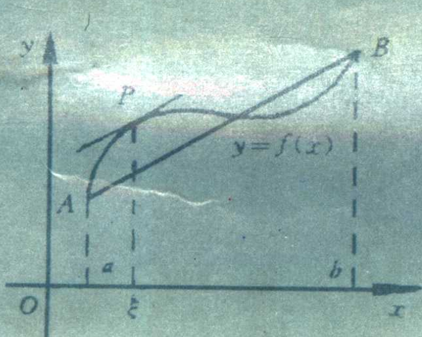
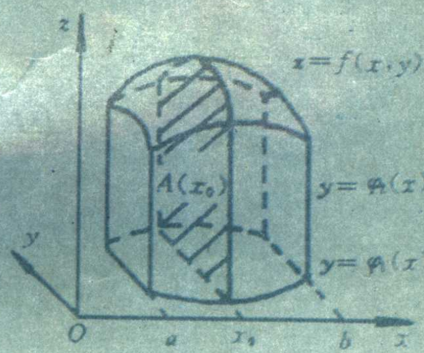
高等数学实用简明教程

下册

吴良大 编





中央民族大学出版社

高等数学
实用简明教程

下 册

吴良大 编

中央民族大学出版社

〔京〕新登字 184 号
责任编辑：张　山
特约编审：郭维烈
封面设计：文燕彬
责任印制：丁燕琦

高等数学实用简明教程(上、下)

吴良大　编

※

中央民族大学出版社出版
(北京西郊白石桥路 27 号)
(邮政编码：100081　电话：68472815)
新华书店北京发行所发行
北京京海印刷厂印刷

850×1168 毫米　32 开　22 印张　540 千字
1996 年 10 月第 1 版　1996 年 10 月第 1 次印刷
印数：1—5000 册

ISBN7—81056—013—1/G・3
定价：29.80 元(全二册)

内 容 提 要

本书是《高等数学实用简明教程》下册，内容为多元函数微分学，多元函数积分学，第二型曲线、曲面积分与场论，级数，常微分方程。

本书体系简明，结构严谨，说理清楚，便于自学。它是一套具有创新、实用、简明等特点的普及型高等数学创新教材。本书可作为高等工业院校和综合性大学、师范院校理科专业的高等数学教材。

目　　录

（下册）

附录 高等数学的理论、方法与习题再讨论

第七章　多元函数微分学

在此以前，我们研究的函数都是一元函数．但是，在实际问题中经常遇到几个自变量的情形．因此，需要研究多元函数及多元函数的微积分．

本章讨论多元函数的微分学．在这里，我们重点讨论二元函数，因为对二元函数的研究，其方法和结论都适用于三元函数以及 n 元函数．而实际中出现的多元函数绝大多数是二元、三元的情形．

§7.1　多元函数的基本概念

1.1　区域

多元函数的定义域主要是二维、三维空间中的区域．下面介绍有关区域的一些概念．

1.　**邻域**

xy 平面上的点可用其坐标组成的二元数组 (x,y) 表示，这种全体点的集合称为 R^2 空间，即

$$\mathrm{R}^2 = \{(x,y) \mid x、y \in \mathrm{R}\}.$$

$Oxyz$ 空间直角坐标系全体点的集合称 R^3 空间，即

$$\mathrm{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x、y、z \in \mathrm{R}\}.$$

以后我们用 R^2 表示 Oxy 平面直角坐标系，用 R^3 表示 $Oxyz$ 空间直角坐标系．

定义　设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 为 R^2 中的任意二点，P_1 与 P_2

的距离记作 $|P_1-P_2|$，即

$$|P_1-P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

R^3 空间中任意两点 P_1 与 P_2 的距离也记作 $|P_1-P_2|$.

不难证明，对 R^2 或 R^3 中任意三点 P_1、P_2、P_3，它们之间的距离满足三角不等式．即

$$|P_1-P_2|\leqslant|P_1-P_3|+|P_3-P_2|$$

设点 $P_0\in R^2$ 平面，平面上所有与 P_0 的距离小于正数 δ 的点集，称为点 P_0 的 δ **邻域**（简称**点 P_0 的邻域**），记作 $U(P_0,\delta)$（简记作 $U(P_0)$）即

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|P-P_0|<\delta\}$$

点集 $U(P_0,\delta)-\{P_0\}$ 称为点 P_0 的**空心邻域**，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

2.　区域

设集合 $E\subset R^2$，$P\in E$，若存在点 P 的邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为集合 E 的**内点**（图 7.1）．若点集 E 的点都是 E 的内点，则称 E 是**开集**．例如点 P_0 的邻域 $U(P_0)$ 与空心邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 都是开集．

设集合 $E\subset R^2$，若对 E 中任意二点，都可用一条完全在 E 中的折线连接，则称 E 是连通的．连通的开集称为**开区域**，简称**区域**．显然邻域与空心邻域也都是区域．

设集合 $E\subset R^2$，若点 P_0 的任何邻域 $U(P_0)$ 中既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P_0 为 E 的**边界点**（图 7.1）．E 的边界点的全体称为 E 的**边界**，记作 ∂E．例如邻域 $U(P_0,\delta)$ 的边界为以 P_0 为圆心，以 δ 为半径的圆：$\{P\,|\,|P-P_0|=\delta\}$.

开区域 D 与其边界 ∂D 的并称为**闭区域**，记作 $\overline{D}$.

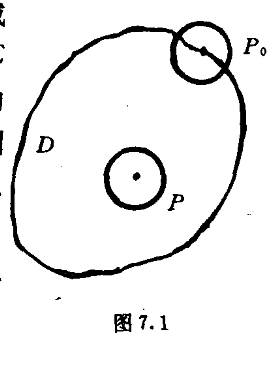


图 7.1

3. 聚点

设集合$E \subset \mathrm{R}^2$，$P \in \mathrm{R}^2$，若点P的任何邻域$U(P)$中都有E的无穷多个点，则称P是集合E的**聚点**，显然区域D的内点与边界点都是D的聚点．E的聚点可以属于E，也可以不属于E.

4. n维空间

与二维空间、三维空间类似，我们有n维空间的概念．n元数组$(x_1,x_2,\cdots x_n)$的全体称为n**维空间**，记作R^n. 即

$$\mathrm{R}^n \triangleq \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_i \in \mathrm{R}, i=1,2,\cdots,n\}.$$

点$P(x_1,\cdots,x_n)$的第i个数x_i称为点P的第i个坐标$(i=1,2,\cdots,n)$.

n维空间R^n中的两点$P(x_1,x_2,\cdots x_n)$与$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$之间的距离规定为

$$|P-Q| \triangleq \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

有了R^n中距离概念后，前面R^2空间中的邻域、内点、边界点、区域、闭区域以及聚点等一系列概念都可推广到R^n空间中去．例如R^n中点P_0的δ邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |P-P_0|<\delta, P \in \mathrm{R}^n\}.$$

1.2 多元函数的概念

例1 一定量的理想气体，其压强P、容积V、温度T之间有关系式：

$$P=R\frac{T}{V} \quad (T>T_0, V>0, R\text{ 为常数})$$

这个方程表示三个变量P、V、T之间的依赖关系．当T、V的值分别给定时，P就有一个确定的值与之对应．所以变量P是两个变量的函数．

例2 三角形的面积S与三角形的两边b、c以及这两边的夹角A之间的关系式（图7.2）为：

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \quad (b>0,c>0,0<A<\pi)$$

当 b、c、A 的值确定后，S 的值也随之确定．这里，变量 S 是三个变量的函数．

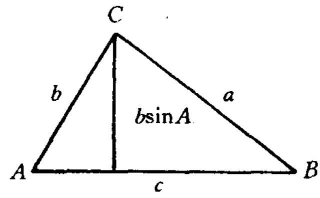


图 7.2

以上二例的具体含义各不相同，但都反映二维点集或三维点集到数有一种对应关系，我们舍去它的具体含义，把它们抽象出来就形成多元函数的概念．

定义 1　设 D 是 n 维空间 R^n 中的非空子集，若对 D 中任一点 P，可对应到唯一的实数 u，则这些对应所构成的对应关系 f 叫做函数．记作

$$f:D\longrightarrow \mathrm{R} \tag{1}$$

或
$$u=f(P) \quad P\in D \tag{2}$$

其中集合 D 称为函数 f 的定义域，它也记作 D_f．定义域 D_f 中点 P 所对应的数 u 记作 $f(P)$，称为点 P 的函数值．函数值的全体称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D_f)$．因定义域 D 是 n 维点集，n 维点依赖于 n 个坐标变量，所以此函数称为 n 元函数．

特别若 $D\subset\mathrm{R}^2$，点 P 的坐标记作 (x,y)，这时函数 f 称为二元函数．它常记作

$$z=f(x,y) \quad (x,y)\in D.$$

若 $D\subset R^3$，这时函数 f 称为三元函数，它常记作

$$u=f(x,y,z), \quad (x,y,z)\in D.$$

设二元函数 $z=f(x,y) \quad (x,y)\in D$．在空间直角坐标系中，对 D 中每一点 $P(x,y)$，依照函数关系 f，对应到 R^3 空间中一点 $M(x,y,f(x,y))$．空间直角坐标系中这些点 M 的全体称为**二元函数 f 的图形**．一般说来，它是一张曲面(图 7.3)．

例 3 求函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域，并作函数的图形.

解 定义域为 xy 平面上带圆周的闭圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

函数的图形是上半球面(图 7.4).

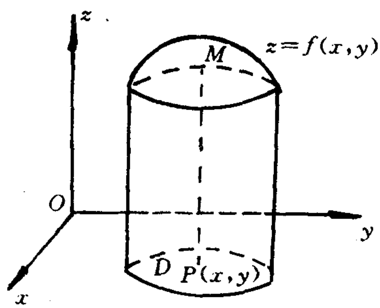


图 7.3

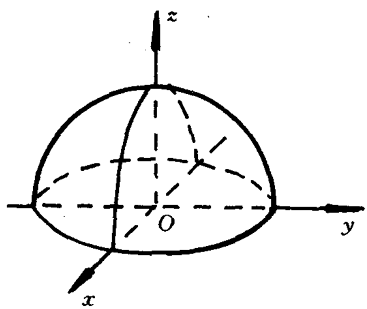


图 7.4

例 4 求函数 $z=x^2+y^2$ 的定义域，并作函数的图形.

解 定义域是 R^2 平面. 函数的图形是旋转抛物面(图 7.5).

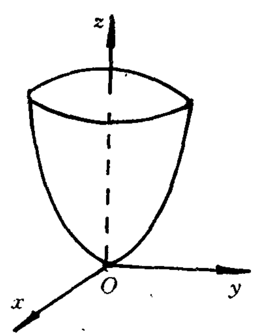


图 7.5

1.3 多元函数的极限

一元函数的极限可完全类似地推广到多元函数中去.

设 f 为多元函数，当点 P 在 R^n 空间中无限趋近 P_0(但 $P\neq P_0$)时，如果相应的函数值 $f(P)$ 能无限接近常数 A，则我们就称 n 元函数 f 在点 P_0 的极限为 A. 其中 P 趋

近 P_0 的程度用点 P 与 P_0 的距离 $|P-P_0|$ 的大小来表示．n 元函数的极限用 ε-δ 的语言可叙述如下：

定义 2 设 n 元函数 $u=f(P)$ 的定义域为 D，P_0 为 D 的聚点，若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|P-P_0|<\delta$ 且 $P\in D$ 时，都有不等式

$$|f(P)-A|<\varepsilon.$$

则称函数 f 在 P_0 点的极限为 A．记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(\text{当 } P\to P_0).$$

特别，对二元函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$，f 在点 (x_0,y_0) 的极限记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

例 1 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 在 $(0,0)$ 的极限问题．

解 对任意的实数 k，显然有

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,$$

且 $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$，但 $\lim\limits_{\substack{y=x^2\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}.$

这就是说，当点 (x,y) 沿任意射线趋于 $(0,0)$ 时，极限都是 0；但沿抛物线 $y=x^2$ 趋于 $(0,0)$ 时，极限不是 0. 因此无法说函数 f 在点 $(0,0)$ 处有极限．

从此例看出，二元函数 $f(x,y)$ 在某点 (x_0,y_0) 有极限比一元函数的情况复杂得多，它要求点 (x,y) 沿任意路径趋于 (x_0,y_0) 时，都有同一极限．我们说二元函数的极限是全面极限．显然 n 元函数的极限也是全面极限．