数学小丛书

18

费马猜想

冯克勤

科学出版社
www.sciencep.com

数学小丛书 18

费马猜想

冯 克 勤

科 学 出 版 社
2002

内 容 简 介

1637年法国数学家费马提出一个数学猜想，于1994年由怀尔斯给出证明，被认为是20世纪纯粹数学的一项重大成就．证明中使用了近年来在代数、数论和几何学方面的许多重大研究成果．本书较为通俗地介绍300多年来人们攻克费马猜想的历史进程，在解决费马猜想中产生的创新思想和方法，以及对发展数学的推进作用．

图书在版编目(CIP)数据

费马猜想/冯克勤．—北京：科学出版社，2002
(数学小丛书)
ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ．费…　Ⅱ．冯…　Ⅲ．费马最后定理-普及读物
Ⅳ．O156-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第010499号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002年5月第 一 版　开本：787×960　1/32
2002年5月第一次印刷　印张：6 3/8　插页：1
印数：1—5 000　字数：97 000

全套书定价：99.00元　(共18册)

馬克思说："一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步。"恩格斯说："要辩证而又唯物地了解自然，就必须熟悉数学。"在科教兴国，振兴中华的今天，向全社会普及数学，实在是一件刻不容缓的大事。

数学小丛书是由我国一些著名数学家撰写的一批数学普及读物精品。几十年来，我国几代科技人员中，不少人都曾得益于这套丛书。我衷心地祝贺数学小丛书的重版与补充，并预祝它取得更大的成功。

王元

二〇〇〇年四月

21

数学天元基金

出版说明

1956年,为了向青少年传播数学知识,科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛,出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》. 在20世纪60年代初,这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作,被北京市数学会编成小丛书,相继由不同的出版社出版,并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品,曾激发一代青少年学习数学的兴趣. 书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想,促进了无数中学生在求学的道路上健康成长. 当年这套小丛书的许多读者,现在已经成为学有所成的科学技术工作者,国家建设的栋梁之才. 当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动,现在已经得到蓬勃的发展. 我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来,历届都取得总分

第一或第二的好成绩.近年来,我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加,但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝,理应成为传世之作.因此,我社取得作者或其继承人的同意,并在可能的条件下,请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订,重新刊行这套数学小丛书,以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶,是一门古老而又常新的科学.借此丛书再版之机,我们特别增加两本新书:虞言林教授等的《祖冲之算π之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》.前者介绍中国古代数学的一项重大成就,后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经300多年终于在20世纪末被证明的故事,我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版,得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助,谨表示衷心感谢.

前　　言

1637年，法国数学家费马(Fermat)提出如下的猜想：对于每个大于2的正整数 n，任意两个正整数的 n 次方之和不能为另一个正整数的 n 次方．也就是说，方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解 (x, y, z)．这就是著名的费马猜想．这个猜想是如此简单易懂，可是要证明却出人意料地艰难．300多年来，许多专业数学家和业余数学爱好者为解决此猜想作了不懈的努力，其中包括像欧拉(Euler)等一些大数学家的努力，最终于1994年由41岁的英国数学家怀尔斯(A. Wiles)所证明．这项工作被认为是本世纪最重要的理论数学成就之一．

费马猜想是关于整数性质的一个论断，它属于数学的一个古老分支：数论，这是研究整数性质和方程整数解的一种学问．数论中有许多简单易懂的问题和猜想，其中有一些至今仍未解决(例如哥德巴赫问题)．这些数论难题是对人类智慧的一种挑战，而人们为解决这些难题所作的贡献，是对数论乃至整个数学发展的巨

大推动.在费马猜想的研究过程中,创造了研究数论的许多新方法,建立了数论的新分支,使用了几何、代数和分析学的各种工具,发现了费马猜想与数学其他领域的奇妙而深刻的联系.它的意义远远超过了证明费马猜想这个事实本身.费马猜想的证明历程充分显示出,现今蓬勃发展的数学是一个有机的整体,不同数学分支的相互交叉和渗透是产生数学新思想和创造数学重大成果的源泉.

高斯称数论是“数学的皇后”.当今的数论已发展成一门十分艰深的学问,例如怀尔斯对费马猜想的证明就是非常难懂的.但是近年来,数论在实际领域中得到广泛而深刻的应用.这主要是由于20世纪60年代以来计算机技术和数字通信技术的飞速发展,使得数论和其他离散数学成为计算机科学和通信工程的重要数学工具.特别是一些重大数论成果的应用,使技术领域发生了巨大变革,显示了纯粹数学理论对实际的推动作用.

本书向读者展示费马猜想的历史进程.基于本书的通俗性要求和限于作者的能力,我们不可能讲述费马猜想的严格证明,但试图勾画人们在研究费马猜想过程中所创造和使用的数学思想和方法,介绍与费马猜想有关联的近代数论的发展.

冯克勤

1999年1月

目　　录

1 数(shù)起源于数(shǔ)

我们要用五小节的篇幅来讲述费马猜想之前的数论,介绍数论是如何产生的,在费马猜想之前人类所掌握的数论知识.在介绍费马猜想之前的数论历史的过程中,我们将着重讲述与费马猜想有关的初等数论重要内容、概念、术语和符号.这一节先谈谈数论的起源和古代数论的发展.

和艺术、天文一样,数学是人类最古老的精神文明之一,数学的萌芽产生于文字发明之前,距今至少有六七千年的历史.古代人类聚居在气候温和、空气湿润、土壤肥沃的大河流域.这就是尼罗河流域的埃及,底格里斯河和幼发拉底河流域的巴比伦(现在伊拉克的地方),恒河流域的印度和黄河长江流域的中国.数学起源于这四大文明古国.

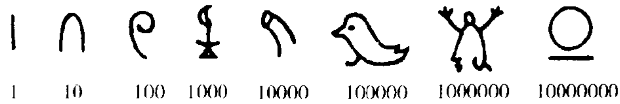
数(shù)起源于数(shǔ),量(liàng)起源于量(liáng).人有生老病死,每个氏族部落的成员经

常发生变化(增多或减少);每次狩猎归来,需要估量猎物的多寡,分配食物时需要把猎物和氏族成员的多少加以比较;尼罗河每年洪水泛滥,洪水退去之后,需要重新丈量土地;建筑房屋、堤坝和巨大的金字塔,需要计算各种图形的面积和体积,所以数学产生于对数量的认识和对几何图形的认识,而最早认识到的数是 1,2,3 这些正整数.

现在,每个幼儿园的孩子都可以数出 1,2,3 及更大的数字,但是在几千年之前,人们从 3 只羊、3 个人和 3 块石头中间提炼出它们共同的性质,产生了数 3 的概念,是非常不简单的.考古学家发现,在有文字之前,人们是用石子、沙粒、树枝和贝壳等实物来计数的.1930 年,美国的考古队在伊拉克境内发现一个封口泥罐,泥罐表面画着一种牲畜,罐里有 48 颗泥粒,这表示泥罐的主人曾经有过 48 头这种牲畜.中国史书上有“上古结绳而治”一说,人们在绳上打几个结,用来记载有几个事物.对于少量物品,人们用手指计数,物品多了则用树枝在泥巴上刻痕,或用刀具在动物骨骼上刻线.

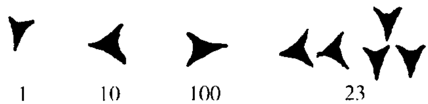
大约在公元前 4000 年,人类发明了文字.各种数目以固定的形式书写成文字的形式,这就是数字.看一看各文明古国不同的数字表达方式是非常有趣的.在埃及,最初的文字是象形

的,用树枝蘸着炭汁,写在芦草挤压晒干而成的纸草上,这些数字为:

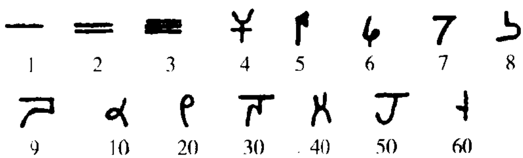


例如,6 表示成,300 表示成 等等.

在巴比伦,用削尖的木棒在半湿的软泥板上书写文字,每个笔画的形状是楔形,称作楔形文字,数字写成:



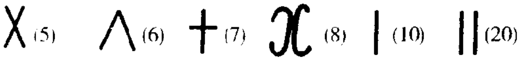
在印度,公元前 2 世纪数字表示成如下的婆罗门式记号:



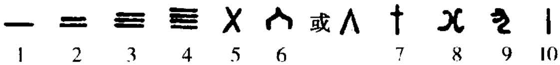
大家会发现,其中的 6 和 7 与现在表达方式很相像.事实上,在 13 世纪初,阿拉伯人把印度数字加以变化传到欧洲,被欧洲人称为阿拉伯数字,就是我们今天普遍采用的数字.

在中国,数目字也出现得很早,距今约

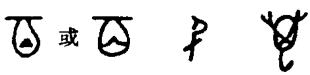
6000 年前的西安半坡村新石器时代遗址中有刻在陶器上的数字：



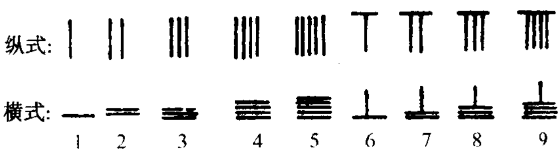
我国系统的数目字大约出现在商代，用甲骨文书写的数字有：



另有百、千、万等高位值符号：



到了春秋时期(公元前 700 ~ 公元前 476 年)，我们的祖先创造了用算筹表示数字和进行运算的“筹算”. 算筹通常用竹子刻成，形如筷子，汉朝的算筹长约 13 厘米，用算筹摆出的数字有纵横两种形式：



记数时个位常用纵式，依次横纵相间，如遇零便空一位. 如 6143 的筹式为 ，

306 的筹式为 |||　T . 这种计数方法实质上就是现在采用的十进位记数方法. 在明代珠算盘被普遍使用之前,我国古代一直用算筹进行四则运算. 春秋时期中国就有了计算乘法的口诀: 九九表(一一得一,一二得二,二二得四,……一直到九九八十一). 不仅如此,中国也是最早认识到分数并且建立分数运算的国家. 大约在战国末期,我国数学家就把分数看成是两数相除,用算筹表示是被除数放在除数的上面,例如 $\frac{16}{5}$ 表示成:

$$\begin{array}{c} 一\ \mathrm{T} \\ ||||| \end{array}$$

这与现在的分数记法不同之处只是差一条分数线. 在我国著名的古算书《九章算术》(写于公元前 1 世纪)中已经有通分、约分及分数四则运算等相当完整的分数理论,比当时埃及等其他国家要先进很多.

随着生产的发展和生活的进步,如何表示大的数目,是一个非常重要和严肃的问题. 开始时,一些大的数目用专门的文字或符号表示,比如前面所示,埃及人把 100 记为  ,把 10 万记成像小鸟一样,中国的甲骨文也把 100, 1000, 10000 表示成特定的符号. 这种方法在某种程

度上可以记下大数，可是运算很不方便.

新记数方法的发明和普遍采用，是古代数学的一个重大进步，这就是发明了"定位制".以我们现在采用的十进制为例，我们只需要十个符号 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 就可以表示任意大的正整数.每个数从右到左依次为"个位"，"十位"，"百位"，等等.例如 213 的 3 在个位表示 3，而 1 在十位表示 10，数字 2 在百位表示 200，所以 213 为 $200+10+3$，表示贰佰壹拾叁这个数.也就是说，每个数字代表的数值由它所处的位置决定.两个数相加时，相同位置上的数字相加，超过 10 时则向前(即向左)进位，减法则需要"借位".这种定位制表示数的方法和运算方法非常方便，一直使用到今天.中国的筹算是世界上最早的十进制计数和运算的工具，后人的改进只是采用了更方便的阿拉伯数字符号.

在东方文明国家采用定位制计数和运算之后，欧洲一直保留陈旧的记数方式：古罗马数字，这种数字一直到今天还用在时钟钟面、日历、书稿的章节分类等方面，大约在公元前后罗马人用 7 个基本符号表示数：

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

例如 3 表示成 III，而 800 就要连写 8 个 C 或者

写成 DCCC,后来为了简化又创造了一个新规则,即数值较小的符号放在数值较大符号之左边时,则从大数值减去小数值,例如 VI 表示 6,而 IV 表示 4(不写成 IIII).同样,CD 是 400 而 DC 是 600,于是 89 可以简写成 XXCIX.在罗马帝国灭亡(476 年)后的 700 多年间,西欧人仍然使用这种过于复杂的罗马数字,这也是造成在相当长的一段时间里,西方数学落后于东方数学的原因之一,从这段历史可以看出,一套好的数学符号对于数学的发展是多么重要!

有了整数概念、整数表达方式和方便的记数方法,由于生产和生活的需要发明了整数的四则运算,并且要解决关于整数的各种实际问题,这就产生了研究整数性质和方程整数解的学问:数论.数论的历史大约有 3000 年,起源于古代的东方.中国最早的数学著作《周髀算经》(大约写于公元前 235 年至公元前 145 年之间)的开篇就记载了西周人商高知道方程 $x^2+y^2=z^2$ 有整数解 $(x,y,z)=(3,4,5)$.另一部数学著作《孙子算经》(公元 4～5 世纪)载有"物不知数"问题,研究整数的同余性质,被世人称为"中国剩余定理".东方各国的数论(乃至整个数学)主要基于实践,具有鲜明的直观、实用和算法特性.而在古希腊数学那里(公元前 6 世纪至公元 3 世纪),数论(和几何)的研究具有理性思