad M_2(-1, 2);$$

$$3^\circ \quad M_3(-4, -3);$$

$$4^\circ \quad M_4(4, -3);$$

$$5^\circ \quad M_5(0, 4).$$

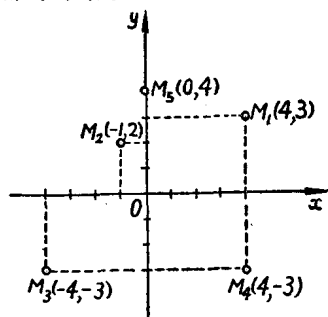


图 1-3

解: 如图 1-3 的作法, 便

可得出上述各点。

根据平面几何中关于点的轴对称和中心对称的定义, 从图 1-3 中可以看出:

点 M_1 与 M_4 的横标相等, 纵标的绝对值相等而符号相反, 显然它们是关于 Ox 轴对称的;

点 M_4 与 M_3 的纵标相等, 横标的绝对值相等而符号相反, 显然它们是关于 Oy 轴对称的;

点 M_1 与 M_3 的横标及纵标都是绝对值相等, 符号相反, 显然它们是关于原点对称的。

例 3. 如果点 $A(a, 3)$ 是在第二象限内(图 1-4), 试写出与它关于

1° Ox 轴; 2° Oy 轴; 3° 原点

对称的点的坐标。

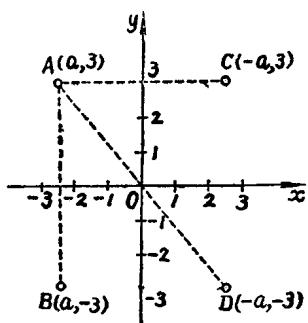


图 1-4

解: 如图 1-4 可知:

1° 与点 $A(a, 3)$ 关于 Ox 轴对称的点 B 的坐标为 $(a, -3)$;

2° 与点 $A(a, 3)$ 关于 Oy 轴对称的点 C 的坐标为 $(-a, 3)$;

3° 与点 $A(a, 3)$ 关于原点对称的点 D 的坐标为 $(-a, -3)$ 。

例 4. 设边长为 4 的正三角形, 它的底边与 Ox 轴重合, 而且这条边的中点是原点。求这个三角形的三个顶点的坐标。

解: 设这个正三角形的第三个顶点 C 落在 Oy 轴的正的一半上(图 1-5)。因为 $\triangle AOC$ 是直角三角形, 且 $\angle CAO = 60^\circ$, 所以

$$\begin{aligned} OC &= AC \cdot \sin 60^\circ = \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

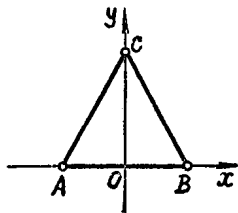


图 1-5

于是三个顶点的坐标分别是: $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 和 $C(0, 2\sqrt{3})$ 。

如果顶点 C 落在 Oy 轴的负的一半上, 那末三个顶点的坐标分别是 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 和 $C(0, -2\sqrt{3})$ 。

§ 1-2 两点间的距离

假设有两个点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 。试用坐标来表示它们间的距离。

設 A 与 B 的距离为 d , 如图 1-6 由 A 点与 B 点分別作 Ox 軸的垂綫 AP 与 BQ , 并經過 A 点引平行 Ox 軸的直綫 AC 交 BQ 于 C , 則得直角三角形 ABC . 由勾股定理得

$$d^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2. \quad (1)$$

但

$$AC = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1,$$

$$\begin{aligned} CB &= QB - QC = \\ &= QB - PA = y_2 - y_1. \end{aligned}$$

將 AC 与 CB 这两个值代入等式(1), 得

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

由此, 得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (I)$$

在根式前面永远取正号(+), 因为两点間的距离永远是正的。应当注意, 在推演公式(I)的时候, 我們假設 A 与 B 两点都在第一象限, 因此, 它們的坐标都是正的。同样可以证明 A 与 B 两点在任何其他一个象限或者分別在两个象限时, 上面的公式也都是成立的。这个公式用語言叙述出来, 就是: 两点間的距离等于这两个点的同名坐标之差的平方和的平方根。

如果两点中有一点是坐标原点, 即 $(0, 0)$, 另一点的坐标是 (x, y) , 那末这一点到原点的距离公式为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (II)$$

例 1. 試求 $A(-3, 5)$ 和 $B(1, 2)$ 两点之間的距离。

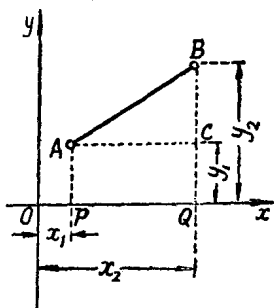


图 1-6

解: 由已知条件可知 $x_1 = -3, y_1 = 5; x_2 = 1, y_2 = 2$ 。

把这些坐标代入公式(I), 得

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{[1 - (-3)]^2 + (2 - 5)^2} = \\ &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

例2. 求与已知点 $M_1(1, 2); M_2(-1, -2); M_3(2, -5)$

等距离的一点。

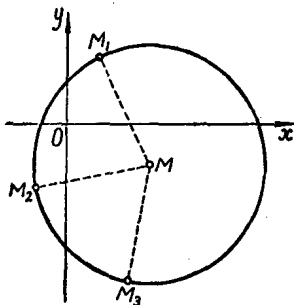


图 1-7

解: 在平面上, 有了一点
的坐标, 就可以找到这个点。所以
在解析几何里求一点就是求
它的坐标。

假设 x, y 为所求点 M 的
坐标。由已知条件, 得

$$MM_1 = MM_2,$$

$$MM_2 = MM_3.$$

按公式(I), 得

$$MM_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2};$$

$$MM_2 = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2};$$

$$MM_3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}$$

于是得方程组

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}, \\ \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}. \end{cases}$$

解之, 得 $x = \frac{8}{3}, y = -\frac{4}{3}$ ^①, 因此所求的点是 $M(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3})$ 。

① 本书凡遇到解无理方程和分式方程所得到的根, 都是经过验算的。

$$-\frac{4}{3})。$$

显然, 求得的点 $M(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3})$ 就是过三个已知点 M_1, M_2, M_3 的圆的中心(图 1-7)。

例 3. 设 $A(1, 5)$ 和 $B(x, 2)$ 两点间的距离为 5, 求 B 点的横标 x 。

解: 由已知条件可知 $x_1 = 1, y_1 = 5; x_2 = x, y_2 = 2$ 。

把这些坐标代入公式(I),

得

$$\sqrt{(x-1)^2 + (2-5)^2} = 5.$$

两边各自平方, 并整理, 便得

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

解这二次方程, 可得

$$x = -3 \text{ 或 } x = 5.$$

于是知所求 B 点的横标为 -3 或 5 (如图 1-8)。

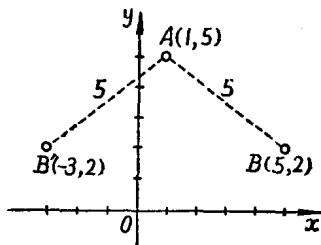


图 1-8

复习问题

1. 什么叫做坐标法、直角坐标系和点的坐标?
2. 试述两点间的距离公式。它是怎样证明的?

习题 1-1

1. 平行于

1° Ox 轴;

2° Oy 轴

的直线上的点, 它们的坐标有什么特点?

2. 在坐标轴夹角的平分线上的点, 它们的坐标有什么关系?
3. 写出图 1-9 中各点的坐标。

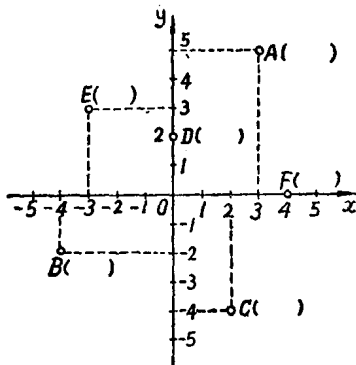


图 1-9

4. 作出下列各点并指出哪些点是关于 Ox 轴、 Oy 轴、原点对称的。
 - 1° $A(1, 1)$; 2° $B(3, 1)$; 3° $C(5, -2)$;
 - 4° $D(-3, 1)$; 5° $E(0, 2\frac{1}{2})$; 6° $F(0, -2\frac{1}{2})$;
 - 7° $G(-1, -1)$; 8° $H(0, 0)$.
5. 如果点 $M(2, b)$ 是在第四象限内, 试写出与它关于
 - 1° Ox 轴; 2° Oy 轴; 3° 原点

对称的点的坐标。

6. 图 1-10 中, $ABCDEF$ 是正六边形, 中心在原点, 边长为 a , 求它的六个顶点的坐标。

7. 试在横轴上求一点 A , 使它
与点 $B(4, 6)$ 的距离为 10 个单位。

8. 已知一个三角形的三个顶点分别为 $(3, 4)$, $(-2, 4)$, $(2, 2)$, 试求它的周长。

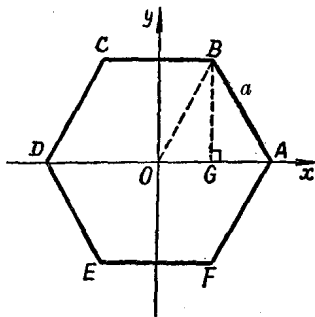


图 1-10