普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学分析教程

（上册）

常庚哲　史济怀　编

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

数学分析教程

（上册）

常庚哲　史济怀　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，是在1998年江苏教育出版社出版的《数学分析教程》的基础上作了较大的改动而成的，原书在全国同类教材中有非常积极的影响。

本书分上、下两册。上册内容包括：实数和数列极限，函数的连续性，函数的导数，一元微分学的基本定理，插值与逼近初步，求导的逆运算，函数的积分，曲线的表示和逼近，数项级数，函数列与函数项级数等。

本书可供综合性大学和理工科院校数学系作为教材使用，也可作为其他科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程．上册/常庚哲，史济怀编．—北京：高等教育出版社，2003.5

ISBN 7-04-011920-X

Ⅰ．数…　Ⅱ．①常…②史…　Ⅲ．数学分析-高等学校-教材　Ⅳ．017

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第012684号

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市东城区沙滩后街55号
邮政编码　100009
传　　真　010-64014048

购书热线　010-64054588
免费咨询　800-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　中国农业出版社印刷厂

开　　本　787×960　1/16
印　　张　31.75
字　　数　590 000

版　　次　2003年5月第1版
印　　次　2003年5月第1次印刷
定　　价　32.90元

序　言

“数学分析”究竟应该包括哪些内容，从西方和东欧各国名为《数学分析》的书籍来看，一直没有十分明确的定义，但是在我国，它作为大学数学系的一门课程的名称，通常包含一元和多元微分学和积分学，以及与之相关的内容.从它的地位和作用，从所占用的学时数来看，说它是数学系最重要的基础课，是当之无愧的.

微积分已有三百多年的历史，经过跨越好几个世纪的数学巨匠们的精雕细琢，千锤百炼，已经形成了一个完整的、精密的庞大知识宝库.随着时代的进步和科学技术的发展，传统数学分析教材的内容显得比较陈旧，只有极少数的几处(例如 Bernstein 多项式)涉及 20 世纪初的发现.从 21 世纪的今天来看，这种反差更加强烈，改革数学分析教材的必要性日益显露出来了.在有些新出版的数学分析教科书中，引入了拓扑空间、微分流形，这是朝“现代化”方向走的一种试验.我们的想法则是在保持原有理论水平的基础上，着重于加强数学分析同现代应用数学的其他分支学科的联系.这样做既不会加重学生的负担，又不会挤占后续课程的时间.我们认为，任何积极的改革，都不应该触动其中最基础的理论部分.回顾 20 世纪 50 年代和 70 年代以抛弃这些基本理论为特色的教学改革都未能坚持下来的历史，使我们变得聪明起来，不再干那种蠢事.

何琛、史济怀、徐森林三位教授所著的《数学分析》(共三册)一书，由高等教育出版社于 1985 年公开出版.其实，该书早在 1985 年以前，就以讲义的形式作为中国科学技术大学数学系、少年班和教改试点班的教材.至今，这套教材已经为中国科学技术大学的数学教学起过重要的作用，在全国同类教材中也产生了积极的影响.

本书正是以上述《数学分析》一书为基础而写成的.这中间融合了 20 多年来用它作为教科书的教学经验，同时也参考了国内外同类书籍中的许多名著.在我们看来，本教程有如下特色.

1. 从基本理论上看，本教程不但包含了上述《数学分析》的全部内容，而且在许多地方添加了新的材料.其中值得一提的是，在单变量的积分理论中，我们证明了“Riemann 可积的充分必要条件是被积函数在积分区间上的不连续点的集合是一零测集”.通常这一定理是“实变数函数”课程中的内容，但是我们用了

完全属于数学分析的技巧加以处理.有了这一定理,就可以删去关于可积性的许多讨论,从总体上来看反而缩短了篇幅.其次,增加了二元凸函数的理论和应用;采用了 Peter Lax 对圆的等周性质的优美证明;收入了能充满整个正方形的 Schoenberg 的连续曲线.至于更加系统的知识的补充,将在以下作详细介绍.

2. 在第 2 章"函数的连续性"的最后,我们介绍了"混沌现象",叙述并证明了李天岩和 Yorke 的"周期 3 蕴涵混沌"的著名定理(1975).虽然对混沌的研究是当今数学的一个热门分支,但是在它的生长点上,则完全是"微积分的",更具体地说,只不过是连续函数在闭区间上的性质的巧妙应用.过去,人们热衷于找出函数迭代的表达式,欢喜收敛的迭代.在这里我们告诉读者,研究不收敛的迭代会碰到一些非常奇特的现象,从而生长出新的理论.

3. 在第 8 章"曲线的表示和逼近"中,我们介绍了计算机辅助几何设计(computer aided geometric design,简写为 CAGD)中广泛使用的 Bézier 曲线.它的数学基础是经典的 Bernstein 多项式(1912 年).过去,在很多数学分析书中也介绍过 Bernstein 多项式,主要是用来作为用多项式一致逼近有限闭区间上的连续函数的一个构造性的证明.在逼近论中,研究 Bernstein 多项式的文献浩如烟海,但由于它的收敛速度十分缓慢,直到 20 世纪 60 年代初期,逼近论的专家们还在为它没有任何的实际应用而悲叹.正在那个年代,法国的工程师 Bézier 创造的、后来被人们称为 Bézier 曲线的曲线被成功地运用到汽车设计之中,已成了当今 CAGD 和 CG(计算机图形学)的理论基础.人们发现,所谓 Bézier 曲线(曲面)只不过是向量值形式的一元(二元)Bernstein 多项式,而 Bézier 的成功之点乃是他充分地利用了 Bernstein 多项式的"保形性质"——这恰好是传统的数学分析教材中不曾谈到的.

第 10 章介绍了 Bernstein 多项式的一致逼近性质,这是因为它在理论上确实有着重要的地位;同时第 5 章还研究了它的保形性质,而作为曲线理论的一部分内容,在第 8 章中讲述了 Bézier 曲线.这是数学科学同当代 GAGD 与 CG 技术的一个接口.根据我们的经验,在课堂上讲述这一部分内容时气氛最为活跃,最能激起学生的热情和兴趣.他们可以在电脑上根据 Bézier 的方法随心所欲地设计自己的曲线,亲身感受到数学理论的威力.

4. 在空间解析几何和过去的多变量函数理论中,学生都要学习曲面.但到后来,到底还有多少曲面能留在头脑之中?无非是椭球面、抛物面、马鞍面……在本书第 15 章中,我们介绍了 Bernstein-Bézier 曲面,它是当代 CAGD 和 CG 生成曲面的重要工具.在 Bernstein 多项式诞生半个世纪之后,是工程师而不是职业数学家为它找到了实际的应用;而工程师们提出的"控制多边形"这种非常生动的几何概念,又被数学家发展成为研究多元逼近理论的有力方法.数学理论的深入和工程技术的发展相互促进和推动的例子屡见不鲜,Bernstein 多项式和

GAGD,CG之间的关系,就是这方面的一个有说服力的例证.

5. 在本书的第10章中,当我们用Van der Waerden方法构造处处连续而处处不可微的函数之后,介绍了“分形几何”的大意.传统的数学分析只是把这个例子当成一个“反例”,当作怪物.而我们在这里试图告诉学生:在自然界和社会的现象中,到处存在着这种不规则、不光滑的东西.

6. 混沌理论、CAGD和CG技术、分形几何等都是当代应用数学的十分活跃的分支,都已形成了各自的完整体系.对这些材料我们是如何选择的呢？我们的原则是:

(1) 只在这些学科的“生长点”上进行讨论,“点到为止”;

(2) 不作一般的空泛的叙述和议论,务必让学生从中学到实质性的数学思想和技巧;

(3) 所涉及的数学必须是“纯微积分的”,不再牵扯任何其他高深知识;

(4) 涉及的数学推导必须是简洁的和优美的.

为做到以上几条,特别是后三条,我们必须去搜寻那些初等和简洁的证明.其中有一些经过了我们的再次加工.例如,Bernstein算子“磨光性质”的Kelisky-Rivlin定理(Pacific J. of Math.,1967),原先的证明用到了矩阵的特征值和特征向量,而我们的初等证明,只有短短的几行.

7. 对于经典的定理和理论,我们也做了一些新的处理.利用CAGD中的“混合函数”(blending functions)方法,把微分学的Lagrange中值定理、Cauchy定理一直到Taylor公式的证明,统一到一种风格之下,变得较为简洁.在证明Van der Waerden函数处处连续而处处不可导的时候,我们采用几何方法,这种方法既是非常严格的,同时又免去了传统的证明中一系列烦琐的区间表示.

8. 精选了例题和习题.我们更换了不少例题,对于保留下来的例题,也尽量寻找比较简单的解法.凡是一个例题也能用初等方法来解决的,同时也列出了初等的解法,以引导和鼓励读者尽可能用最少的知识来解决问题.特别应当提到的是:我们补充了大量的习题,其中一部分有一定的难度.我们把习题分作两大类:练习题和问题,前者是基本的定理和理论的直接应用,一般不需要太多的技巧,而后者则有相当的挑战性.也许我们认为较难的题目,一些聪明的学生,可能给出很简单的解法.有些习题同时也是正文的扩充,是本书的一个有机组成部分.

9. 在写作风格上,我们很不赞成一些数学书中的所谓“标准写法”,那些语言像是一封电码,没有任何感情色彩.我们力图把读者当成自己的朋友,平等对话,娓娓谈心.

本书与过去已有的同类教材相比有着较大的差别,内容有不少更新,篇幅也随之加大.究竟该讲授些什么,不讲什么,一个有经验的教师完全可以针对受教育者的情况和允许的教学时数作出取舍.文字可以多写,讲课可以少讲,给学生

留有自己阅读的余地.

习题的分量是过多了一些,这也要请任课的老师们根据学生的情况适当地选择.初学者应当在教师的指导下做练习,不必题题都做;更不要因为有几个题目做不出来而失去信心.

本书是在1998年江苏教育出版社出版的《数学分析教程》的基础上作了较大的改动编写而成.经过几年的教学实践,我们发现原书第二册中的隐映射定理、逆映射定理对初学者较难,这次修订把这些内容和较易接受的无穷级数和反常积分交换了次序,使学生在最后一学期才遇到这些较难的概念.一些定理的证明简化了,例如关于可积性的Lebesgue定理,现在的证明比原书更简单了.原书中的"问题"使不少读者望而却步,这次修订删去了一些过于困难的题目,同时增加了一个附录"问题的解答或提示",目的是使有志于做一些难题的读者知道从何处入手.

在写作本书的时候,我们参考了国内外与数学分析相关的许多优秀著作,在此恕不一一列名致谢.

在写作本书的时候,得到了中国科学技术大学主管教学的负责同志和数学系负责同志的热情鼓励和大力支持,作者们谨在此对他们表示诚挚的感谢.有着数学分析课程多年辅导经验的王建伟同志,对本书的写作提出了许多宝贵的意见,并为本书增添了许多习题,使本书增色不少.

囿于作者们的水平和经验,缺点和错误在所难免.欢迎广大读者对本书多提意见.

常庚哲　史济怀

2002年9月

于中国科学技术大学

郑重声明

策划编辑　王　瑜

加工编辑　胡乃冏

封面设计　于　涛

责任绘图　朱　静

版式设计　马静如

责任校对　杨雪莲

责任印制　杨　明

目　　录

上册目录

第1章　实数和数列极限

粗略地说，数学由三个大的分支组成：几何学、代数学和分析学.它们有着各自的研究对象、内容和方法，同时又互相依赖和渗透.分析学是从“微积分”开始的.虽然在古代，已经产生了微积分的朴素的思想.但是作为一门学科，则建立于17世纪下半叶.在这一方面，英国、法国和德国的数学家们做出了杰出的贡献.创立微积分的大师们着眼于发展强有力的方法，他们虽然解决了许多过去被认为是无法攻克的难题，却未能为自己的方法奠定无懈可击的理论基础.这就引起了长达一个多世纪的混乱和争论，直到19世纪初才玉宇澄清，一切混乱、误解的阴霾才为之一扫.这主要是由于有了严格的极限理论，以及这一理论所依赖的“实数体系的连续性”得以确立.

本书书名为《数学分析教程》，正是研究微积分学的原理和应用，因此我们得从实数理论和数列的极限理论谈起.

§1.1　数　　轴

数轴是表示实数的一种几何方法.数轴的重要性在于使各数之间的某些关系以及对它们所进行的某些运算变得形象化.

设想在我们面前画着一条水平的直线(图1-1).我们任意地在这直线上选定一点，记为 O，称它为**原点**；在原点的右方的直线上，取定一点，把 O 到这一点的距离定为**单位长度**，这一点用数1来表示.这样，这直线上的每一个点都可以用一个数来表示.如果这个点在点 O 的右边，用正数来表示；这个点若在点 O 的左边，则用负数来表示；表示原点 O 的数是数0.用这种方法，就把实数的全体同这条直线上的点一对一地对应了起来.这条直线称为**数轴**.从此以后，我们将数轴上的点与它所对应的数等同起来，不加区别.

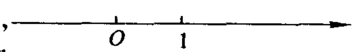

图1-1

不等式在数轴上的表示是非常形象的：$a<b$ 意即 a 是在 b 的左边.设 $a<b$，所有在 a 与 b 之间的点的集合称为**开区间**，我们写为

$$(a,b)=\{x:a<x<b\}.$$

闭区间$[a,b]$是由开区间(a,b)添上两个端点 a 与 b 而成的，即

$$[a,b]=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}.$$

半开(或半闭)的区间可以类似地定义,记为$(a,b]$或$[a,b)$.实数的全体记为$\mathbf{R}$,用$(-\infty,+\infty)$表示,也称为区间.此外,当$a\in\mathbf{R}$时,定义

$$(-\infty,a]=\{x\in\mathbf{R}:x\leqslant a\},$$

$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x>a\},$$

如此等等.开区间中所有的点,称为该区间的**内点**,对于闭区间$[a,b]$,半开半闭的区间$(a,b]$或$[a,b)$,点$x\in(a,b)$称为它们的**内点**.

一个数x的**绝对值**是指它到原点的距离,记为$|x|$.当$x\neq0$时,绝对值为$|x|$的点有两个,即x与$-x$.点x与y之间的距离是$|x-y|$.因此,以a与b为端点的开区间(或闭区间)的**长度**是$|a-b|$.

对任何实数x与y,我们有

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,-|y|\leqslant y\leqslant|y|.$$

把这两个不等式相加,得出:

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|.$$

这等价于

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

最后这个不等式称为**三角形不等式**.别看它形式简单,但却非常重要,有众多的用处.容易证明:式中等号成立的条件是x与y中至少有一个等于0,或者x与y有相同的正负号.

在中学里,大家已经学习过**有理数**.任何有理数都可以表示为两个整数之商:

$$r=\frac{p}{q},$$

上式中p,q都是整数,且$q\neq0$.大家还知道:有理数经过加、减、乘、除(除数不能是0)四则运算之后仍为有理数.据此,称全体有理数组成一个**数域**.就是说,仅仅通过四则运算,我们不可能从有理数而得到别样的东西.

在数轴上很容易地表示一个有理数.设q是任意给定的正整数,把单位长度分成q等份,找出代表$\frac{1}{q}$的那一点;从而,对任何整数p,便不难找出代表$\frac{p}{q}$的那一点.对于固定的正整数q,如今让p遍取所有的整数,那么$\frac{p}{q}$这些数把数轴分成一些长度为$\frac{1}{q}$的区间.每一个实数x位于这些区间中的一个区间,这就是说,对于任意固定的实数x,一定可找出一个整数p,使得

$$\frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p+1}{q},$$

这个不等式等价于

$$0 \leqslant x - \frac{p}{q} < \frac{1}{q}.$$

由此得

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}.$$

由于 q 是任意取定的正整数，我们可以事先把 q 取得充分大，以致使 $\frac{1}{q}$ 小于我们预想的值. 上面那个不等式表明：每一个实数都能用有理数去逼近到任意精确的程度. 这意味着有理数在数轴上是稠密的.

虽然如此，可是古代希腊人发现了一个令人惊奇的事实：数轴上存在着不能被有理数表示的点. 例如说，边长为 1 的正方形的对角线，因其平方等于 $1^2+1^2=2$ 而被记为 $\sqrt{2}$，就不是有理数(图 1－2).

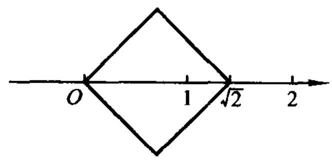

图 1－2

从此以后，我们用 $\mathbf{N}^*$ 来表示正整数的全体. 不用多少知识便可以证明：

例 1　设 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 n 不是完全平方数，那么 $\sqrt{n}$ 就不是有理数.

证明　用反证法. 假设 $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$，其中 $p, q \in \mathbf{N}^*$，由于 n 不是完全平方数，故有 $m \in \mathbf{N}^*$，使 $m < \frac{p}{q} < m+1$，由此得到 $0 < p - mq < q$. 在等式 $p^2 = nq^2$ 的双方都减去 mpq，得到 $p^2 - mpq = nq^2 - mpq$，这等价于

$$\frac{p}{q} = \frac{nq - mp}{p - mq}.$$

令 $p_1 = nq - mp$，$q_1 = p - mq$，由 $q_1 \in \mathbf{N}^*$ 且 $q_1 < q$，所以 $p_1 \in \mathbf{N}^*$ 且 $p_1 < p$. 对等式

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$$

反复地进行同样的讨论，可以得出两串递减的正整数列

$$p > p_1 > p_2 > p_3 > p_4 \cdots \text{与}\ q > q_1 > q_2 > q_3 > \cdots$$

使得

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = \cdots.$$

这是不可能的，因为从 p 或 q 开始的正整数不可能无止境地递减下去. 这就证明了 $\sqrt{n}$ 不可能是有理数.　□

注：上行中所用的记号"□"表示待证明的命题已经证明完毕.

上述证明中所用到的方法，叫做**无穷递降法**.这是在初等数论中常用的一种方法.

数的产生和发展是由计数和量测的需要而促成的.所以，如果我们只局限于有理数的范围，那就不得不承认边长为1的正方形的对角线是无法量测的.不言而喻，我们不可能做出这样的结论.因为任何度量几何都不可能建立在这样的基础之上.只能承认，局限在有理数的范围之内，我们无法给数轴上的每一个点规定一个数.也就是说，为了度量的需要，光有有理数还是不够的.这就迫使我们增添一类新数，这种新数我们称之为**无理数**.

练习题 1.1

1. 设 a 为有理数，b 为无理数.求证 $a+b$ 与 $a-b$ 都是无理数.当 $a\neq0$，ab 与 $\frac{b}{a}$ 也是无理数.
2. 求证：两个不同的有理数之间有无限多个有理数，也有无限多个无理数.
3. 证明：$\sqrt[3]{2}$ 是无理数.
4. 求证 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是一无理数.
5. 在平面直角坐标系中，当 x 和 y 都是有理数时，称点 (x,y) 为有理点.求证：圆周 $(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$ 上只有惟一的有理点.
6. 求证：对任何实数 a,b 有不等式
$$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a+b|.$$
7. 设 a,b 为实数，求证：$|ab|=|a||b|$ 并且当 $b\neq0$ 时
$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$
8. 利用绝对值的几何意义而不通过计算写出不等式 $|x+1|<|x-1|$ 的解.
9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数，证明不等式
$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|,$$
并指明式中等号成立的条件.
10. 求证：
$$\max(a,b)=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2},$$
$$\min(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2},$$

并解释其几何意义.

11. 设 n 个分数 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}$ 的分母 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都大于零，证明 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$介于这些分数的最小值和最大值之间.

12. 设 $n=2,3,\cdots,-1<x$ 且 $x\neq 0$，求证：$(1+x)^n>1+nx$.

(提示：用数学归纳法.)

13. 设 $x,y\geqslant 0$，m,n 为正整数，求证

$$x^my^n+x^ny^m\leqslant x^{m+n}+y^{m+n}.$$

等号当且仅当 $x=y$ 时成立.

问题 1.1

1. 非负整数 a,b 使得$\frac{a^2+b^2}{1+ab}$为整数，求证这个整数必是某一整数的平方.

(本题是 1988 年第 29 届国际数学奥林匹克竞赛的试题，有 11 名中学生给出了正确的证明，我国的 6 名参赛选手中有 2 人此题得了满分.)

2. 设 n 为正整数且 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$，求证当 $n>1$ 时，

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

等号当且仅当 $x=y$ 时成立.

3. 若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 并且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，证明 Tchebycheff 不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i\leqslant n\sum_{i=1}^n a_ib_i.$$

4. 若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 并且 $b_1+b_2+\cdots+b_n=0$，求证 $\sum_{i=1}^n a_ib_i\geqslant 0$.

§1.2 无尽小数

在本节里，我们将把实数定义为一个无尽小数. 这种方法实际上是测量过程的数学抽象.

整数把数轴分成无穷多个半开区间$[n,n+1)$，数轴上每一个点都只属于这

些区间中的一个.设正实数 a 代表数轴上的一个点,它属于某一个区间$[n,n+1)$,那么,a 的小数表示的整数部分就是 n,而小数部分是 $a_1a_2a_3\cdots$,即

$$a=n.a_1a_2a_3\cdots.$$

下面说明 $a_1,a_2,\cdots$ 这些数是如何确定的.我们把区间$[n,n+1)$分成 10 个互不相交的左闭右开的半开区间,每一个区间的长度为$\frac{1}{10}$.数 a 只能属于那 10 个区间中的一个,比如说属于

$$\left[n+\frac{a_1}{10},n+\frac{a_1+1}{10}\right).$$

这便确定了 a 的小数点之后的第一位数字 a_1.小数点之后的第二位数字 a_2 也是这样确定的,即再把上述区间分成 10 个相等的左闭右开的子区间,再看 a 属于其中的哪一个,如此等等.将上述步骤反复地进行下去,就把数 a 表示成为无尽小数.注意:在这种构造方法中,不会出现无尽小数表示里从某一位起以后的各位数字均为 9 的情况.

现在,我们可以摆脱任何的直观的几何思考,而简单地说:**实数**就是无尽小数.

实数的无尽小数表示的方便之处是:它可用来容易地比较两个数的大小.例如,我们问:两个数$\frac{17}{20}$与$\frac{45}{53}$中,哪一个比较大?它们的接近程度如何?只有那些算术能力很强的人,才能够不经过“通分”这一费事的过程把它们写成

$$\frac{901}{1\,060}与\frac{900}{1\,060}$$

而断言第一个数比第二个数大,但大得不多,不超过千分之一.但是,当这两个数已表示成了无尽小数的形式

$$\frac{17}{20}=0.850\,00\cdots,\frac{45}{53}=0.849\,05\cdots,$$

任何人都能一眼看出上述的结论。

这一个具体的数值例子,实际上是告诉了我们比较两个正数的大小的可行的办法.设想它们已经被表示为无尽小数,我们将它们上、下排列并将小数点对齐,从左到右地比较对应位置上的数字,并看在哪一位上的数字开始不同,我们便知道哪一个数较大.

在中学里,大家已经知道,有理数的特征是它或是有尽小数,或是循环的无尽小数.由于有尽小数可以写成从某位起以后的数字全为 0 的无尽小数,所以我们可以说**有理数**是循环的无尽小数.这样,我们称不循环的无尽小数为**无理数**.在这个意义上,全体无尽小数就称为**实数**.数轴上的任何一点,都可以用一个实