中学数学丛书

# 三角形内的关系及其证明

吴孝林　耿丽芬

天津市数学会编

天津科学技术出版社

责任编辑：黄立民


中学数学丛书

三角形内的关系及其证明

吴孝林　耿丽芬

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷二厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米 1/32 印张 [illegible] 字数 124,000

1987年7月第1版

1987年7月第1次印刷

印数：1—8,300

书号：7212·28　　定价：1.15元

ISBN 7-5308-0103-1/O·5

# 编者的话

《中学数学丛书》是献给中学生和自学青年的礼物，希望它们成为中学数学爱好者的良师益友。

编写本丛书的目的在于帮助读者学好数学基础知识、提高运算能力、思维能力和空间想象能力，以及扩大数学知识领域。在编写过程中，力求把中学不同年级，不同阶段学过的代数、几何、三角、解析几何等方面的知识纵横联系，融会贯通，并对中学数学中某些问题或某种数学解题方法进行专题介绍，从而使读者在阅读这些小册子之后，能够比较系统、深入地掌握一些规律，学会一些方法，提高数学水平。

我们希望数学工作者、大中学数学教师和广大读者对本套丛书提出宝贵意见。

天津市数学会

一九八二年十月

# 目　录

# 一、三角形内的基本关系

三角形是空间形体中最简单的图形之一，说它简单是由于整个图形都在一个平面上，而且由三个线段组成，首尾相互连接在一起的图形．正是由于它简单而且用它可以构成其他较复杂的形体，这样研究三角形也就给研究其他较为复杂形体奠定了基础．

三角形当其三边固定后，其形状不再改变，这就是平常说的三角形的稳定性．正是因为它有这种性质，在工程中应用就非常广泛．还由于它是测量的基础，因而在物理、化学、航海、航空、宇航等方面，都起到了奠基的作用．

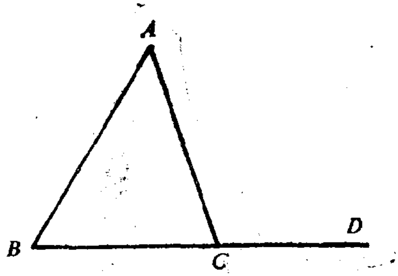
三角形的形状和大小，决定于其边和角，即平常所说的三角形的六元素（三边和三内角）然而这六元素并不是完全孤立的、无任何关系的，而是互相依赖、互相制约的．往往只要其中一个元素有所变化，其他元素也要随之改变．由于三角形较其他图形简单，这种互相依赖、互相制约的关系也就易于发现，易于掌握．研究三角形内部的关系，有利于启发初学者尤其是青少年勤于动手、勤于动脑、勇于探索自然科学的内在联系，加强入门的训练．

三角形内的基本关系有：

1．在所有连接两点的线中，线段最短．依此公理可以得出：

$$a+b>c \qquad\qquad a>c-b$$

即大家最常用的三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.




2. 在$\triangle ABC$中，三内角关系是：

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$$

由此定理，可得出推论：

$$\angle ACD=\angle A+\angle B.$$

即三角形三内角关系是三内角之和为180°；任一外角等于其不相邻的两内角和.

3. 在$\triangle ABC$中有：

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{C}{\sin\angle C}=2R.$$

这就是著名的正弦定理，用语言叙述是：三角形每边和它对角正弦之比都相等，而且等于其外接圆的直径。

正弦定理除上面的形式外，还有：

$$a=2R\sin\angle A,$$
$$b=2R\sin\angle B,$$
$$c=2R\sin\angle C$$

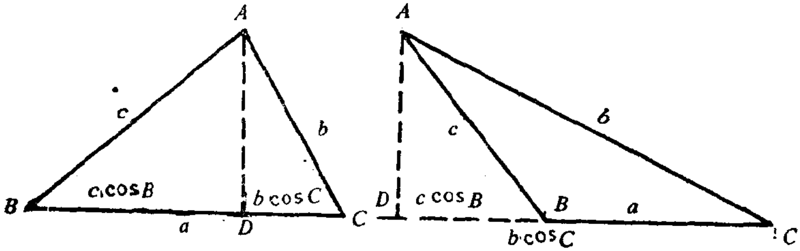
或写成下面形式：$a:b:c=\sin\angle A:\sin\angle B:\sin\angle C.$

后二种形式，它只不过是前种形式的变形，然而，形式变了，用途也就变了。第一种形式适用于已知三角形三个元素（其中至少一边和一角）求其他元素。第二种形式是已知三角形的外接圆半径和一角，求这角所对边用的，第三种形式，在一个三角形中若已知三个角只能确定三角形的形状.

无法确定它的大小，然而，用它可以确定三个边的比。在解三角形时，三种形式和用法，总是区别不同的已知条件，交互使用，这样才能达到方便和灵活。

4.如图：

由这二图可得出结论：




$$a = b\cos C + c\cos B$$

（在第二个图中，由于$B$为钝角于是：$C\cos B < O$这点请注意，它表示图中延长部分的数量）

类似上面，可得：

$$b = a\cos C + c\cos A,$$

$$c = a\cos B + b\cos A,$$

这就是三角形中的射影定理，因它可在已知三角形的两边及其对角时，求第三边。

射影定理还可以由正弦定理推出来，例如：

$$a = 2R\sin A = 2R\sin(B + C)$$

$$=2R[\sin B\cos C+\cos B\sin C]$$
$$=(2R\sin B)\cos C+(2R\sin C)\cos B$$
$$=b\cos C+c\cos B$$

即 $$a=b\cos C+c\cos B$$

与用正弦定理推导射影定理类似，亦可用射影定理推导正弦定理：

因 $$a=b\cos C+c\cos B$$
$$b=a\cos C+c\cos A$$

二式分别乘以$a$，$-b$相加得：

$$a^2-b^2=ab\cos C+ac\cos B-ab\cos C-bc\cos A$$
$$=ac\cos B-bc\cos A$$
$$=c(a\cos B-b\cos A)$$
$$=(a\cos B+b\cos A)(a\cos B-b\cos A)$$
$$=a^2\cos^2 B-b^2\cos^2 A.$$

移项整理得：

$$a^2(1-\cos^2 B)=b^2(1-\cos^2 A),$$

即 $$a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A,$$

∴ $$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

∴ $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

这不就是正弦定理了吗？通过这样由正弦定理推出射影定理，并由射影定理推出正弦定理，说明这些定理是相互联系的，而不是"互相独立"的，后面一些定理的这些关系也都给予推出，以便能更好地了解它们之间的关系。

5．在△$ABC$中，由射影定理：

$$a = b\cos C + c\cos B,$$
$$b = c\cos A + a\cos C,$$
$$c = a\cos B + b\cos A,$$

此三式分别乘以$a$，$-b$，$-c$后相加得：

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 &= ab\cos C + ac\cos B - bc\cos A - ab\cos C \\ &\quad - ac\cos B - cb\cos A \\ &= -2bc\cos A, \end{aligned}$$

即： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

同理： $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

这就是有名的余弦定理．即三角形任一边的平方等于其他二边的平方和，减去其他二边及其夹角余弦乘积的二倍．用此定理可以由已知三角形二边及其夹角求第三边．

余弦定理常常以下面的形式出现：

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

形式的改变引起了用途的改变，这种形式常用来由已知三角形三边，求三角形的三内角．由于钝角的余弦是负值，在查表或用计算器带来一些不便，为减少此麻烦，可以先求中边，小边所对的角．

正弦定理，余弦定理是三角形边角关系中最常用，最重要的两个定理．因而它们的形式、内容、证明方法和使用场

所必须引起重视．作为这两个定理的应用，我们来看下面的三角形的边角关系的定理．

6.作为正弦定理的应用，有：

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2R(\sin A+\sin B)}{2R\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\ \cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\ \cos\frac{C}{2}}=\frac{2\cos\frac{C}{2}\ \cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\ \cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

即
$$\frac{a+b}{C}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

在这推导中使用了和差化积、倍角公式和

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}.$$

类似地可推出：

$$\frac{a-b}{C}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

这就是模尔外德公式，常用它来检验所解三角形的结果是否有误．

7．与上面一样有：

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

即：
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

同样得：
$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}};\quad \frac{a+c}{a-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}}$$

它称作正切定理，即三角形两边之和与差之比等于其对角和与差的一半的正切比。

8．根据余弦定理：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\therefore\quad 1-\cos A=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

由于 $a+b+c=2s$,

$$\therefore\quad a-b+c=a+b+c-2b=2(s-b).$$

同样　$a+b-c=2(s-c)$.

于是　$1-\cos A=\frac{4(s-b)(s-c)}{2bc}$,

$$\frac{1-\cos A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc},$$

即　$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

同样
$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}},$$
$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

用类似的方法可证：

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

这些就是半角定理，有时用来在已知三边时求角．虽运算较繁杂些，但是由于半角常常为锐角，免去了判断钝角还是锐角的麻烦．

从推导过程看是用正弦定理、余弦定理证出半角定理，其实用半角定理也可推出正弦定理和余弦定理．例如：

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}=2\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}}$$

0124-49C2

$$=\frac{2\triangle_s}{bc}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{abc}{2\triangle_s}\ 2R \qquad (\because R=\frac{abc}{4\triangle_s})$$

同样 $\quad \frac{b}{\sin B}=2R \qquad \frac{c}{\sin C}=2R$。

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}=1-2\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$=\frac{2bc-2(s-b)\cdot 2(s-c)}{2bc}$$

$$=\frac{2bc-(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

$$=\frac{2bc-[a^2-(b-c)^2]}{2bc}$$

$$=\frac{2bc+(b-c)^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

即： $\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

以类似的方法用正切定理也能证明正弦定理和余弦定理．这些定理可以互相证明，不是孤立的，而是互相联系的，可以是互为因果关系的．但是在证明的时候，不要犯循环证明的错误。正弦定理和余弦定理各教材都有明确、详细、严格证明，在这里就不再多笔了．

9. 上面的定理告诉我们利用三角形的边角关系，可以由某些已知条件求出来未知的边或角。下面再推导求外接圆半径的公式：

根据正弦定理直接可得

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

根据上式，用比例性质易得：

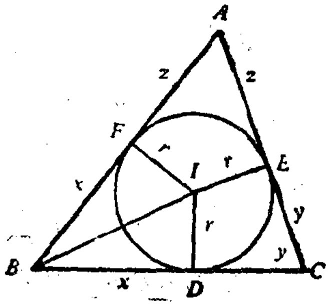
$$R=\frac{s}{\sin A+\sin B+\sin C}.$$

$\because\ \triangle_s=\frac{abc}{4R}$ $\quad\therefore\ R=\frac{abc}{4\triangle_s}$

$\because\ \frac{ah_a}{2}=\frac{abc}{4R}$ $\quad\therefore\ R=\frac{bc}{2h_a}$

同理：$R=\frac{ac}{2h_b}$，$\quad R=\frac{ab}{2h_c}$

可以用这些关系来求三角形外接圆的半径.




10.如图所示：在 $Rt\triangle ADI$中，

$r=x\operatorname{tg}\frac{A}{2}$，但$s=x+y+z$。

故$x=s-(y+z)$，

$x=s-a$。

$\therefore\ r=(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$

同样有： $r=(s-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}$， $r=(s-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

可以用此种关系计算一个三角形的内切圆半径，但是，这三个式子的已知条件除三边外，还须知一内角才行，故使用下面关系来求内切圆的半径较为简便.

11. 由半角定理得：

$$r=(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}$$

$$=\frac{\triangle_s}{s}.$$

即： $r=\frac{\triangle_s}{s}$

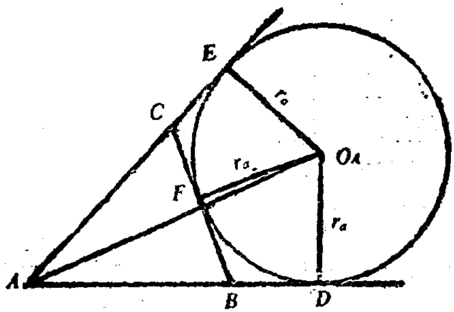
但因 $\triangle_s=\frac{ah_a}{2}$

故 $r=\frac{ah_a}{2s}$

同样有： $r=\frac{bh_b}{2s}$， $r=\frac{ch_c}{2s}$，不难推得：

$$r=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\text{（使用半角公式）}.$$

12. 如图：由于 $AD=AE$，




$$\therefore \quad AD=\frac{1}{2}(AD+AE)$$

$$=\frac{1}{2}(AB+BD+AC+CE)$$

$$=\frac{1}{2}(AB+BF+AC+CF)$$

$$=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)=s.$$

$\therefore \quad AD=s.$

即夹在三角形一个角内的三角形的傍切圆，切此角两边的切点到角顶的距离为三角形的半周长。

由图可知在$Rt\triangle ADO_A$中：

$$r_a=AD\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\text{即}r_a=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

同样有：$r_b=s\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$，　　$r_c=s\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$.

在这些关系中再使用半角定理得：

$$r_a = s\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} = s\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$= \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}},$$

即： $$r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}.$$

同样有：$r_b = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}$， $r_c = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$

照此法推导下去易得：

$$r_a = \frac{\Delta_s}{s-a},\quad r_b = \frac{\Delta_s}{s-b},\quad r_c = \frac{\Delta_s}{s-c}.$$

可以用这些关系来求一个三角形的三个傍切圆的半径.

13．由前面推导的关系：

$$r_a = \frac{\Delta s}{s-a},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r_a} = \frac{s-a}{\Delta s}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{(s-a)+(s-b)(s\quad c)}{\Delta s} = \frac{s}{sr} = \frac{1}{r}$$

即： $$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

这样得到了一个三角形的内切圆半径和傍切圆半径之间的关系。

14．如图$a$边上的中线$AM$（即$M_a$），延$AM$到$E$使$AM = ME$，连$BE$，$CE$，则$ABEC$为一平行四边形.

$$\angle EBC = \angle ACB,\quad AC = BE.$$