

计算机图象处理

(上册)

容观澳

清 华 大 学

1989.8.

1990.9.

数字图象处理的方法主要分为两大类，一个是空间域处理法（或称空域法），一个是频域法（或称变换域法）。在频域法处理中最为关键的预处理便是变换处理。这种变换一般是线性变换，其基本线性运算式是严格可逆的，并且满足一定的正交条件。因此，也将其称作正交变换。目前，在图象处理技术中正交变换被广泛地运用于图象特征提取、图象增强、图象复原以及图象编码等处理中。本章将对几种主要的正交变换进行较详细地讨论。

§ 3-1 付里叶变换

付里叶变换是大家所熟知的正交变换。在一维信号处理中得到了广泛应用。把这种处理方法推广到图象处理中是很自然的事。本节将对付里叶变换的基本概念及算法作一些讨论。

一、付里叶变换的定义及基本概念

付里叶变换在数学中的定义是严格的。设 $f(x)$ 为 x 的函数，如果 $f(x)$ 满足下面的狄里赫莱条件：

- (1) 具有有限个间断点；
- (2) 具有有限个极值点；
- (3) 绝对可积。

则有下列二式成立

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du \end{aligned} \quad (3-1-1)$$

式中 x 为时域变量， u 为频率变量。如果令 $\omega = 2\pi u$ ，则有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega \end{aligned} \quad (3-1-2)$$

通常把以上公式称为付里叶变换对。

函数 $f(x)$ 的付里叶变换一般是一个复量，它可以由式 (3-1-3) 表示

$$F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) \quad (3-1-3)$$

或写成指数形式

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (3-1-4)$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \quad (3-1-5)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

把 $|F(\omega)|$ 叫做 $f(x)$ 的付里叶谱, 而 $\varphi(\omega)$ 叫相位谱。

付里叶变换广泛用于频谱分析。

例, 求图3.1.1所示波形 $f(x)$ 的频谱。

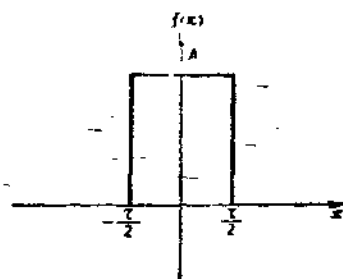


图3.1.1 函数 $f(x)$ 的波形

$$f(x) = \begin{cases} A & -\frac{\tau}{2} \leq x \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & x > \frac{\tau}{2} \\ 0 & x < -\frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\omega x} dx$$

$$= \frac{A}{j\omega} \left(e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \right)$$

$$= \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2}$$

则

$$|F(\omega)| = \frac{2A}{\omega} \left| \sin \frac{\omega \tau}{2} \right|$$

$$= A \tau \left| \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\frac{\omega \tau}{2}} \right|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \frac{4n\pi}{\tau} < \omega < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \quad n=0, 1, 2, \dots \\ \pi & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < \omega < \frac{4(n+1)\pi}{\tau} \quad n=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$f(x)$ 的幅度谱及相位谱如图3.1.2所示。

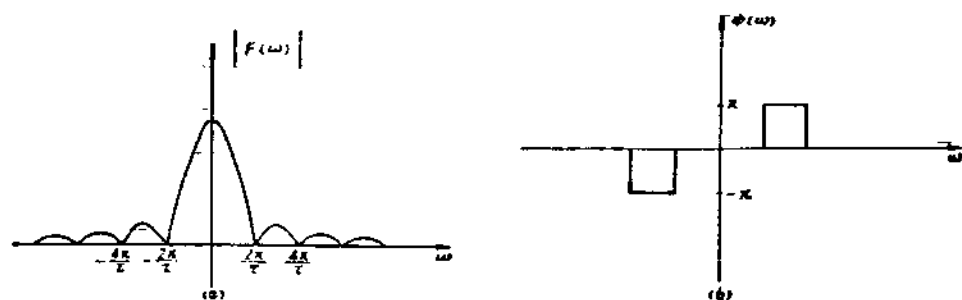


图 3.1.2 $f(x)$ 的幅度谱及相位谱

例：求周期函数的付里叶谱。

一个周期为 T 的信号 $f(x)$ 可用付里叶级数来表示，即

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 x}$$

式中

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega_0 x} dx$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

因此，付里叶变换可写成下式

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(x)] \\ &= \mathcal{F}\left[\sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 x}\right] \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 x}] \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 x} \cdot e^{-j\omega x} dx \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - n\omega_0)x} dx \\ &= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

式中 $\delta(\omega - n\omega_0)$ 是冲激序列。其幅度谱如图 3.1.3 所示。

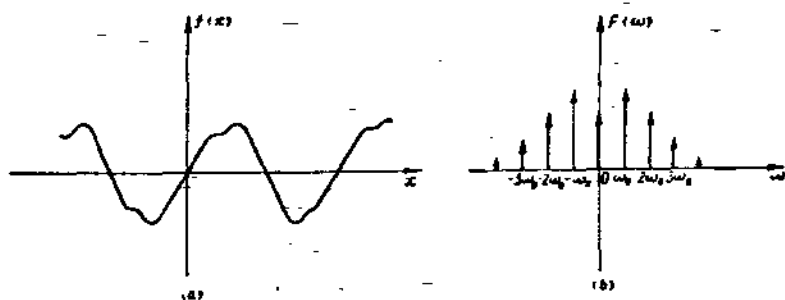


图 3.1.3 周期函数的付里叶谱

由上面的例子可以建立起下面几个概念:

(1) 只要满足狄里赫莱条件, 连续函数就可以进行付里叶变换, 实际上这个条件在工程运用中总是可以满足的。

(2) 连续非周期函数的付里叶谱是连续的非周期函数, 连续的周期函数的付里叶谱是离散的非周期函数。

付里叶变换可推广到二维函数。如果二维函数 $f(x, y)$ 满足狄里赫莱条件, 那么将有下面二维付里叶变换对存在

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (3-1-7)$$

与一维付里叶变换类似, 二维付里叶变换的幅度谱和相位谱如下式

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)} \quad (3-1-8)$$

$$\Phi(u, v) = \arctg \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \quad (3-1-9)$$

$$E(u, v) = R^2(u, v) + I^2(u, v) \quad (3-1-10)$$

式中, $F(u, v)$ 是幅度谱; $\Phi(u, v)$ 是相位谱; $E(u, v)$ 是能量谱。

例: 求图 3.1.4 所示函数的付里叶谱。

$$f(x, y) = \begin{cases} A & 0 \leq x \leq X \\ & 0 \leq y \leq Y \\ 0 & x > X, x < 0 \\ & y > Y, y < 0 \end{cases}$$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$= \int_0^X \int_0^Y A e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$= A \int_0^X e^{-j2\pi ux} dx \int_0^Y e^{-j2\pi vy} dy$$

$$= A \left[\frac{e^{-j2\pi ux}}{-j2\pi u} \right]_0^X \left[\frac{e^{-j2\pi vy}}{-j2\pi v} \right]_0^Y$$

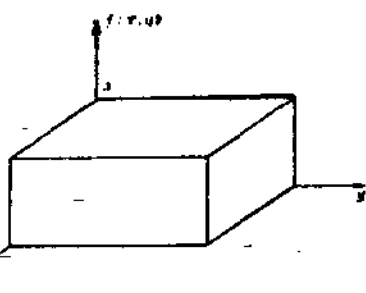


图3.1.4 函数 $f(x, y)$

$$= \frac{A}{-j2\pi u} [e^{-j2\pi ux} - 1] \frac{1}{-j2\pi v} [e^{-j2\pi vY} - 1]$$

$$= AXY \left[\frac{\sin(\pi uX) e^{-j\pi uX}}{\pi uX} \right] \left[\frac{\sin(\pi vY) e^{-j\pi vY}}{\pi vY} \right]$$

其付里叶谱由下式表示

$$|F(u, v)| = AXY \left| \frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX} \right| \left| \frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY} \right|$$

二、付里叶变换的性质

付里叶变换有许多重要性质。这些性质为实际运算处理提供了极大的便利。这里，仅就二维付里叶变换为例 出其主要的几个性质。

1 具有可分性

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} \cdot e^{-j2\pi vy} dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} dx \right) \cdot e^{-j2\pi vy} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \mathcal{F}_x[f(x, y)] \} \cdot e^{-j2\pi vy} dy$$

$$= \mathcal{F}_y\{ \mathcal{F}_x[f(x, y)] \}$$

(3-1-11)

这个性质说明一个二维付里叶变换可用二次一维付里叶变换来实现。

2. 线性

付里叶变换是线性算子，即

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\alpha_1 f_1(x, y) + \alpha_2 f_2(x, y)] \\ = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1(x, y)] + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2(x, y)] \end{aligned} \quad (3-1-12)$$

3. 共轭对称性

如果 $F(u, v)$ 是 $f(x, y)$ 的付里叶变换， $F^*(-u, -v)$ 是 $f(-x, -y)$ 付里叶变换的共轭函数，那么

$$F(u, v) = F^*(-u, -v) \quad (3-1-13)$$

4. 旋转性

如果空间域函数旋转的角度为 θ_0 ，那么在变换域中此函数的付里叶变换也旋转同样的角度，即

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(k, \varphi + \theta_0) \quad (3-1-14)$$

在式(3-1-7)中引入极坐标表示。其中： $x = r \cos \theta$ ， $y = r \sin \theta$ ， $u = k \cos \varphi$ ， $v = k \sin \varphi$ 。所以 $f(x, y)$ 和 $F(u, v)$ 分别用 $f(r, \theta)$ 和 $F(k, \varphi)$ 来表示。式中的 $\Leftrightarrow$ 为对应关系符号。反之，如果 $F(u, v)$ 旋转某一角度，则 $f(x, y)$ 在空间域也旋转同样的角度。这条性质只要以极坐标代以 x, y, u, v ，则立即可以得到证明。

5. 比例变换特性

如果 $F(u, v)$ 是 $f(x, y)$ 的付里叶变换。 a 和 b 分别为两个标量，那么

$$a f(x, y) \Leftrightarrow a F(u, v) \quad (3-1-15)$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (3-1-16)$$

6. 帕斯维尔(Parseval)定理

这个性质也可称为能量保持定理。如果 $F(u, v)$ 是 $f(x, y)$ 的付里叶变换，那么有下式成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u, v)|^2 du dv \quad (3-1-17)$$

这个性质说明变换前后并不损失能量。

7. 相关定理

如果 $f(x)$ ， $g(x)$ 为两个一维时域函数， $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 为两个二维空域函数，那么，定义下二式为相关函数

$$f(x) \circ g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) g(x+\alpha) d\alpha \quad (3-1-18)$$

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) g(x+\alpha, y+\beta) d\alpha d\beta \quad (3-1-19)$$

式中 $\circ$ 符号表示相关运算。由上式定义可引出付里叶变换的一个重要性质。这就是相关定理，即

$$f(x, y) \circ g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G^*(u, v) \quad (3-1-20)$$

$$f(x, y) \cdot g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ G(u, v) \quad (3-1-21)$$

式中 $F(u, v)$ 是 $f(x, y)$ 的付里叶变换， $G(u, v)$ 是 $g(x, y)$ 的付里叶变换， $G^*(u, v)$ 是 $G(u, v)$ 的共轭， $g^*(x, y)$ 是 $g(x, y)$ 的共轭。

8. 卷积定理

如果 $f(x)$ ， $g(x)$ 是一维时域函数， $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 是二维空域函数，那么，定义以下二式为卷积函数，即

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) g(x-\alpha) d\alpha \quad (3-1-22)$$

$$\begin{aligned} & f(x, y) * g(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) g(x-\alpha, y-\beta) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (3-1-23)$$

式中 $*$ 符号表示卷积关系。由此，可得到付里叶变换的卷积定理如下

$$\begin{cases} f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G(u, v) \\ f(x, y) \cdot g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v) \end{cases} \quad (3-1-24)$$

式中 $F(u, v)$ 和 $G(u, v)$ 分别是 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 的付里叶变换。

三、离散付里叶变换

连续函数的付里叶变换是波形分析的有力工具，这在理论分析中无疑具有很大价值。离散付里叶变换使得数学方法与计算机技术建立了联系，这就使付里叶变换这样一个数学工具在实用中开辟了一条宽阔的道路。因此，它不仅仅有理论价值，而且在某种意义上说它也有了更重要的实用价值。

(一) 离散付里叶变换的定义

如果 $x(n)$ 为一数字序列，则其离散付里叶正变换定义由下式来表示

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi m n}{N}} \quad (3-1-25)$$

付里叶反变换定义由下式来表示

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j \frac{2\pi m n}{N}} \quad (3-1-26)$$

由式(3-1-25)和式(3-1-26)可见,离散付里叶变换是直接处理离散时间信号的付里叶变换。如果要对一个连续信号进行计算机数字处理,那么就必须要经过离散化处理。这样,对连续信号进行的付里叶变换的积分过程就会自然地蜕变为求和过程。关于这一点,下面先用示意图图(3-1-5)建立一个直观概念。由图(a)可见,时域信号是非周期的连续信号,其付里叶谱就是连续的非周期的波形。由图(b)可见,时域信号是周期性的连续信号,其付里叶谱就是非周期的离散谱。由图(c)可见,将时域信号通过取样作离散化处理,其付里叶谱就是周期的连续谱。从图(d)可见,将时域信号作离散化处理并延拓为周期性信号,其付里叶变换就是离散的周期的谱了,以此可以看出离散付里叶变换的概念。

上述概念也可以用数学方式表述如下:

如果 $x(t)$ 是连续的非周期函数,其频谱 $X(f)$ 就是连续的非周期谱。由图(b)可见,对周期函数来说其付里叶变换可写成下式(3-1-27)和式(3-1-28)

$$\begin{cases} X(m) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi m t} dt \\ x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m) e^{j2\pi m t} \end{cases} \quad (3-1-27)$$

如果 $x(t)$ 是离散的函数,那么,其频谱就是一个周期的连续谱,可写成式(3-1-28)和式(3-1-28)。

$$\begin{cases} X(f) = \sum_{n=-\infty}^N x(n) e^{-j2\pi n f} \\ x(n) = \frac{1}{f} \int_{-\frac{f}{2}}^{+\frac{f}{2}} X(f) e^{j2\pi n f} df \end{cases} \quad (3-1-28)$$

综合上述二种情况,如果 $x(n)$ 既是离散的,又是周期的函数,那么,它的付里叶谱则必然是离散的、周期的谱。即

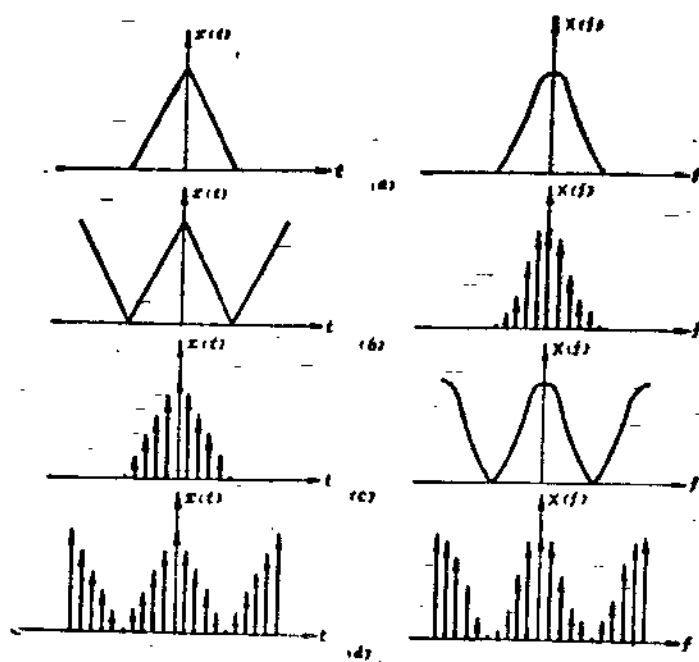


图 3.1.5 离散付里叶变换的物理概念示意图

$$\begin{cases} X(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi mn} \\ x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m) e^{+j2\pi mn} \end{cases} \quad (3-1-29)$$

由上面的讨论可以比较容易地建立起离散付里叶变换的物理概念。正因为函数从连续函数变为离散函数，所以也就使付里叶变换的积分运算变为求和运算。

(二) 离散付里叶变换的性质

离散付里叶变换有如下一些性质。

1. 线性

如果时间序列 $x(n)$ 与 $y(n)$ 各有付里叶变换 $X(m)$ 和 $Y(m)$ ，则

$$ax(n) + by(n) \Leftrightarrow aX(m) + bY(m) \quad (3-1-30)$$

2. 对称性

如果 $x(n) \Leftrightarrow X(m)$

$$\text{则 } \frac{1}{N} X(n) \Leftrightarrow x(-m) \quad (3-1-31)$$

3. 时间移位

如果序列向右(或向左)移动 k 位，则

$$x(n-k) \Leftrightarrow X(m) \cdot W^{km} \quad (3-1-32)$$

4. 频率移位

如果 $x(n) \Leftrightarrow X(m)$

则 $x(n) \cdot W^{-kn} \Leftrightarrow X(m-k) \quad (3-1-33)$

5. 周期性

如果 $x(n) \Leftrightarrow X(m)$

则 $x(n \pm rN) = x(n) \quad (3-1-34)$

6. 偶函数

如果 $x_e(n) = x_e(-n)$

则 $X_e(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_e(n) \cos \frac{2\pi mn}{N} \quad (3-1-35)$

7. 奇函数

如果 $x_o(n) = -x_o(-n)$

则 $X_o(m) = -j \sum_{n=0}^{N-1} x_o(n) \sin \left(\frac{2\pi}{N} mn \right) \quad (3-1-36)$

8. 卷积定理

如果 $x(n) \Leftrightarrow X(m), y(n) \Leftrightarrow Y(m)$

则 $x(n) * y(n) \Leftrightarrow X(m) \cdot Y(m) \quad (3-1-37)$

反之 $x(n) \cdot y(n) \Leftrightarrow X(m) * Y(m)$ 也成立。

9. 相关定理

如果 $x(n) \Leftrightarrow X(m)$

$y(n) \Leftrightarrow Y(m)$

则 $x(n) \circ y(n) \Leftrightarrow X^*(m) \cdot Y(m) \quad (3-1-38)$

10. 帕斯维尔定理

如果 $x(n) \Leftrightarrow X(m)$

则 $\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X(m)|^2 \quad (3-1-39)$

四、快速付里叶变换 (FFT)

随着计算技术和数字电路的迅速发展,在信号处理中使用计算机和数字电路的趋势愈加明显。离散付里叶变换已成为数字信号处理的重要工具。然而,它的计算量较大,运算时间长,在某种程度上却限制了它的使用范围。快速算法大大提高了运算速度,在

某些应用场合已可能作到实时处理，并且开始应用于控制系统。快速付里叶变换并不是一种新的变换，它是离散付里叶变换的一种算法。这种方法是在分析离散付里叶变换中的多余运算的基础上，进而消除这些重复工作的思想指导下得到的，所以在运算中大大节省了工作量，达到了快速的目的。下面从基本定义入手，讨论其原理。

对于一个有限长序列 $\{x(n)\} (0 \leq n \leq N-1)$ ，它的付里叶变换由下式表示

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \quad m=0, 1, \dots, N-1$$

令 $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, $W^{-1} = e^{j\frac{2\pi}{N}}$

因此，付里叶变换对可写成下式

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{mn} \quad (3-1-41)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W^{-mn} \quad (3-1-42)$$

将正变换式 (3-1-41) 展开可得到如下算式

$$\begin{cases} X(0) = x(0)W^{00} + x(1)W^{01} + \dots + x(N-1)W^{0(N-1)} \\ X(1) = x(0)W^{10} + x(1)W^{11} + \dots + x(N-1)W^{1(N-1)} \\ X(2) = x(0)W^{20} + x(1)W^{21} + \dots + x(N-1)W^{2(N-1)} \\ \vdots \\ X(N-1) = x(0)W^{(N-1)0} + x(1)W^{(N-1)1} + \dots + x(N-1)W^{(N-1)(N-1)} \end{cases} \quad (3-1-43)$$

上面的方程式 (3-1-43) 可以用矩阵来表示

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{00} & W^{01} & \dots & W^{0(N-1)} \\ W^{10} & W^{11} & \dots & W^{1(N-1)} \\ W^{20} & W^{21} & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W^{(N-1)0} & W^{(N-1)1} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

从上面的运算显然可以看出要得到每一个频率分量，需进行 N 次乘法和 $N-1$ 次加法运算。要完成整个变换需要 N^2 次乘法和 $N(N-1)$ 次加法运算。当序列较长时，必然

要花费大量的时间。

观察上述系数矩阵，发现 W^{mn} 是以 N 为周期的，即

$$W^{(m+LN)(n+hN)} = W^{mn} \quad (3-1-44)$$

例如，当 $N=8$ 时，其周期性如图 3-1-6 所示。

由于

$$W = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

$$= \cos \frac{2\pi}{N} - j \sin \frac{2\pi}{N}$$

所以当 $N=8$ 时，可得

$$W^{\frac{N}{2}} = -1, \quad W^{\frac{N}{4}} = -j$$

$$W^{\frac{N}{4}} = -j, \quad W^{\frac{3N}{4}} = j$$

可见，离散付里叶变换中的乘法运算有许多重复内容。1965 年库利-图基提出把原始的 N 点序列依次分解成一系列短序列，然后，求出这些短序列的离散付里叶变换，以此来减少乘法运算。例如设，

$$x_1(n) = x(2n) \quad n=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1;$$

$$x_2(n) = x(2n+1) \quad n=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1.$$

由此，离散付里叶变换可写成下面的形式

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{mn} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_N^{mn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_N^{mn} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{m(2n)} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{m(2n+1)} \end{aligned}$$

因为

$$W_{2N}^k = W_N^{\frac{k}{2}}$$

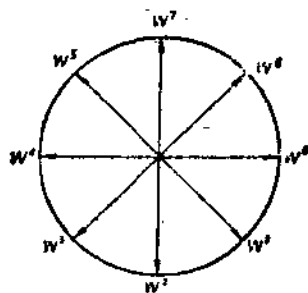


图 3-1-6 $N=8$ 时 W^{mn} 的周期性

所以

$$\begin{aligned}
 X(m) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_N^{mn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_N^{mn} \cdot W_N^m \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_{\frac{N}{2}}^{mn} + W_N^m \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_{\frac{N}{2}}^{mn} \\
 &= X_1(m) + W_N^m X_2(m)
 \end{aligned} \tag{3-1-45}$$

式中 $X_1(m)$ 和 $X_2(m)$ 分别是 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 $\frac{N}{2}$ 点的付里叶变换。由于 $X_1(m)$ 和 $X_2(m)$ 均是以 $\frac{N}{2}$ 为周期，所以

$$\begin{aligned}
 X_1\left(m + \frac{N}{2}\right) &= X_1(m) \\
 X_2\left(m + \frac{N}{2}\right) &= X_2(m)
 \end{aligned} \tag{3-1-46}$$

这说明当 $m \geq \frac{N}{2}$ 时，上式也是重复的。因此

$$X(m) = X_1(m) + W_N^m X_2(m) \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

也是成立的。

由上面的分析可见，一个 N 点的离散付里叶变换可由二个 $\frac{N}{2}$ 点的付里叶变换得到，其组合规则就是式 (3-1-45)。离散付里叶变换的计算时间主要由乘法决定，分解后所需乘法次数大为减少。第一项 $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ 次，第二项 $\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N$ 次，总共为 $2 \times \left(\frac{N}{2}\right)^2 + N$ 次运算即可完成，而原来却要 N^2 次运算，可见分解后的乘法计算次数减少了近一半。当 N 是 2 的整数幂时，则上式中的 $X_1(m)$ 和 $X_2(m)$ 还可以再分成二个更短的序列，因此计算时间会更短。由此可见，利用 W_N^m 的周期性和分解运算，从而减少乘法运算次数是实现快速运算的关键。

快速付里叶变换简称 FFT。算法根据分解的特点一般有两类，一类是按时间抽取，一类是按频率抽取。下面介绍一下 FFT 的基本形式及运算蝶式流程图。

1. 基数 2 按时间分解的算法

这种算法的流程图如图 3-1-7 所示，图 (a) 输入为顺序的，运算结果是乱序的；图 (b) 输入为乱序的，运算结果是顺序的。上述流程图的正确性不难由公式得到

的结果来验证。例如，可以由流程图（a）算得

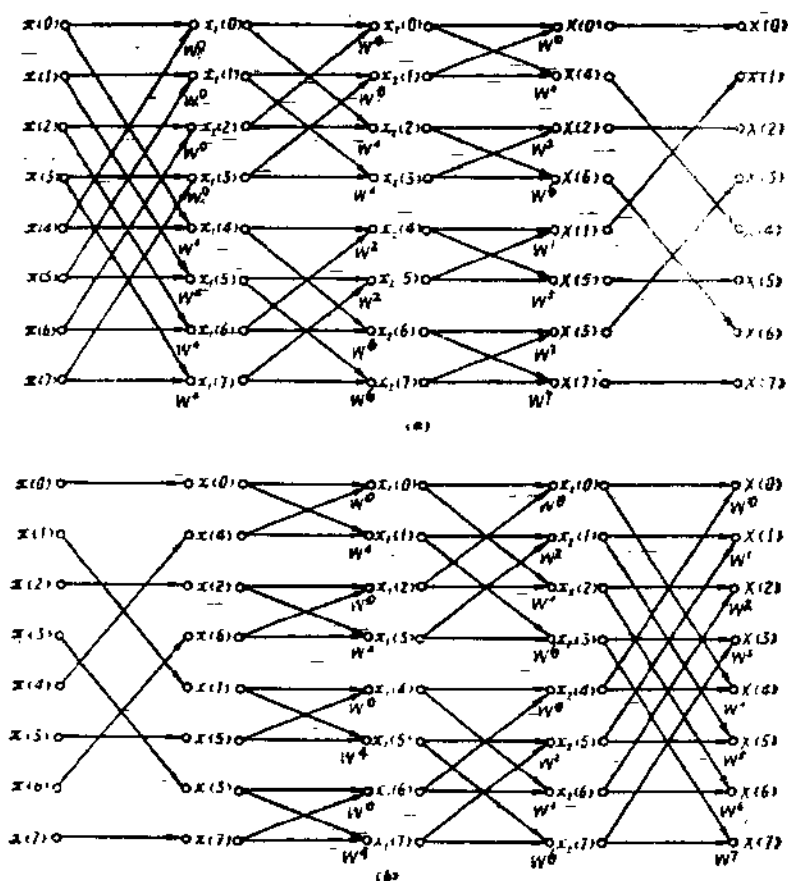


图3.1.7 FFT蝶式运算流程图（按时间分解）

$$\begin{aligned}
 X(1) &= x_2(4) + x_2(5)W^1 \\
 &= x_1(4) + x_1(6)W^2 + [x_1(5) + x_1(7)W^2]W^1 \\
 &= x(0) + x(4)W^4 + [x(2) + x(6)W^4]W^2 + [x(1) + x(5)W^4]W^1 + [x(3) + x(7)W^4]W^2W^1 \\
 &= x(0) + x(4)W^4 + x(2)W^2 + x(6)W^4W^2 + x(1)W^1 + x(5)W^4W^1 + x(3)W^2W^1 + x(7)W^4W^2W^1 \\
 &= x(0) + x(4)W^4 + x(2)W^2 + x(6)W^6 + x(1)W^1 + x(5)W^5 + x(3)W^3 + x(7)W^7
 \end{aligned}$$

由公式计算可得如下结果

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{mn}$$

$$X(1) = x(0) + x(1)W^1 + x(2)W^2 + x(3)W^3 + x(4)W^4 \\ + x(5)W^5 + x(6)W^6 + x(7)W^7$$

显然，从流程图得到的结果和利用公式得到的结果完全一致。当然，利用流程图 (b) 也会得到同样的结果。

2. 基数2按频率分解算法

这种分解方法是直接把序列分为前 $\frac{N}{2}$ 点和后 $\frac{N}{2}$ 点两个序列，即

$$x_1(n) = x(n) \quad n=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ x_2(n) = x(n + \frac{N}{2}) \quad n=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (3-1-47)$$

因此，离散付里叶变换公式可写成下式

$$X(m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)W_N^{mn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n)W_N^{mn} \\ = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n)W_N^{mn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n)W_N^{m(n+\frac{N}{2})} \\ = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n)W_N^{mn} + (W_N^{\frac{N}{2}})^m \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n)W_N^{mn} \\ = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + (-1)^m x_2(n)] W_N^{m \frac{N}{2}} \quad (3-1-48)$$

式中， $W_N^{\frac{N}{2}} = -1$ ， $W_N^{m \frac{N}{2}} = W_N^{\frac{m}{2} \frac{N}{2}}$ ， m 可以分成奇数和偶数。

当 m 为偶数时，即 $m = 2k$ ，则

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + x_2(n)] W_N^{mk} \\ k = \frac{m}{2} = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (3-1-49)$$

当 m 为奇数时, 即 $m = 2k + 1$, 则

$$\begin{aligned}
 X(2k+1) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \{x_1(n) - x_2(n)\} W_N^{\frac{N}{2}(2k+1)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \{[x_1(n) - x_2(n)] W_N^{nk}\} W_N^{\frac{N}{2}k}
 \end{aligned}$$

$$k = \frac{m-1}{2} = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3-1-49)$$

全部 N 点的付里叶变换就为式 (3.1.48)、式 (3.1.49) 之和, 也就是说, 频率为偶数和频率为奇数的离散付里叶变换可以分别从序列 $[x_1(n) + x_2(n)]$ 和

$[x_1(n) - x_2(n)] W_N^{nk}$ 的 $\frac{N}{2}$ 点付里叶变换来求得。而每个 $\frac{N}{2}$ 点付里叶变换又可

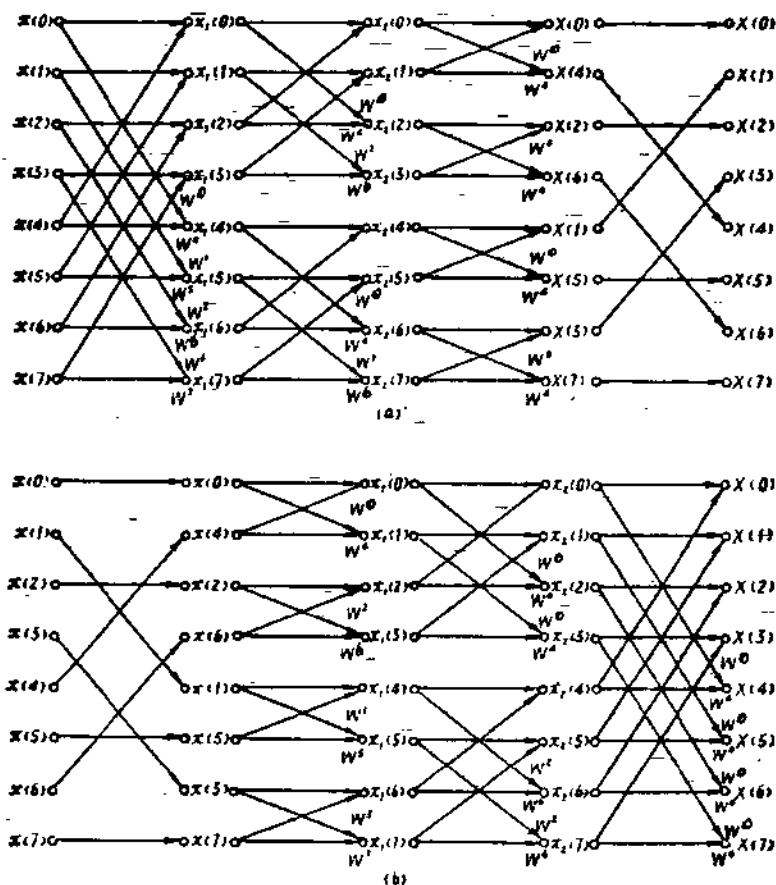


图 3.1.8 按频率分解 FFT 算法流程图