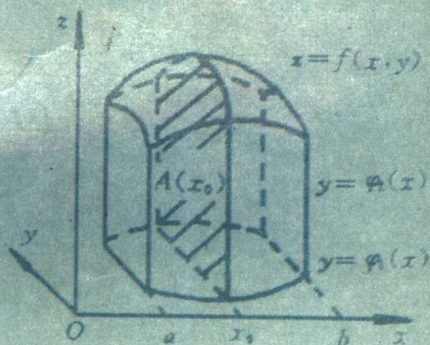
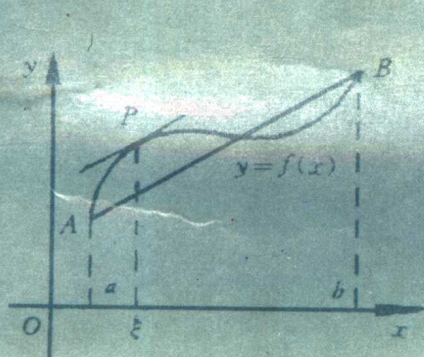


高等数学

实用简明教程

下册

吴良大 编



中央民族大学出版社

高等数学 实用简明教程

下 册

吴良大 编

中央民族大学出版社

〔京〕新登字 184 号

责任编辑:张 山

特约编审:郭维烈

封面设计:文燕彬

责任印制:丁燕琦

高等数学实用简明教程(上、下)

吴良大 编

※

中央民族大学出版社出版

(北京西郊白石桥路 27 号)

(邮政编码:100081 电话:68472815)

新华书店北京发行所发行

北京京海印刷厂印刷

850×1168 毫米 32 开 22 印张 540 千字

1996 年 10 月第 1 版 1996 年 10 月第 1 次印刷

印数:1—5000 册

ISBN7-81056-013-1/G·3

定价:29.80 元(全二册)

内 容 提 要

本书是《高等数学实用简明教程》下册,内容为多元函数微分学,多元函数积分学,第二型曲线、曲面积分与场论,级数,常微分方程。

本书体系简明,结构严谨,说理清楚,便于自学。它是一套具有创新、实用、简明等特点的普及型高等数学创新教材。本书可作为高等工业院校和综合性大学、师范院校理科专业的高等数学教材。

目 录

(下册)

第七章 多元函数微分学	(1)
§ 7.1 多元函数的基本概念	(1)
1.1 区域	(1)
1.2 多元函数的概念	(3)
1.3 多元函数的极限	(5)
1.4 多元函数的连续性	(7)
1.5 有界闭区域上连续函数的性质	(8)
习题 7.1	(9)
§ 7.2 偏导数	(10)
2.1 偏导数的概念与计算	(11)
2.2 高阶偏导数	(13)
习题 7.2	(15)
§ 7.3 全微分及其应用	(17)
3.1 全微分的概念	(17)
3.2 可微的必要条件与充分条件	(17)
3.3* 全微分在近似计算中的应用	(20)
习题 7.3	(22)
§ 7.4 多元复合函数的微分法	(24)
4.1 复合函数偏导数的求法	(24)
4.2 全微分形式的不变性	(27)
4.3* 变量替换	(28)
4.4 本节小结	(31)
习题 7.4	(32)
§ 7.5 隐函数存在定理与隐函数的微分法	(33)
5.1 一个方程的情形	(33)

5.2 方程组的情形	(35)
习题 7.5	(38)
§ 7.6 方向导数与梯度	(39)
6.1 方向导数	(39)
6.2 梯度	(41)
习题 7.6	(43)
§ 7.7 空间曲线的切线与曲面的切平面	(43)
7.1 空间曲线的切线与法平面	(44)
7.2 曲面的切平面与法线	(45)
习题 7.7	(47)
§ 7.8 * 二元函数的泰勒公式	(48)
习题 7.8	(51)
§ 7.9 多元函数的极值及其应用	(52)
9.1 极值的必要条件与充分条件	(52)
9.2 多元函数最值问题应用举例, 最小二乘法	(54)
9.3 条件极值, 拉格朗日乘子法	(58)
习题 7.9	(62)
第八章 多元函数的积分及其应用	(64)
§ 8.1 多元函数黎曼积分的概念与性质	(64)
1.1 二个实例	(64)
1.2 多元函数黎曼积分的概念	(66)
1.3 多元函数黎曼积分的存在性定理与性质	(68)
习题 8.1	(72)
§ 8.2 二重积分的计算与曲面的面积	(73)
2.1 二重积分在直角坐标系下的计算	(73)
习题 8.2(a)	(79)
2.2 在极坐标系下计算二重积分	(80)
2.3 二重积分的一般变量替换	(83)
2.4 曲面面积的计算	(86)
习题 8.2(b)	(88)

§ 8.3 三重积分的计算	(90)
3.1 三重积分在直角坐标系下的计算	(90)
习题 8.3(a)	(93)
3.2 在柱坐标系下计算三重积分	(94)
3.3 在球坐标系下计算三重积分	(96)
3.4 三重积分的一般变量替换	(99)
习题 8.3(b)	(100)
§ 8.4 第一型曲线积分与曲面积分的计算	(101)
4.1 第一型曲线积分的计算	(101)
4.2 第一型曲面积分的计算	(104)
习题 8.4	(107)
§ 8.5 多元函数黎曼积分的物理应用	(109)
5.1 物体的质心与转动惯量公式	(109)
5.2 * 古鲁金定理	(112)
5.3 物体对质点引力的计算	(114)
习题 8.5	(116)
第九章 第二型曲线积分、曲面积分与场论	(118)
§ 9.1 第二型曲线积分的概念与计算	(118)
1.1 第二型曲线积分的概念与性质	(118)
1.2 第二型曲线积分的坐标形式	(121)
1.3 第二型曲线积分的计算	(121)
习题 9.1	(125)
§ 9.2 格林公式及其应用	(127)
2.1 格林公式	(127)
2.2 平面上曲线积分与路径无关的条件	(132)
习题 9.2	(136)
§ 9.3 第二型曲面积分的概念与计算	(139)
3.1 第二型曲面积分的概念与性质	(140)
3.2 第二型曲面积分的坐标形式及其计算公式	(144)
习题 9.3	(146)

§ 9.4 高斯公式,斯托克斯公式	(148)
4.1 高斯公式	(148)
4.2 斯托克斯公式	(153)
习题 9.4	(157)
§ 9.5 * 场论	(159)
5.1 数量场的梯度场与哈密顿算子	(159)
5.2 散度	(160)
5.3 旋度	(162)
5.4 保守场	(163)
习题 9.5	(165)
§ 9.6 * 向量分析介绍	(167)
6.1 向量函数的极限与连续	(167)
6.2 向量函数的导数与微分	(168)
第十章 级数	(169)
§ 10.1 级数的概念及其性质	(169)
1.1 级数的概念	(169)
1.2 收敛级数的基本性质	(171)
习题 10.1	(174)
§ 10.2 正项级数的收敛判别法	(175)
2.1 比较判别法	(175)
2.2 积分判别法	(177)
习题 10.2	(179)
§ 10.3 一般项级数	(180)
3.1 交错级数	(180)
3.2 绝对收敛及其判别法	(181)
3.3 * 绝对收敛级数的性质	(183)
习题 10.3	(185)
§ 10.4 * 广义积分收敛判别法, Γ -函数与 B-函数	(186)
4.1 广义积分的审敛法	(187)
4.2 Γ -函数与 B-函数	(191)

习题 10.4	(195)
§ 10.5 幂级数	(196)
5.1 函数项级数的一般概念	(196)
5.2 幂级数及其收敛半径	(197)
5.3 幂级数的运算及其和函数的性质	(199)
习题 10.5	(202)
§ 10.6 泰勒级数	(203)
6.1 泰勒级数的概念	(203)
6.2 函数的幂级数展开举例	(205)
6.3 幂级数在近似计算中的应用	(208)
6.4 * 复数项级数, 欧拉公式	(211)
习题 10.6	(212)
§ 10.7 傅里叶级数	(213)
7.1 傅里叶系数与傅里叶级数	(214)
7.2 傅里叶级数的收敛定理	(215)
7.3 函数在 $[0, l]$ 上展开为正弦级数或余弦级数	(218)
7.4 * 函数在任意区间 $[\alpha, \beta]$ 上的展开	(220)
7.5 * 傅里叶级数的复数形式	(220)
习题 10.7	(223)
第十一章 微分方程	(226)
§ 11.1 初等变换	(226)
1.1 齐次方程	(226)
1.2 * 可化为齐次的方程	(229)
1.3 贝努里方程	(231)
习题 11.1	(232)
§ 11.2 全微分方程	(233)
2.1 全微分方程的概念与解法	(233)
2.2 积分因子	(236)
习题 11.2	(237)
§ 11.3 一阶隐式方程与可降阶的二阶方程	(238)

3.1 可解出 y' 的一阶隐式方程	(238)
3.2 可降阶的二阶微分方程	(238)
习题 11.3	(241)
§ 11.4 二阶线性微分方程	(241)
4.1 二阶线性方程解的结构	(241)
4.2 二阶常系数齐次线性方程的解法	(244)
4.3 高阶常系数齐次线性方程的解法	(246)
习题 11.4(a)	(247)
4.4 用待定系数法求特解	(248)
4.5 * 用常数变易法解二阶线性方程	(251)
4.6 * 欧拉方程	(253)
4.7 应用举例	(254)
习题 11.4(b)	(259)
§ 11.5 微分方程的幂级数解法举例	(262)
习题 11.5	(264)
§ 11.6 * 常系数线性微分方程组解法举例	(265)
习题 11.6	(268)

附录 高等数学的理论、方法与习题再讨论

§ 多元函数微分学	(270)
5.1 理论与方法讨论	(270)
1 本书多元微分学有什么特点?	(270)
2 二重极限的等价定义	(270)
3 求二重极限时,能否用极坐标变换求?	(271)
4 判定二重极限不存在有哪些方法?	(272)
5 多元函数的一阶全微分形式的不变性有什么作用?	(272)
6 设 $z = f(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$. 求偏导数 $\frac{\partial}{\partial x} f_u(u, v)$ 时应注意什么?	(273)
7 求由方程组确定的隐函数的导数时,要注意什么?	(273)
8 函数组的雅可比行列式与其反函数的雅可比行列有何关系?	(273)

9 二元可微函数在区域上的唯一极值是否是最值?	(275)
10 如何求解条件极值问题?	(275)
5.2 习题选解与补充举例	(276)
§ 6 多元函数积分学	(285)
理论与方法讨论	(285)
1. 本书关于多元函数积分学有什么特点?	(285)
2. 函数的奇偶性与区域的中心对称性的简化积分公式	(285)
3. 怎样交换累次积分的次序?	(286)
4. 用柱坐标与球坐标计算三重积分通常有哪些较实用的方法?	(287)
5. 关于第二型曲面积分的简化公式问题	(287)
答案	(289)

第七章 多元函数微分学

在此以前,我们研究的函数都是一元函数.但是,在实际问题中经常遇到几个自变量的情形.因此,需要研究多元函数及多元函数的微积分.

本章讨论多元函数的微分学.在这里,我们重点讨论二元函数,因为对二元函数的研究,其方法和结论都适用于三元函数以及 n 元函数.而实际中出现的多元函数绝大多数是二元、三元的情形.

§ 7.1 多元函数的基本概念

1.1 区域

多元函数的定义域主要是二维、三维空间中的区域.下面介绍有关区域的一些概念.

1. 邻域

xy 平面上的点可用其坐标组成的二元数组 (x, y) 表示,这种全体点的集合称为 R^2 空间,即

$$R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}.$$

$Oxyz$ 空间直角坐标系全体点的集合称 R^3 空间,即

$$R^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}.$$

以后我们用 R^2 表示 Oxy 平面直角坐标系,用 R^3 表示 $Oxyz$ 空间直角坐标系.

定义 设 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 为 R^2 中的任意二点, P_1 与 P_2

的距离记作 $|P_1 - P_2|$, 即

$$|P_1 - P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

R^3 空间中任意两点 P_1 与 P_2 的距离也记作 $|P_1 - P_2|$.

不难证明, 对 R^2 或 R^3 中任意三点 P_1, P_2, P_3 , 它们之间的距离满足三角不等式. 即

$$|P_1 - P_2| \leq |P_1 - P_3| + |P_3 - P_2|$$

设点 $P_0 \in R^2$ 平面, 平面上所有与 P_0 的距离小于正数 δ 的点集, 称为点 P_0 的 δ 邻域 (简称点 P_0 的邻域), 记作 $U(P_0, \delta)$ (简记作 $U(P_0)$) 即

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |P - P_0| < \delta\}$$

点集 $U(P_0, \delta) - \{P_0\}$ 称为点 P_0 的空心邻域, 记作 $\dot{U}(P_0, \delta)$.

2. 区域

设集合 $E \subset R^2, P \in E$, 若存在点 P 的邻域 $U(P) \subset E$, 则称 P 为集合 E 的内点 (图 7.1). 若点集 E 的点都是 E 的内点, 则称 E 是开集. 例如点 P_0 的邻域 $U(P_0)$ 与空心邻域 $\dot{U}(P_0)$ 都是开集.

设集合 $E \subset R^2$, 若对 E 中任意二点, 都可用一条完全在 E 中的折线连接, 则称 E 是连通的. 连通的开集称为开区域, 简称区域. 显然邻域与空心邻域也都是区域.

设集合 $E \subset R^2$, 若点 P_0 的任何邻域 $U(P_0)$ 中既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点, 则称 P_0 为 E 的边界点 (图 7.1). E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作 ∂E . 例如邻域 $U(P_0, \delta)$ 的边界为以 P_0 为圆心, 以 δ 为半径的圆: $\{P \mid |P - P_0| = \delta\}$.

开区域 D 与其边界 ∂D 的并称为闭区域, 记作 $\bar{D}$.

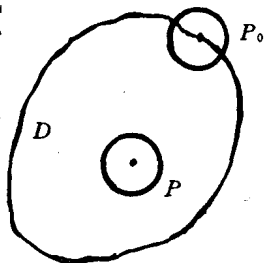


图 7.1

3. 聚点

设集合 $E \subset \mathbb{R}^2, P \in \mathbb{R}^2$, 若点 P 的任何邻域 $U(P)$ 中都有 E 的无穷多个点, 则称 P 是集合 E 的聚点, 显然区域 D 的内点与边界点都是 D 的聚点. E 的聚点可以属于 E , 也可以不属于 E .

4. n 维空间

与二维空间、三维空间类似, 我们有 n 维空间的概念. n 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体称为 n 维空间, 记作 $\mathbb{R}^n$. 即

$$\mathbb{R}^n \triangleq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

点 $P(x_1, \dots, x_n)$ 的第 i 个数 x_i 称为点 P 的第 i 个坐标 ($i = 1, 2, \dots, n$).

n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 之间的距离规定为

$$|P - Q| \triangleq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

有了 $\mathbb{R}^n$ 中距离概念后, 前面 $\mathbb{R}^2$ 空间中的邻域、内点、边界点、区域、闭区域以及聚点等一系列概念都可推广到 $\mathbb{R}^n$ 空间中去. 例如 $\mathbb{R}^n$ 中点 P_0 的 δ 邻域为

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |P - P_0| < \delta, P \in \mathbb{R}^n\}.$$

1.2 多元函数的概念

例1 一定量的理想气体, 其压强 P 、容积 V 、温度 T 之间有关系式:

$$P = R \frac{T}{V} \quad (T > T_0, V > 0, R \text{ 为常数})$$

这个方程表示三个变量 P, V, T 之间的依赖关系. 当 T, V 的值分别给定时, P 就有一个确定的值与之对应. 所以变量 P 是两个变量的函数.

例2 三角形的面积 S 与三角形的两边 b, c 以及这两边的夹角 A 之间的关系式(图 7.2) 为:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A \quad (b > 0, c > 0, 0 < A < \pi)$$

当 b, c, A 的值确定后, S 的值也随之确定. 这里, 变量 S 是三个变量的函数.

以上二例的具体含义各不相同, 但都反映二维点集或三维点集到数有一种对应关系, 我们舍去它的具体含义, 把它们抽象出来就形成多元函数的概念.

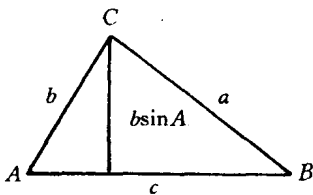


图 7.2

定义 1 设 D 是 n 维空间 R^n 中的非空子集, 若对 D 中任一点 P , 可对应到唯一的实数 u , 则这些对应所构成的对应关系 f 叫做函数. 记作

$$f: D \longrightarrow R \quad (1)$$

或 $u = f(P) \quad P \in D \quad (2)$

其中集合 D 称为函数 f 的定义域, 它也记作 D_f . 定义域 D_f 中点 P 所对应的数 u 记作 $f(P)$, 称为点 P 的函数值. 函数值的全体称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D_f)$. 因定义域 D 是 n 维点集, n 维点依赖于 n 个坐标变量, 所以此函数称为 n 元函数.

特别若 $D \subset R^2$, 点 P 的坐标记作 (x, y) , 这时函数 f 称为二元函数. 它常记作

$$z = f(x, y) \quad (x, y) \in D.$$

若 $D \subset R^3$, 这时函数 f 称为三元函数, 它常记作

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D.$$

设二元函数 $z = f(x, y) \quad (x, y) \in D$. 在空间直角坐标系中, 对 D 中每一点 $P(x, y)$, 依照函数关系 f , 对应到 R^3 空间中一点 $M(x, y, f(x, y))$. 空间直角坐标系中这些点 M 的全体称为二元函数 f 的图形. 一般说来, 它是一张曲面(图 7.3).

例3 求函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的定义域, 并作函数的图形.

解 定义域为 xy 平面上带圆周的闭圆域 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

函数的图形是上半球面(图 7.4).

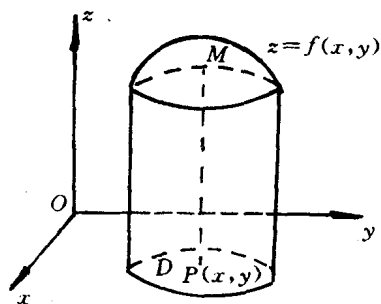


图 7.3

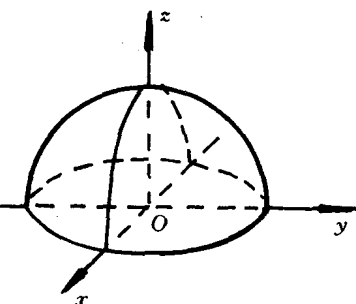


图 7.4

例4 求函数 $z = x^2 + y^2$ 的定义域, 并作函数的图形.

解 定义域是 R^2 平面. 函数的图形是旋转抛物面(图 7.5).

1.3 多元函数的极限

一元函数的极限可完全类似地推广到多元函数中去.

设 f 为多元函数, 当点 P 在 R^n 空间中无限趋近 P_0 (但 $P \neq P_0$) 时, 如果相应的函数值 $f(P)$ 能无限接近常数 A , 则我们就称 n 元函数 f 在点 P_0 的极限为 A . 其中 P 趋

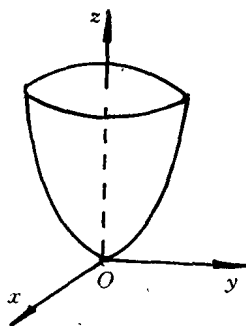


图 7.5

近 P_0 的程度用点 P 与 P_0 的距离 $|P - P_0|$ 的大小来表示. n 元函数的极限用 ϵ - δ 的语言可叙述如下:

定义 2 设 n 元函数 $u = f(P)$ 的定义域为 D , P_0 为 D 的聚点, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |P - P_0| < \delta$ 且 $P \in D$ 时, 都有不等式

$$|f(P) - A| < \epsilon.$$

则称函数 f 在 P_0 点的极限为 A . 记作

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \text{ 或 } f(P) \rightarrow A (\text{当 } P \rightarrow P_0).$$

特别, 对二元函数 $z = f(x, y), (x, y) \in D$, f 在点 (x_0, y_0) 的极限记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

例 1 讨论函数 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 的极限问题.

解 对任意的实数 k , 显然有

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0,$$

$$\text{且 } \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0, \text{ 但 } \lim_{\substack{y=x^2 \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

这就是说, 当点 (x, y) 沿任意射线趋于 $(0, 0)$ 时, 极限都是 0; 但沿抛物线 $y = x^2$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 极限不是 0. 因此无法说函数 f 在点 $(0, 0)$ 处有极限.

从此例看出, 二元函数 $f(x, y)$ 在某点 (x_0, y_0) 有极限比一元函数的情况复杂得多, 它要求点 (x, y) 沿任意路径趋于 (x_0, y_0) 时, 都有同一极限. 我们说二元函数的极限是全面极限. 显然 n 元函数的极限也是全面极限.