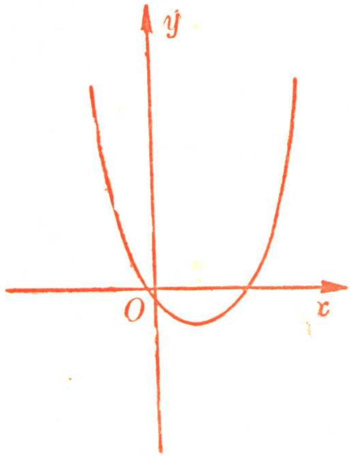
SHU

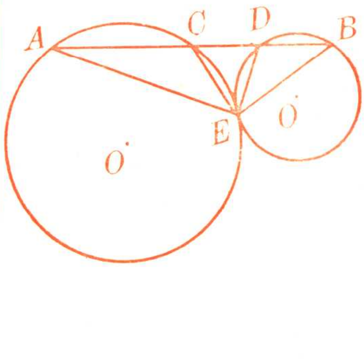



# 你能正确选择吗？

## （四）

——漫谈数学选择题的解法

唐盛昌　鲁平平　编




XUE

# 你能正确选择吗？(四)

## ——漫谈数学选择题的解法

唐盛昌　鲁平平　编

上海科学技术出版社

责任编辑　周玉刚

**你能正确选择吗？（四）**
——漫谈数学选择题的解法
唐盛昌　鲁平平　编
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　上海东方印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张5.5　字数119,000
1987年7月第1版　1987年7月第1次印刷
印数：1—29,000
统一书号：13119·1430　定价：1.00元

# 编者的话

《你能正确选择吗?》是奉献给正在学习初等数学的成人学校学员和自学青年的一套知识性和训练性相结合的丛书。

目前，在初等数学的学习、训练、测试和知识或智力竞赛中，有一种题型很具特色，这就是带有判断、选择性的题型，通常叫做选择题。这种题型，在题中就已提供了好几个答案，其中只有一个是对的，要求你作出正确的选择。

这类题型，答题很简单，只需指出哪一个对就行了，但要答对很不容易。这要求有清晰的概念辨析能力，或有熟练的运算能力，或有较强的逻辑推理能力，在思维上还要有相当的严密性、深刻性和灵活性。常做这种题型，对知识掌握、能力提高和思维训练，都有独特的作用。此外，由于这种题型带有客观性，即不管什么人答的题，由不管哪个人批改、评卷，评分标准都一样，不会带有评卷人的主观因素，因此这种题型就在数学学习成绩的测量和数学知识竞赛或智力竞赛的试卷中被广泛采用，也成为"标准化考试"中的一种重要题型。

但是，目前广大的读者尤其是成人中等学校的学员和自学青年，大都缺少解这种题型的训练，不掌握它的特点和解题方法、规律。遇到这种题型往往很不适应，束手无策。大家都盼望得到既有解这种题型的方法指导、又能受到较系统训练的小册子。

正是为了满足读者的上述需要，我们编写了这套数学丛

书．它根据初等数学的主要学习内容和学习顺序编排，共分六册，本书是第四册，基本上是高中一年级的内容，供学习高一数学的学生和自学青年训练用，也供广大数学教师和研究数学标准化考试命题与从事建立题库工作的人员参考。

本书共分两部分．第一部分是《漫谈数学选择题解法》，深入浅出地分析了这种题型的一些主要特点，介绍了几种基本解法．第二部分是训练题，各题都有代号为$A$、$B$、$C$、$D$的四个答案，其中有且只有一个是正确的，请你把正确的一个答案代号填入题中的(　)里。

这本小册子的知识、方法介绍和训练，将使你知识更牢固，技能更熟练，思路更敏捷，成绩更进步！

本书书末还附了正确答案、提示与略解，你可以检测自己选对了几个，如果不对，就分析一下原因，从中找出学习中的不足，加以改进，这样你的数学学习将有更大提高。

欢迎大家一道一道试一试，看看“你能正确选择吗？”

本书在编写过程中得到张福生等同志的热情帮助，提出许多宝贵意见，对书稿作了认真的审核，在这里我们表示感谢。

虽然我们尽了努力，但限于水平，时间仓促，书中定有不少缺点错误，恳请读者指正。

编　者

一九八六年六月

# 目　录

# 漫谈数学选择题的解法

你做过选择题吗？选择题是一种很有意思的题型。它在题目里就把正确结论告诉了你，但这个结论又和好几个错误结论混在一起，要求把它选择出来。这种供选择的所有结论，都叫做选项。一般的选择题，通常有一个并且只有一个选项是正确的。解选择题时，不要求写具体过程，只要指出哪个选项是正确结论就行。做选择题看来很省事，但要做对却不容易。先看一个例子：

**例 1** 对于任意实数 $\theta$，下列结论中一定正确的只有（　　）。

（$A$）分式的分子与分母同乘以 $|\sin\theta|$，分式的值不变；

（$B$）分式的分子与分母同除以 $\sin\theta+1$，分式的值不变；

（$C$）分式的分子与分母同乘以 $|\sin\theta+1|$，分式的值不变；

（$D$）分式的分子与分母同除以 $|\sin\theta|+1$，分式的值不变。

这里四个结论好象都不错，其实只有($D$)是对的，因为只有 $|\sin\theta|+1$ 不等于零，而 $|\sin\theta|$、$\sin\theta+1$、$|\sin\theta+1|$ 都可能取到零值，而根据分式的基本性质，分式的分子与分母同时乘以或除以不等于零的数，分式值才不变。

答题省事，但容易出错，这是选择题的明显特点。答题省事，可以节省答题时间，提高解题效率；容易出错，可以检验

知识掌握得好不好，能力强不强。选择题的这些特点，使它在国内外广泛流行。

现在，不少同学对选择题的解法很陌生。有的想当然，象猜谜似地猜答案；有的是每道题都象解常规题那样直接做出答案，再作选择；甚至有的把每个选项都当作求解的结论，一个一个去解去证，结果一道题变成了四、五道。这都是因为不知解选择题还有别的方法，弄得不是出错就是费时费力太多。这里，我们向大家介绍一些常见的选择题解法。有了这些方法，再做本册练习，你解选择题的本领一定会有明显的提高。

## (一) 直 接 法

这种解法，先不管各选项所提供的答案，而直接从条件出发，运用数学概念与理论进行运算或推理，求得结果后，再把它与各选项加以比较，作出选择。

**例 2** 下列关于 $\lg(-x)^2$ 的等式中，对所有使 $\lg(-x)^2$ 有意义的 $x$ 都成立的是(　)。

(A) $\lg(-x)^2=2\lg x$；　(B) $\lg(-x)^2=2\lg(-x)$；

(C) $\lg(-x)^2=-2\lg x$；　(D) $\lg(-x)^2=2\lg|x|$。

**解**：$\lg(-x)^2$ 的定义域是 $x\neq0$，在各选项中出现的 $\lg x$，$\lg(-x)$ 与 $\lg|x|$ 的定义域分别是 $x>0$、$x<0$ 与 $x\neq0$，因此只有选项(D)才是正确的。

故答：(D)。

这道题主要检查对数函数定义域的概念是否牢固掌握。由于各选项形式相近，所以具有一定的迷惑性，稍不注意，就会诱使你作出错误的选择。选择题的这种命题办法，通常叫做“诱误”。要避免落入诱误的圈套，就必须对概念有透彻的

理解，有分析辨别的能力。解这种考查基本概念的选择题，通常先可用直接法。

**例 3** 当 $x>1$，$x\neq 10$ 时，

$$\left[\frac{\lg\lg x^2\cdot\lg(\lg x)^2}{\lg\lg x}+\lg(\lg\sqrt{x})^2\right]\div\lg\lg x \text{ 等于( )。}$$

(A) 5；　　　　(B) 4；

(C) 2；　　　　(D) 以上答案都不对。

**解**：原式 $=\left[\frac{\lg(2\lg x)\cdot 2\lg\lg x}{\lg\lg x}+2\lg\left(\frac{1}{2}\lg x\right)\right]$

$\div\lg\lg x=\left[2\lg(2\lg x)+2\lg\left(\frac{1}{2}\lg x\right)\right]$

$\div\lg\lg x=[2\lg(\lg x)^2]\div\lg\lg x=4$。

故答：(B)。

例 3 出现了"以上答案都不对"这样的选项。这有两种可能：一是为了不给解答的人过多的暗示，故意把正确的答案隐藏在这一选项中；二是正确答案虽在其他选项中，但用"以上答案都不对"来干扰答题的人。这种题，也常常要用直接法解，以便决定哪个选项是正确的。

用直接法解选择题虽然是以条件为主进行考虑的，但解题时还应注意选项所提供的暗示。这常常可以使得解题过程更加简便迅速。所以审题时应该对各选项作一番认真仔细的观察分析。

**例 4** 已知二次函数 $y=2(m+1)x^2+4mx+m^2+3m+2$。当函数图象经过原点时，$m$ 的值只能是(　)。

(A) $m=-2$，$m=-1$；　　(B) $m=-2$；

(C) $m=-1$；　　(D) 以上答案都不对。

**解**：因为函数图象经过原点，所以 (0，0) 满足函数式。代入得 $m^2+3m+2=0$，$(m+2)(m+1)=0$，即 $m=-2$，

$m=-1$. 但因为 $x^2$ 的系数是 $2(m+1)\neq 0$，否则不是二次函数，$\therefore m\neq -1$.

故答：$(B)$.

这里，用直接法解得 $m=-2, m=-1$ 时，很可能落入 $(A)$ 的诱误。但如果注意到：$(B)$、$(C)$ 实际上给出了"在 $m=-2$、$m=-1$ 中舍去一个"的暗示，那么就容易考虑到二次函数的二次项系数不能为零，从而舍去 $m=-1$，选择 $(B)$.

**例 5** 四个三角函数 I、II、III、IV 的表达式分别是：

I：$y=\sin x+\pi$；　　　　II：$y=\sin(x+\pi)$；

III：$y=\pi\sin x$；　　　　IV：$y=\sin \pi x$.

在这四个三角函数中，是奇函数的有且只有(　　)。

$(A)$ I 与 II；　　　　$(B)$ II 与 III；

$(C)$ III 与 IV；　　　　$(D)$ II、III 与 IV.

**解**：不难断定，I 不是奇函数，III 与 IV 都是奇函数，关键是确定 II 的奇偶性。

$$\because \quad f(x)=\sin(x+\pi)=-\sin x,$$

$$f(-x)=\sin(-x+\pi)=\sin x=-(-\sin x)=-f(x),$$

$\therefore$ II 是奇函数，立即可以肯定正确答案是 $(D)$.

最后要说明的是，当运用直接法求得的答案与所有选项的答案都不相同时，就应该检查解答过程，看哪里出了毛病。当求得的结果与某个选项的答案一致时，通常就按它作答。但如果解题过程有错误，或理解基本概念有问题，而求得的错误结果恰是某个用来诱误的选项，那就会做出错误的选择，这样解题者本人往往难以发觉。这是用直接法解选择题时一个比较困难的地方。克服这个困难的办法，除了要正确理解基本概念，正确进行基本运算，以保证按常规解法求得的结果正确无误外，还应当象例 4 那样，认真审题，分析各选项的答案，

利用它的暗示作用，帮助我们避免错误。

## （二）筛 选 法

筛选法是把已知条件与各个选项所提供的答案结合起来，根据有关的基本知识进行判断，将不可能成立的答案一个一个地否定掉。由于一般的选择题在各选项中有且仅有一个是正确的，就可把剩下的那个正确答案筛选出来。

**例 6** 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$。若它的图象经过点$(1,-8)$，$(0,-7)$，且对称轴为 $x=\frac{1}{3}$，则(  )。

(A) $a=-3, b=2, c=-7$;

(B) $a=\frac{1}{2}, b=-2, c=7$;

(C) $a=1, b=2, c=-7$;

(D) $a=b=c=5$.

**解**：∵这个函数的图象经过 $(0,-7)$，故知 $c=-7$，由此排除(B)、(D)；由于对称轴 $x=\frac{1}{3}$，即 $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}$，故知 $a$、$b$ 异号，排除(C)，所以正确答案是(A)。

**例 7** 已知 $\operatorname{tg} A+\operatorname{ctg} A=2\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)$，其中 $m$、$n$ 都是正实数，且 $2A$ 为第三象限角，则 $\operatorname{tg} A$ 的值为(  )。

(A) $\frac{m+n}{m-n}$;  (B) $\frac{n-m}{m+n}$;

(C) $\frac{m-n}{m+n}$ 或 $\frac{n-m}{m+n}$;  (D) $\frac{m+n}{n-m}$.

**解**：由题设，得

$$\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{1}{\sin A\cos A}=2\cdot\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}.$$

于是有
$$\sin 2A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}.$$

由 $\operatorname{tg}A=\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}$ 可知 $\operatorname{tg}A$ 的正负与 $\sin 2A$ 的正负相同。因为 $m$, $n$ 都是正数，所以 $\sin 2A$ 的正负由 $m-n$ 决定，故知 $\operatorname{tg}A$ 的正负与 $m-n$ 的正负相同。用这个标准对各个选项进行检验，即可发现正确答案为$(A)$。

**例 8** 若 $\alpha$ 为钝角，则 $5^{|\log_5(-\cos\alpha)|}$ 的值等于(　　)。

$(A)$ $\cos\alpha$;　　$(B)$ $\sec\alpha$;

$(C)$ $-\cos\alpha$;　　$(D)$ $-\sec\alpha$.

**解**：原式的值必是正数，当 $\alpha$ 为钝角时，$\cos\alpha$ 与 $\sec\alpha$ 的值都是负数，这样选项$(A)$、$(B)$被否定。又 $|\log_5(-\cos\alpha)|$ 必为正数，所以 $5^{|\log_5(-\cos\alpha)|}$ 的值一定大于 1。选项$(C)$也被否定，因此正确答案必是$(D)$。

你一定已经发现，运用这种方法常常可以避免不少繁复的运算过程，迅速地作出正确的选择。这里的关键是需要找到某种方便的筛选、鉴别准则，如例 6 中的 $c$ 值和 $a$、$b$ 的符号，例 7 中的 $\operatorname{tg}A$ 与 $\sin 2A$ 正负相同，例 8 中原式必为大于 1 的数值等，可用它来排除那些不正确的答案，使供选择的可能减少到最低限度，甚至一下子就找到正确的答案。这种筛选法，是解数学选择题时常用的一种方法。

## (三) 特例判定法

我们知道，要否定某个带有普遍性的结论，只需举个反例。因为选择题的各选项中一定有几个是不对的，所以我们

可以用取特殊值、画特殊图形或确定特殊位置的办法，来加以判断。如果其他的选项都可以举反例加以否定，那么剩下的一个就一定是正确的答案了。这种方法称为特例判定法。

**例 9** 已知 $\sin\theta=\dfrac{a-b}{a+b}(0<a<b)$，则 $\sqrt{\operatorname{ctg}^2\theta-\cos^2\theta}$ 的值是(　　)。

(A) $-\dfrac{a^2+b^2}{4ab}$；　　(B) $-\dfrac{4ab}{a^2+b^2}$；

(C) $-\dfrac{a^2-b^2}{4ab}$；　　(D) $-\dfrac{4ab}{a^2-b^2}$。

**解**：令 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$，则

$$\sin\theta=-\frac{1}{2},\quad \operatorname{ctg}^2\theta=3,\quad \cos^2\theta=\frac{3}{4}.$$

于是
$$\sqrt{\operatorname{ctg}^2\theta-\cos^2\theta}=\sqrt{3-\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}.$$

这时各选项的值依次为负值、负值、$\dfrac{2}{3}$ 与 $\dfrac{3}{2}$。据此特例(A)、(B)、(C)被否定，正确答案是(D)。

**例 10** $\triangle ABC$ 中，若 $\cos A\cos B<\sin A\sin B$，则这个三角形是(　　)。

(A) 锐角三角形；　　(B) 钝角三角形；

(C) 直角三角形；　　(D) 以上三种情况都可能。

**解**：设 $\angle A=\angle B=60°$，则 $\cos A\cdot\cos B<\sin A\sin B$。故等边三角形是满足题设的特例。它是锐角三角形，选项(B)、(C)被否定。设 $\angle A=90°$，$\angle B=30°$，则

$$0=\cos A\cdot\cos B<\frac{1}{2}=\sin A\cdot\sin B,$$

以此为特例可否定选项(A)。正确答案只能是(D)。

当出现“以上答案都不对”那样的选项，而正确的答案又恰好是这个选项时，也有可能用特例法去解。

**例 11** 当角 $\alpha$ 取使下列三个表达式都有意义的值时，

I：$\sin\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}$； II：$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$；

III：$\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$，

其中值最大的一个(　　)。

(A) 必定是 I；　　(B) 必定是 II；

(C) 不能确定，与 $\alpha$ 取值有关；　(D) 必定是 III。

**解**：设 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，则

$$\frac{1}{2}+2>\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}>\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

于是选项(B)、(D)被排除，设 $\alpha=\dfrac{7\pi}{6}$，此时只有

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

取正值，故(III)值最大，选项(A)亦被否定，正确答案必是(C)。

运用特例判定法的关键是寻找恰当的特殊值、特殊图形或图形的特殊位置。在只有少量几种可能需要加以否定时，这种方法更能显示出运算简捷、推理方便的优点。

## (四) 逆 推 法

逆推法是从结论着手来考虑问题的。这种方法先假设某选项的结论是对的，然后把它当作问题的条件，经过演算或推理，看得到的结果是否满足题目的要求。如果不满足，那么这

个选项就是错误的。如果有一个选项满足，那它就是正确的答案。当然，只有在命题中的条件和结论互相可逆时，才能用逆推法。

**例 12** 当 $\alpha$ 为锐角时，下列结论中可能成立的是(　　)。

(A) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，且 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$；　(B) $\sin\alpha=9^{\log_3\sqrt{2}}$；

(C) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{3}$；　(D) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$。

**解**：如果(A)成立，则

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\neq 1,$$

(A) 被否定；如果(B)成立，

$$\because\quad 9^{\log_3\sqrt{2}}=3^{2\log_3\sqrt{2}}=2,$$

则 $\sin\alpha>1$，(B) 被否定；如果(D)成立，

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4},$$

于是有 $\sin\alpha\cos\alpha<0$，这与 $\alpha$ 为锐角的题设矛盾，(D)被否定，故应选择(C)。

**例 13** 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{\pi}}(\sqrt{x-3}-4)}$ 的定义域是(　　)。

(A) $(19,\ +\infty)$；　(B) $[28,\ +\infty)$；

(C) $(19,\ 28]$；　(D) $(-\infty,\ 28]$。

**解**：先分析选项 (A) 与 (B)，如果它们成立的话，那么象 $x=103$ 这样的值就必须使上述函数式有意义，但这时 $\log_{\frac{1}{\pi}}(\sqrt{103-3}-4)=\log_{\frac{1}{\pi}}6<0$，不合要求，故(A)、(B)都被否定。如果(D)成立的话，那么任意负数，例如 $x=-100$ 也将使上述函数式有意义，但这时 $\sqrt{-103}$ 就已经没有意义了，故(D)也被否定。正确选择为 (C)。

以上我们介绍了解选择题的四种常用方法。直接法是从肯定某个结论着手的，而筛选法，特例判定法与逆推法则是从否定某些结论进行的。在具体解题时，常常需要把几种方法结合起来，灵活运用。

**例 14** 已知 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$，则 $\arcsin\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)$ 的值等于（　　）。

(A) $\frac{3\pi}{4}-x$；　　(B) $x-\frac{3\pi}{4}$；

(C) $x-\frac{\pi}{4}$；　　(D) $x-\frac{5\pi}{4}$。

**解**：先用特例法，令 $x=\frac{\pi}{2}$，则原式 $=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$，这时各选项中只有(A)，(C)也等于 $\frac{\pi}{4}$，所以 (B)、(D) 被否定。再应用筛选法对(A)、(C)进行选择。对于选项(C)，

$$\because\quad \frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4},$$

$$\therefore\quad 0<x-\frac{\pi}{4}<\pi.$$

这表明原式的取值范围在$(0,\pi)$，而不是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。据此(C)亦被否定，剩下的(A)必然是正确答案。

作为本文结束，我们还要指出，上面提出的各种方法，只是帮助大家初步了解，可以用哪些方法对选择题进行分析求解。但运用这些方法时不能死搬硬套，更离不开对数学基础知识与基本技能的牢固掌握。在双基熟练的基础上，再学会灵活运用适当的方法，才可能较好地解答各种选择题。

# 一、集合与映射

**例 1** 设 I 为全集，$A\subseteq I$，$B\subset A$，则以下各选项中，错误的一个是(　　)。

(A) $\bar{B}\supset\bar{A}$；　　(B) $A\cap B=B$；

(C) $A\cap\bar{B}=\phi$；　　(D) $\bar{A}\cap B=\phi$。

**解**：如图 1.1 所示，经过观察就可以发现，选项(A)、(B)、(D)都是正确的，只有选项 C 是错误的，$A\cap\bar{B}$ 表示的是图中的阴影部分，而不是空集，故应选(C)。

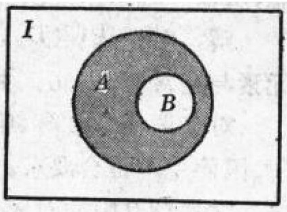



图 1.1

**例 2** 设全集 $I=\{a, b, c, d, e\}$，集合 $A\subset I$，集合 $B\subset I$，且 $A\cap B=\{a, b\}$，$A\cap\bar{B}=\{c\}$，$\bar{A}\cap B=\{e\}$，则 $A\cup B$ 是(　　)。

(A) $\{a, b, c\}$；　　(B) $\{a, b, e\}$；

(C) $\{a, b, c, d\}$；　　(D) $\{a, b, c, e\}$。

**分析**：本题题设条件较多，牵涉到的集合又表示得相当具体，因此选用直接法比较合适。

**解法一**：由于 $A\cap B=\{a,b\}$，故元素 $a$、$b$ 应属于集合 $A$。$A\cap\bar{B}=\{c\}$，故元素 $c$ 应属于集合 $A$。而 $B\cup\bar{B}=I$，所以除了元素 $a$、$b$、$c$ 以外，在 $I$ 中 $A$ 再没有其他元素了，因此 $A=\{a, b, c\}$。同理可知 $B=\{a,b,e\}$。于是 $A\cup B=\{a, b, c,e\}$。正确选择为(D)。