大学微积分自习手册

（上册）

原　序

這八章程序教材，是爲大學一年級編訂一套完整而標準的微積分敎材而設計，對每學期選修五門課程的學生，最後一章的材料，有時可以留待二年級實施。本書以用做微積分的基本敎材最佳，也可作爲一般敎材的輔助讀物。

程序敎材的使用，是當要點提出之後，必須立刻得到反應，緊接着更是一個用來做比較的正確答案。程序敎學的重點，在於要求學生的活動，並全盤控制這項活動的過程。在學生心無旁騖或課堂討論時間不夠充裕的情況，這套循序漸進的方法似乎特別有益。

敎育傳播委員會（CEM）的「程序敎學計劃」，在國家科學基金會經費支援下編訂了這套敎材。本會在美國數學協會之下奉命成立以後，藉種種不同的媒介，例如電影，電視，程序敎學法，或聯合各媒介組成的敎學體系等等，在敎材表現的技術和方法方面，近來都有長足的進步；而本會特別重視如何最有效地運用這些方法，來改進大學程度的數學敎學。

本會把一年級微積分課程的題材列爲最優先，因爲在微積分方面，似乎缺乏適宜的程序敎材，作爲傳播材料有效運用的硏究；於是本會編輯小組在史丹福大學歷經三個暑期（1964 至 1966 年），編訂了這一套書籍。

1964 年和 1965 年的初稿，稱爲「微積分程序專題」，以少量的暫制版本印行，然後在下一敎育年度中試敎，以便獲得課堂的評價實效，作爲修訂之用。所以現在這一套程序敎材，就是初版材料的修正本。

本人是敎育傳播委員會「程序敎學計劃」的主持人，曾蒙許多人士

的關切，支援和合作，由於人數過多，無法一一登錄，只好把直接參與本計劃的團體名稱列舉出來。我要感謝的，有美國數學協會的各位理事；本委員會的委員，職員和計劃指導人員；國家科學基金會的各位代表；史丹福大學很多教授和職員先生；試教教學計劃顧問委員會的各位委員先生。

三個執筆團體間的互助，熱誠，和敬業的精神，尤其令人感佩。還有志願參加支援執筆先生的助編人員，本人必須謹致個人的謝意，因限於篇幅，不能刊載芳名，深表抱歉。

教育傳播委員會
程序教學計劃
主 持 人
傑　　爾

給讀者的說明

這是一本程序敎材，它和一般敎本不同的地方有下列各點：

1.給你提供的要點，是一些簡短而編成號碼的小節，稱爲進度。

2.大部份的進度，是要你對一個問題立刻發生反應，來測驗你關於進度中要點的了解情況。

3.可以馬上把你的答案，和進度下方解答欄中的正確答案作一比較。

在提供摘要，自我測驗，複習及習題方面，與一般敎本無異，所不同的，是有更詳盡的解答和剖析。

爲了能夠從程序敎材中獲取最大的裨益，你必須：

1.準備鉛筆和紙張，寫出你的答案。可以寫在書上，也可以寫在另一張紙上，那要看你打算將來怎樣處置本書而定。

2.在你着手書寫所有問題的解答而未完成以前，始終要把解答欄遮蓋起來。

3.把你的答案和書上的答案比較一下。

4.確認你的答案是和書上的答案符合或相當。如果你的答案錯了，再看一遍，直到了解什麼地方做得不對爲止。有些解答欄中，寫在括弧裡面的其他答案和解釋，並不希望也爲你的答案所包括，只是給你參考而已。

5.細心閱讀並遵行各項說明。有些進度，談到完成某一節的途徑或方法，告訴你要去複習或略去不做，你的取捨，完全看你在該進度中的表現而定。

各章以第一章，第二章，第三章等等標明，每章中的各節，按次編號，例如3.2節，就是第三章，第二節。在每節中，各進度依次編號，提到本節中某一進度時，只說進度的號數，例如，進度27；提到不同

章節的進度時，用全部的編號，例如，進度3.3.28，就是第三章，第3節，第28個進度。

特別重要的題材，如定義，定理，或推論，則在兩個星號之間，標明進度的全部編號，如 *3.2.28*。這些題材，可以查閱各册書末所彙列的「摘述備查」；在書末也有「符號彙錄」，便於查閱。

如果你能夠去精讀，去思考，並遵從上述的指示去實行，那麼這套設計出來的教材，不必他山之助，便可順利地圓滿學成。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

上　冊
目　錄

(二) 定積分

第三章 有界集合與有界函數

第四章 定積分

第一章

函數、極限、連續性

致讀者：

爲了對本書的
有效使用起見
你必須先看扉頁中
「給讀者的説明」

1.1 基本集合論

1　基本集合論所用語言與符號，因其使用方便，含義嚴密，故在本書中應用範圍極為廣泛，本節將介紹有關基本集合論之專用名詞與符號。

集合．元素．元素之隸屬　（進度2－21）

2　如讀者對此進度已有完全而正確之了解，則可逕閱進度22，否則必須自進度3繼續研讀，設 $A=\{2,4,6,8\}$ 與 $B=\{x \mid x>10\}$。試就下列各敘述中辨別其眞(T)與假(F)。

(a) $4\in A$　　(c) $4\notin A$　　(e) $A=\varnothing$

(b) $4\in B$　　(d) $4\notin B$

(a) T　(b) F　(c) F　(d) T　(e) F

3　下列舉有若干同意義之例題，務使讀者對「元素」「隸屬」與「集合」有直覺而明晰之觀念，有一整數集合，每一整數大於1而小於5，則此集合中諸整數列表如＿＿＿＿＿。

整數2是集合中之一元素（因 $1<2<5$），吾人亦可謂2是集合中之一份子，或謂2在集合中，或謂2屬於此集合，同理＿＿與＿＿均為此集合中之元素。

元素 -13 並非此集合之一份子（因 $-13 \not> 1$），或謂 -13 非此集合中之元素，或稱 -13 不在集合中，吾人可另舉一例如6＿＿＿＿＿此集合之元素。

（是，不是）

2,3,4　　　3與4　　　不是

4　通常吾人以小寫字母表元素，大寫字母表集合，以∈表屬於，若S爲一集合，a爲其中之一元素，則表以$a \in S$，若b不爲S之元素，則表以$b \notin S$，令R表大於1而小於5一切整數之集合（如進度3），請以∈或∉符號塡充下列空白。

(a) 2 ＿ R　(b) -3 ＿ R　(c) 5 ＿ R　(d) $2\frac{1}{2}$ ＿ R

(a) $2 \in R$　(b) $-3 \notin R$　(c) $5 \notin R$　(d) $2\frac{1}{2} \notin R$

5　$a \in S$意謂「元素a是集合S中之一份子」或簡稱「a是S之一元素」或「a屬於S」，「a在S中」，或以相同之他種表示亦可，如5爲集合N之一元素，則吾人可寫爲＿＿＿＿＿。

$5 \in N$

6　同理$b \notin S$卽爲「元素b不爲集合S之一份子」簡言之「b不爲S之元素」「b不屬於S」「b不在S中」或以同意義之他種形式表之亦可，若N表正整數之集合則0不爲正整數集合N中之元素，吾人可寫爲＿＿＿＿＿。

$0 \notin N$

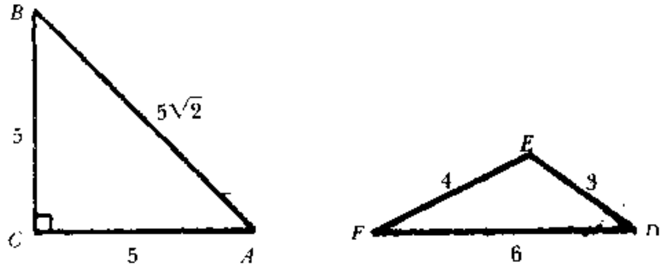
7　予一集合S與一元素a則知$a \in S$或知$a \notin S$二者必居其一，（因一元素在集合之屬於關係下，不可能出現旣不屬此，又不屬彼之情形）令E表整數中偶數之集合，試以適當之符號∈或∉塡下入列空白中。

(a) 5 ＿ E　(b) 2π ＿ E　(c) -728 ＿ E　(d) 1.24 ＿ E

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(a) $5 \notin E$ (b) $2\pi \notin E$ (c) $-728 \in E$ (d) $1.24 \notin E$

8 設 R 表諸直角三角形之集合，S 表諸任意三角形之集合，（不包括等邊），並令 I 表諸等腰三角形之集合，今有 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ 如圖所示：



試以適當之符號 $\in$ 或 $\notin$ 填入下列空白中

(a) $\triangle ABC$______ R (d) $\triangle DEF$______ R

(b) $\triangle ABC$______ S (e) $\triangle DEF$______ S

(c) $\triangle ABC$______ I (f) $\triangle DEF$______ I

(a) $\in$ (b) $\notin$ (c) $\in$ (d) $\notin$ (e) $\in$ (f) $\notin$

9 符號 $\in$ 可在種種不同文句下使用，但須注意該符號 $\in$ 前後文句之語氣。
例如：「令 $P \in S$」則讀爲「令 P 爲 S 之一元素」，「若 $P \in S$」則須讀爲「若 P 在 S 中」或「若 P 爲 S 之一元素」等等。

10 令 S 表大於 1 而小於 5 整數之集合，因 S 僅有幾個元素，則 S 用表列式表示較佳，即將所有元素寫在括號內，用逗點個個分開，表列式者如 $S = \{2, 3, \quad\}$ 。

$S = \{2,3,4\}$

11 表列式書寫集合時，其元素書寫先後次序無關，若 S 僅有二元

素 a ，b ，則下列兩種寫法均可，$S=\{a, b\}$ 或 $S=$_____。

$\{b, a\}$

12 令 $S=\{-5, 0, \frac{2}{3}, \pi, 1\}$。用適當之符號 $\in$ 或 $\notin$ 填入下列空白。

(a) 0.8 ____ S (b) 1 ____ S (c) π ____ S (d) 2π ____ S

(a) $0.8 \notin S$ (b) $1 \in S$ (c) $\pi \in S$ (d) $2\pi \notin S$

13 表列式集合中，某一元素出現一次以上時，且每次出現均爲相同，如集合 $\{1, 1, 2,\}$，稱等於集合 $\{1, 2\}$，同理集合 $\{a, a, a, b, b\}$ 可表如________。

$\{a, b\}$ （或 $\{b, a\}$）

14 下列諸集合中如有與集合 $\{3, 5, 7\}$ 相同者試列舉之。

(a) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ (c) $\{5, 5, 7, 3\}$

(b) $\{5, 3, 7,\}$ (d) $\{5, 7\}$

(b) 與 (c) （或 $\{5, 3, 7\}$ 與 $\{5, 5, 7, 3\}$）

15 爲便於求解本書中若干特殊問題，而有廣集合之產生，討論某一特殊問題時只須選出廣集合中某一部份元素作爲討論對象，是以廣集合中之元素爲討論問題時需用元素供給之所。

本書中之廣集合如無特別註明時，則均視爲實數集合。

令 U 表一廣集合，$P(x)$ 爲一命題，用以敘述每一 $x \in U$ 時爲眞爲僞，例如 U 表正整數之集合，$P(x)$ 表命題 $x < 10$，若 $P(x)$ 爲眞，則在 U 中有那些元素？

____

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,及 9

16 令U表一廣集合，$P(x)$表一命題，對每一$x \in U$而言非眞即僞，有 $\{x \mid P(x)\}$ 者，即表示所有$x \in U$時均爲眞，$\{x \mid P(x)\}$稱爲“集合構式”如U爲整數之集合$\{x \mid 1 < x < 10\} =$ ________。
（表列式）

$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,\}$

17 實數廣集合$\{x \mid 3 < x < 5\}$，含有無限多個元素，不可能以表列式之形式將此集合中之每一元素均表示出來，但實數之屬於關係仍然存在，例如（在下列空白中以適當之$\in$或$\notin$符號填入之）。

(a) $4\frac{1}{3}$ ______ $\{x \mid 3 < x < 5\}$ (c) π ____ $\{x \mid 3 < x < 5\}$
(b) 7.3 ______ $\{x \mid 3 < x < 5\}$ (d) $\sqrt{2}$ ___ $\{x \quad 3 < x < 5\}$

(a) $\in$ (b) $\notin$ (c) $\in$ (d) $\notin$

18 不同之廣集合，$\{x \mid P(x)\}$能表示不同之集合，例如正整數之廣集合$\{x \mid 1 < x < 5\}$與實數廣集合二者不同，復因敘述文字之註明，廣集合不可能有含意不清之事，除有特別說明外，所謂廣集合，均指一切實數之集合。

下列實數廣集合中，試以適當之符號$\in$或$\notin$填入下列空白。

(a) 10 ________ $\{x \mid 5 < x \leq 10\}$
(b) 0 ________ $\{y \mid y > 1\}$
(c) π ________ $\{z \mid z^2 > 5\}$

(a) $\in$ (b) $\notin$ (c) $\in$

19 $\{y \mid y^2-1=0\}$ 如何讀法？

集合中所有之 y，均具有 $y^2-1=0$ 之性質，或集合中每一實數 y 均有 $y^2-1=0$ 之性質，或他種同意義之答案。

20 在實數廣集合 $\{x \mid x^2=-1\}$中，所有之元素爲何？

無（因 x 爲實數，$x^2 \geq 0$）

21 由前例可知命題$P(x)$，用以滿足無元素之廣集合U，吾人可藉 $\{x \mid P(x)\}$ 而決定一集合，故不含任何元素之集合，其出現亦甚合理。

***1.1.21* 定義** 集合中不含有任何元素者曰**空集合**，以符號$\varnothing$表示之。

指出下列各集合中之實數：

(a) $\{x \mid x-x=1\}$　(c) $\{z \mid z \neq z\}$

(b) $\{y \mid y+y=1\}$　(d) $\{w \mid w=w\}$

(a) $\varnothing$　(b) $\{½\}$　(c) $\varnothing$　(d) 所有實數

集合之關係　**（進度 22—40）**

22 如讀者對此進度已有完全而正確之了解，則可逕閱進度 4 1 ，否則自進度 2 3 繼續研讀。令 $A=\{2,4,6,8\}$ $B=\{x \mid x>10\}$,指出下列各敘述之眞 (T) 假 (F)。

(a) $\{2,6\} \subseteq A$　(d) $\{2,6,8,4\}=A$

(b) $\{11\} \subseteq B$　(e) $\{2,6,8,4\} \subset A$

(c) $\varnothing \subseteq B$　(f) 集合 $\{1,2,3\}$ 之所有部份集合均爲 $\{1,2,3,4\}$ 的眞部份集合

(a) T (b) T (c) T (d) T (e) F (f) T

23 令 $S=\{1,2\}$，$T=\{1,2,4,6\}$，注意 S 中每一元素，皆爲 T 之元素，基於此種情形而有：

***1.1.23* 定義** S，T 爲兩集合若 S 中每一元素，皆爲 T 之元素，則稱 S 爲 T 之**部份集合**。

下列各集合中，那些是 $\{1,2,4,6\}$ 的部份集合？

(a) $\{1,4\}$ (b) $\{2,4,6,8\}$ (c) $\{1,2,6\}$

(a) $\{1,4\}$ 及 (c) $\{1,2,6\}$

24 符號：任意二敘述 p 與 q，用連接詞若……，則……連接起來，記作"若 p 則 q"數學上以"$p \Rightarrow q$"表示，運用時比較方便，同理推廣，則有"若 p 則 q，且若 q 則 p"或"若且唯若 p 則 q"二者均表示同一敘述，數學上以"$p \Leftrightarrow q$"表之。

利用上述之各種數學符號，可以將進度23的定義改寫爲：對所有 x 而言，若 _____，則集合 A 是集合 B 的部份集合。

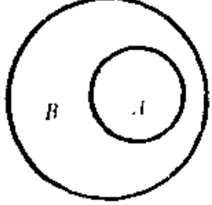
$x \in S \Rightarrow x \in T$

25 若 A,B 爲兩集合，A 爲 B 之部份集合記作 $A \subseteq B$，讀作"A 包含於 B"就實數而言，符號 $\subseteq$ 與 $\geq$ 表示的意義大致相同，若 A 不是 B 之部份集合，記作 $A \nsubseteq B$，以適當的符號 $\nsubseteq$ 或 $\subseteq$ 填入下列空白中。

$\{1,2\}$ ______ $\{1,2,3\}$ $\{1,2,3\}$ ______ $\{1,2,4,6\}$

$\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$ $\{1,2,3\} \nsubseteq \{1,2,4,6\}$

26 有一種簡便的方法來解釋集合間的關係，稱爲范——尤拉氏圖示法，如右圖



B集合中所有的元素，通常用圓B中所有的點表示之，而A集合中所有的元素，以圓A中所有之點表示，下列各種情形，那一些與上述右圖之情形相符合？

(a) $A\subseteq B$　(b) $B\subseteq A$　(c) 兩者皆非

$A\subseteq B$（自圖中可見在A中之每一元素均在B中，故有 $x\in A\Rightarrow x\in B$）

27 兩集合A，B若$A\subseteq B$寫作$B\supseteq A$，則稱「B是A之超集合」或稱「B包含A」可記爲若且唯若$B\supseteq A$，則$A\subseteq B$，將下列空白塡入適當之$\subseteq$或$\supseteq$符號。

$\{1,2\}$ ____ $\{0,1,2,3\}$

$\{1,2\}$ ____ $\{1\}$

$\{x\mid x<1\}$ ____ $\{y\mid y\leq 2\}$

$\{1,2\}\subseteq\{0,1,2,3\}$

$\{1,2\}\supseteq\{1\}$

$\{x\mid x<1\}\subseteq\{y\mid y\leq 2\}$

28 「是…之元素」與「是…之部份集合」這兩種敘述不同，要牢牢記住，試以適當$\subseteq$或$\in$之符號塡入下列空白中，若$A=\{2,4,6,8\}$。

(a) $\{2,6\}$ ____ A　(b) 2 ____ A　(c) $\{2\}$ ____ A

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com