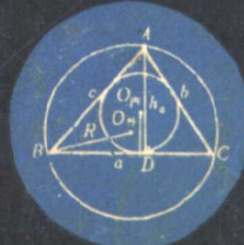
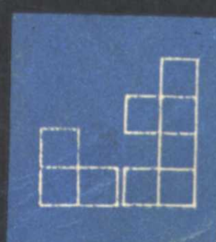
初中数学竞赛辅导讲座

严镇军　陈振宣　邹一心　余应龙　等编



海科学技术出版社



初中数学竞赛辅导讲座

严镇军　陈振宣
邹一心　余应龙　等编

上海科学技术出版社

出版说明

为了积极配合中学开展数学竞赛活动，我们约请了全国各地熟悉、关心中学数学竞赛的教师、专家编写了这本《初中数学竞赛辅导讲座》。

本书力求将初中数学竞赛范围内的知识，作系统的归纳和整理，并根据我国学生的实际情况和世界潮流，构筑起一个有机的、开放性的知识体系。本书精选了近年来国内外数学竞赛试题作为例题和思考题，以培养学生的解题技巧，并开阔眼界。

我国派出的六名选手，在 1986 年 7 月间举行的第二十七届国际中学生数学竞赛中，三人获得一等奖，一人获得二等奖，一人获得三等奖，团体总分名列第四。六名选手为国家争得了荣誉。事实证明，为使我国的数学赶上和超过世界先进水平，应该寄希望于青少年一代。

在编写过程中，多次得到中国科学技术大学常庚哲教授指导，陈振宣、邹一心两同志不辞辛劳，审读了部分讲座原稿，翁锦江、周灵漪两同志提供了部分思考题答案，余应龙同志协助审查了部分思考题答案，特此一并致谢。

1986 年 12 月

目　录

第一篇　代　数

第二篇　平面几何

第三篇　专题讲座

第一篇 代 数

第一讲 整数的基本知识

杨浩清（江苏省常州中学）
颜尔达（江苏省暨杨中学）

本讲拟在初中数学程度的范围内，介绍整数的一些最基本的知识及利用整数知识解题的一些基本方法．在解题过程中，所用的知识虽然不多，但是由于解题方法较为灵活，技巧性强，如能用心钻研，必将有助于开拓解题思路，增强分析问题和解决问题的能力．

一、整数的多项式表示法

一个多位的整数应该如何表示呢？例如以字母 a、b、c、d 为数码组成的四位数，如果表示为 $abcd$，那么显然容易与我们在代数中熟知的 $a\times b\times c\times d$ 相混淆，会给解题带来不便．所以我们通常总是把数字及它所在数位的单位一起表示出来，把这四位数写成：$a\times 10^3+b\times 10^2+c\times 10+d$．

一般地，一个十进制的 $n+1$ 位正整数 N 可以表示为：

$$N=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0,$$

其中 a_i 都是整数，$0\leqslant a_i\leqslant 9(i=0,1,\cdots,n)$，且 $a_n\neq 0$．

这种表示法称为整数的多项式表示法．整数最左边的一位数字 a_n 叫这整数的首位数字，最右边的一位数字 a_0 叫这

整数的末位数字。

例 1 有一个四位数，已知其十位数字减去 2 等于其个位数字，其个位数字加上 3 等于其百位数字，把这个四位数的四个数字反着次序排列所成的数与原数之和等于8877。试求这个四位数。

解：可设所求的四位数为$a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$，根据题意，得

$(a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d)+(d\times10^3+c\times10^2+b\times10+a)=8877$，

即 $\overset{7}{(a+d)}\times10^3+(b+c)\times10^2+(b+c)\times10+(a+d)=8877$。

比较等式两边首、末两位数字，得 $a+d=7$，于是 $b+c=17$。 因首位数是8. 故

又 $\because\ c-2=d,\ d+3=b,\ \therefore\ b-c=1$。

从而解得：$a=1,\ b=9,\ c=8,\ d=6$。 $10<b+c<20$

故所求的四位数为 1986。 又要满足十位数是7. 故等于17

例 2 若将一正整数的末位数字删掉形成一个新整数，而原整数是新整数的倍数。求所有具有这样性质的正整数。

略解：(1) 显然，所有末位数字是零的正整数适合所求。

(2) 再设 $N=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0$，其中 a_i 都是整数 $0\leqslant a_i\leqslant9(i=0,1,\cdots,n)$，且 $a_n\neq0$，$a_0\neq0$，即考虑末位数字不为零的情形，则删掉末位数字形成的新数为 $M=a_n\times10^{n-1}+a_{n-1}\times10^{n-2}+\cdots+a_2\times10+a_1$。

欲使N是M的倍数，即$\dfrac{N}{M}$为整数，则

$$\frac{N}{M}=\frac{10(a_n\times10^{n-1}+a_{n-1}\times10^{n-2}+\cdots+a_2\times10+a_1)+a_0}{a_n\times10^{n-1}+a_{n-1}\times10^{n-2}+\cdots+a_2\times10+a_1}$$

$$=10+\frac{a_0}{a_n\times10^{n-1}+a_{n-1}\times10^{n-2}+\cdots+a_2\times10+a_1}$$

为整数，于是 $a_n\times10^{n-1}+a_{n-1}\times10^{n-2}+\cdots+a_2+10+a_1$ 只能是一位整数，得 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_2=0$。从而N至多是一个两位数。又原整数删掉末位数字后仍为新整数，故N至少是两位数，因此N必是两位数。

可设 $N=10a+b$，则 $M=a$，由 $\dfrac{N}{M}=10+\dfrac{b}{a}$ 知b是a的倍数。

当 $b=a$ 时，N 为 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99；

当 $b=2a$ 时，N 为 12，24，36，48；

当 $b=3a$ 时，N 为 13，26，39；

当 $b=4a$ 时，N 为 14，28；

当 b 分别等于 $5a,6a,7a,8a,9a$ 时，N 分别为 15，16，17，18，19。

例 3 找出所有以 6 为首位，而具有下述性质的整数：若将原数的首位去掉形成的新数是原数的 $\frac{1}{25}$。

解：已知首位数字为 6 的整数可以设为 $6\times10^n+y$，其中 y 是 n 位的整数，则去掉首位后的新数就是 y。根据题意，得

$$6\times10^n+y=25y.$$

即

$$y=\frac{6\times10^n}{24}=\frac{1}{4}\times10^n.$$

当 $n\geqslant2$ 时，y 为整数，故所求的原整数为 $6\times10^n+\frac{1}{4}\times10^n$ （$n\geqslant2$ 的整数）。

具有题设性质的最小正整数为 625。

二、奇数和偶数

我们通常把自然数（正整数）分为两部分，其中被 2 除后余数为 1 的称奇数，能被 2 整除（即余数为 0）的称偶数。

0 作为偶数。

负整数同样可以分为负奇数和负偶数。

通常用 $2k-1$ 或 $2k+1$ 表示奇数，用 $2k$ 表示偶数（k 为整数）。

对于奇偶数有以下明显性质：

偶数 ± 偶数 = 偶数；奇数 ± 奇数 = 偶数；

奇数 ± 偶数 = 奇数；奇数 × 奇数 = 奇数；

奇数 × 偶数 = 偶数；偶数 × 偶数 = 偶数。

利用上面一些概念和性质，我们来解一些与奇偶数有关的问题。

例 4 若n是大于1的整数，那末数

$$p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$$

的值一定是偶数？一定是奇数？还是既可以是偶数也可以是奇数？

分析：本题中 $p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$，由于

$$(-1)^n=\begin{cases}1 & (n\text{ 为偶数})\\ -1 & (n\text{ 为奇数}),\end{cases}$$

因此应分别n的奇偶情况来讨论p的奇偶情况。

解：(1) 如n为大于1的奇数，则 $\because\ (-1)^n=-1$，

$$\therefore\ \frac{1-(-1)^n}{2}=1,\ \therefore\ p=n+(n^2-1)^1=n^2+n-1.$$

又 $\because$ n为奇数，$\therefore$ n^2为奇数。$\therefore$ n^2+n为偶数，n^2+n-1为奇数。

(2) 如n为大于1的偶数，则$(-1)^n=1$，$\therefore\ \frac{1-(-1)^n}{2}=0$，

$\therefore\ p=n+(n^2-1)^0=n+1$ 必为奇数。

由(1)、(2)可知，不论n是大于1的什么整数，$p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$恒为奇数。

例 5 **下列各组数中，只有一组数不满足方程：**

$$85x-324y=101,$$

请问是哪一组？

(A) $x=5, y=1$； (B) $x=329, y=86$； (C) $x=653, y=171$； (D) $x=978, y=256$； (E) $x=1301, y=34$。

分析：观察所给(A)～(E)各组x、y值，除(A)组的数字较小外，其余各组均较大，因此不宜采用逐一代入验证的办法。现对原方程两端分析，由于左边减数$324y$必是偶数，而$85x$与$324y$的差为101(奇数)，从而推知被减数$85x$必为奇数，故 x也必须是奇数不能是偶数。

解：由上面分析，只有(D)组中x为偶数，故(D)组不满足方程。

例 6 设有四个正整数之和为9，求证：它们的立方和不可能为100。

证明：设四个正整数分别是a、b、c、d，根据已知条件有$a+b+c+d=9$。由于四个正整数之和是一个奇数，因此这四个正整数中只能有奇数个奇数，即可能是"三奇一偶"或"一奇三偶"。但因为奇数的立方为奇数，偶数的立方为偶数，∴ 在"三奇一偶"情况，四数的立方和将为奇数；在"一奇三偶"情况，四数的立方和也必为奇数，因此均不能为100。

例 7 是否有满足方程$x^2-y^2=1986$的整数解x和y？

证明：将原方程化为$(x+y)(x-y)=1986$，如果存在适合上述方程的整数x及y，那么整数x、y的奇偶情况可能是：

① x为奇数，y为偶数； ② x为偶数，y为奇数； ③ x为奇数，y为奇数； ④ x为偶数，y为偶数。

前两种情况合起来，即x、y不同奇偶，后两种情况合起来，即x、y同奇或同偶。

若x、y为不同奇偶，则$(x+y)(x-y)$为奇数，但1986是偶数，故x、y不可能为不同奇偶。

若x、y为同奇或同偶，则$(x+y)$、$(x-y)$均为偶数，故$(x+y)\cdot(x-y)$必为4的倍数，但1986不含4的因数（$1986\div4=496$余2）。

∴ 不存在满足原方程的整数解x和y。

例 8 若整数p、q均为奇数，则二次方程：
$x^2+px+q=0$必无有理根，从而p^2-4q不是完全平方数。

证明：本题用直接证法不易入手，可用反证法。设方程有有理根$\frac{a}{b}$（a、b为整数，且互质，即$\frac{a}{b}$为既约分数），则有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+p\left(\frac{a}{b}\right)+q=0 \Longrightarrow pa+qb=-\frac{a^2}{b}.$$

∵ 式中左边为一整数，∴ 右边$-\frac{a^2}{b}$也为整数，但a、b互质，

$\therefore\ b=1$，由此得 $a^2+pa+q=0$，即$a(a+p)=-q$。

$\because\ q$ 为奇数，$\therefore\ a(a+p)$为奇数，$\therefore\ a$ 与 $(a+p)$均为奇数，$\therefore$ 差$(a+p)-a$ 为偶数，即有 p 为偶数，这与已知条件矛盾。

$\therefore$ 原方程无有理根。

若 p^2-4q 是一个完全平方数，则方程 $x^2+px+q=0$ 的两根

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

必为有理根，这与上面所证结论矛盾，$\therefore\ p^2-4q$ 不是一个完全平方数。

【说明】 处理这方面的问题除了要掌握好有关的基本概念外，还要能熟练的运用代数式的恒等变形和正确的逻辑推理。在证明题中反证法是常用的一种证明方法，本题是掌握反证法的典型范例之一。

三、整数的末位数字和整数的平方数

1．整数在进行加法、乘法运算时，其和、积的末位数字只与参加运算的加数、乘数的末位数字有关。由于整数的末位数字只可能是0，1，2，…，9 这十个数字中的一个，所以我们常常可以用穷举法来列举各种情况研究有关整数末位数字的问题。

2．学习多项式乘法时，我们已经知道了下述的裴蜀定理：

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

上式还可以写成：

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b}.$$

我们可以利用这个定理来表示诸如下面的一些和：

$$2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1=2^n-1;$$

$$10^n+10^{n-1}+\cdots+10+1=\frac{10^{n+1}-1}{9}.$$

例 9 证明：和 $1+2+3+\cdots+n$ 的末位数字不可能是 2、

4、7、9。

证明：设 $A=1+2+3+\cdots+(n-1)+n$， ①

把A中 n 个加数反序相加，得

$$A=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1. \quad ②$$

①+②，得

$$2A=(1+n)+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]+\cdots$$
$$+[(n-1)+2]+(n+1)=n(n+1).$$

我们来研究 $n(n+1)$ 有什么样的末位数字。

因为 n 和 $n+1$ 是两个相邻的自然数，它们乘积的末位数字可以穷举如下(末位数字在下面用横线标出)：

$$0\times1=\underline{0},\quad 1\times2=\underline{2},\quad 2\times3=\underline{6},\quad 3\times4=1\underline{2},\quad 4\times5=2\underline{0},$$
$$5\times6=3\underline{0},\quad 6\times7=4\underline{2},\quad 7\times8=5\underline{6},\quad 8\times9=7\underline{2},\quad 9\times0=\underline{0}.$$

即只可能是 0、2、6 三个中的一个。

把 0、2、6 作为末位数字的整数除以 2，得A的末位数字只能是 0、5、1、6、3、8，而不可能是 2、4、7、9。

例 10 把一个四位数的各位数字按反序排成一个新的四位数，正好是原数的四倍，求原数。

解：设原数为 $1000x+100y+10z+t\ (x\neq0)$。按题设得

$$4(1000x+100y+10z+t)=1000t+100z+10y+x. \quad ①$$

$$\because\ 4(1000x+100y+10z+t)>4x\cdot1000,$$

且 $$1000t+100z+10y+x<(t+1)\cdot1000,$$

$\therefore\ 4x<t+1$，又 $\because\ t\leqslant9$，故 $4x<10$。

x 为新数的末位数字，x 非 1 即 2，但 x 不可能为 1，否则①式左右两边的数将具有不同的奇偶性，故 $x=2$。

又 $\because\ t>4x-1=7$，t 为原数的末位数字，但 t 也不可能为 9，否则 ①式的左边数的个位数为 6 而右边数的个位数却是 2，故 $t=8$。

将 $x=2$，$t=8$ 代入①式，可得 $13y+1=2z$，$\because\ z\leqslant9$，$\therefore\ 13y\leqslant17$，$y$ 非 0 即 1，但 y 不可能为 0，否则 $z=\frac{1}{2}$。故 $y=1$，$z=7$。所求

原数为 2178.

【说明】 本例要用到有关整数的多项式表示法，整数的末位数字以及整数的奇偶性等各方面知识，综合性较强，可作为一道承上启下的范例。

例 11　证明：任何五个连续整数的平方和不能是某个整数的平方数。

证明：设五个连续整数为 $n-2$、$n-1$、n、$n+1$、$n+2$(n 为整数).

假设 $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$ 是某整数 k 的平方数，即 $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=k^2$，则有

$$5(n^2+2)=k^2.$$

因为等式左边是 5 的倍数，所以 k^2 也必是 5 的倍数，从而 k 也是 5 的倍数，设 $k=5m$(m 为整数)，于是有 $n^2+2=5m^2$，因此 n^2+2 也应是 5 的倍数，从而 n^2 的末位数字只能是 3 或 8.

我们证明任何一个整数的平方数的末位数字不可能是 3 或 8. 用穷举法把整数平方数的末位数字列举于下（末位数字为在下面有横线划出者）：

$0^2=\underline{0}$，$1^2=\underline{1}$，$2^2=\underline{4}$，$3^2=\underline{9}$，$4^2=1\underline{6}$，$5^2=2\underline{5}$，$6^2=3\underline{6}$，$7^2=4\underline{9}$，
$8^2=6\underline{4}$，$9^2=8\underline{1}$.

任何一个整数平方数的末位数字只能是 0、1、4、5、6、9，而不可能是 2、3、7、8，所以假设不能成立，从而证明了原结论正确。

例 12　求适合于 $x^5=656356768$ 的整数 x.

解：通过估计，容易得出：

$$50^5<656356768<60^5.$$

于是整数 x 应满足：$50<x<60$.

不难知道，任何一个整数的五次乘方以后，它的末位数字不变(对比，读者仍可以用穷举法证明)。由于已知数的末位数字是 8，所以 $x=58$. 验证后知 $x=58$ 是正确的。

【说明】 在上面解题中可以看到，试验(穷举法)和估计是我们寻求解题途径的一种重要手段。

例 13 若某整数的平方数的十位数字是 7，则这整数的平方数的个位数字是什么？

解：一个整数的平方数的末两位数字只由这整数的末两位数字确定。

设这整数的末两位数字是 $10a+b$ (a、b 各是 0, 1, 2, …, 9 中的一个)，则 $(10a+b)^2=a^2\times10^2+2ab\times10+b^2$。

$2ab$ 是偶数，要使十位数字是 7，则 b^2 的十位数字必须是奇数。而使一位整数 b 平方后的十位数字是奇数，只能是 $b=4$ 或 $b=6$。

不论整数的个位数字是 4 或是 6，在整数平方后的个位数字总是 6。

例 14 证明：(1) $a(a+1)+1$(a 是正整数)不能是某个整数的平方数；(2) 四个连续自然数之积不是某个整数的平方数。

证明：(1) $a(a+1)+1=a^2+a+1$。

由 $a>0$，得 $a^2<a^2+a+1<(a+1)^2$，

这里 a，$a+1$ 是相邻的两个整数，所以 a^2+a+1 不能是某个整数的平方数。

(2) 设四个连续自然数之积为：

$$N=a(a+1)(a+2)(a+3)\quad (a\text{ 为自然数}),$$

则

$$N=(a^2+3a)^2+2(a^2+3a).$$

$$\because\quad (a^2+3a)^2<(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)<(a^2+3a+1)^2,$$

而 a^2+3a 与 a^2+3a+1 是相邻的两个整数，

$\therefore$ $N=a(a+1)(a+2)(a+3)$ 不能是某整数的平方数。

例 15 证明下列各数都是某个整数的平方数：729，71289，7112889，711128889，…。

证明：上面所列的数中，设第 n 个数为 a_n，则 a_n 是一个 $2n+1$ 位整数，可以表示为：

$$a_n=7\times10^{2n}+10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10^{n+1}+2\times10^n+$$
$$8\times(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10)+9$$

$$=7\times10^{2n}+\frac{10^{2n}-10^{n+1}}{9}+2\times10^{n}+\frac{8(10^{n}-10)}{9}+9$$

$$=\frac{1}{9}(64\times10^{2n}+16\times10^{n}+1)=\left(\frac{8\times10^{n}+1}{3}\right)^{2}.$$

不论 n 是怎样的自然数，$\frac{8\times10^n+1}{3}$ 是整数。因此，729，71289，7112889，711128889，…中任何一个数都各是相应整数的平方数。

四、整数的整除性和整数的带余式表示

1．整数的整除性

在整数集中，整数 a 除以整数 b，一般有 $a=bq+r$，这里 $a\geqslant b$，q 是整数，$0\leqslant r\leqslant b$。当 $r=0$ 时，称为 a 能被 b 整除，或称 b 整除 a，记作 $b|a$。当 $r\neq0$ 时，称为 b 不整除 a，记作 $b\nmid a$。

由于乘法和除法互为逆运算，若 b 整除 a，则 $a=bq$。也就是 $b|a$ 与 $a=bq$ 意义相同。

关于整数的整除性有下面一些定理。

定理一 如果 $a|b$，$a|c$，那么 $a|(b+c)$。

证明：$\because$ $a|b$，$a|c$，$\therefore$ $b=aq_1$，$c=aq_2$（q_1、q_2 为整数）。

$$\therefore\ b+c=aq_1+aq_2=a(q_1+q_2).$$

$\because$ q_1+q_2 为整数，$\therefore$ $a|(b+c)$。

推论 若 $a|b_1$，$a|b_2$，…，$a|b_n$，则

$$a|(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n).$$

定理二 如果 $a|b$，$a|c$，则 $a|(b-c)$。

定理三 如果 $a|b$，则 $a|nb$（n 为整数）。

定理四 如果 $a|b$，$b|c$，则 $a|c$。

定理二、三、四的证明方法与定理一相仿，留给读者自己练习。

定理五 n 个连续自然数之积必能被 $1\times2\times3\times\cdots\times n$ 所

整除。

关于定理五的一般证明要运用高中数学的知识，这里从略。下面仅举一特殊情况予以证明。

例 16 求证：三个连续的整数之积能被 6 整除。

证明：设三个连续的整数分别为 $n-1$, n, $n+1$ （n 为自然数）。

$\because$ 两个连续的整数中必有一个偶数，

$\therefore$ 三个连续的整数中至少有一个偶数。

$\therefore$ $2\mid(n-1)n(n+1)$。

又三个连续整数中一定有一个被 3 整除的整数，

$\therefore$ $3\mid(n-1)n(n+1)$。

$\because$ 2、3 互质，$\therefore$ $2\times3\mid(n-1)n(n+1)$，

即 $$6\mid(n-1)n(n+1).$$

【说明】 以后可直接应用本例及定理五的结论。

例 17 已知 a、b、c、d 为整数，$ab+cd$ 能被 $a-c$ 整除，试证明 $ad+bc$ 也能被 $a-c$ 整除。

证明：
$$\because\quad ad+bc=ad+ab-ab+cd-cd+bc$$
$$=ab+cd+(ad-cd-ab+bc)$$
$$=(ab+cd)+(a-c)(d-b),$$

$\because$ $(a-c)\mid(ab+cd)$, $(a-c)\mid(a-c)(d-b)$,

由定理一得 $$(a-c)\mid[(ab+cd)+(a-c)(d-b)],$$

即 $$(a-c)\mid(ad+bc).$$

例 18 求证：三个连续奇数的平方和加 1，能被 12 整除，但不能被 24 整除。

证明：设三个连续奇数分别为 $2n-1, 2n+1, 2n+3$ （n 为自然数），则

$$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1=12(n^2+n+1),$$

$$\therefore\quad 12\mid[(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1].$$

$\because$ $n^2+n+1=n(n+1)+1$，$n(n+1)$ 为偶数，

$\therefore$ n^2+n+1 为奇数， 即 n^2+n+1 无 2 的因数，

$$\therefore\quad 24 \nmid [(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1].$$

例 19 求证：$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3$ 对任何自然数 n 都是能被 3 整除的整数。

证明：$\because$
$$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3=\frac{1}{2}(2n^3+3n^2+n-6)$$
$$=\frac{1}{2}\left[n(n+1)(2n+1)-6\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n-1)-6\right],$$

又 $\because$ $n(n+1)(n+2)$、$(n-1)n(n+1)$ 都是 6 的倍数，

$$\therefore\quad 3\left|\left(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3.\right)\right.$$

例 20 求证：n 为奇数时，$6^n-3^n-2^n-1$ 能被 60 整除。

分析：$\because$ $60=2^2\times3\times5$，且 3、4、5 两两互质，

$\therefore$ 只要证明 $3|(6^n-3^n-2^n-1)$，

$4|(6^n-3^n-2^n-1)$，

$5|(6^n-3^n-2^n-1)$ 同时成立就可以了。

证明：$\because$ $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})$（$n$ 为自然数），

$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})$（$n$ 为奇数），

$\therefore$ $3|(6^n-3^n)$，$3|(2^n+1)$，从而 $3|[(6^n-3^n)-(2^n+1)]$，

$4|(6^n-2^n)$，$4|(3^n+1)$，从而 $4|[(6^n-2^n)-(3^n+1)]$，

$5|(6^n-1)$，$5|(3^n+2^n)$，从而 $5|[(6^n-1)-(3^n+2^n)]$。

又 $\because$ 3、4、5 互质，且 $3\times4\times5=60$，

$$\therefore\quad 60|(6^n-3^n-2^n-1).$$

例 21 设 a、b、c 是三个互不相等的正整数，求证：在 a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 三个数中，至少有一个数能被 10 整除。（1986 年全国初中数学竞赛试题）

分析：欲证 a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 三个数中，至少有一个能被 10 整除，可先证这个数含有 2 与 5 的约数。按 a、b、c 为奇、偶数