



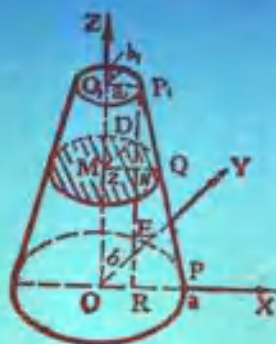
GAO DENG
SHU XUE
FANG FA DAO LUN

高等数学方法导论

(第二版)

主编 黄光谷 余尚智

武汉测绘科技大学出版社



高等数学方法导论

(第二版)

黄光谷 余尚智 主编

本书荣获

湖北省高等学校 1993 年优秀教学成果奖

武汉纺织工学院 1992 年优秀教学成果奖

湖北省教育学院 1991 年科研优秀成果奖

武汉测绘科技大学出版社

高等数学方法导论(第二版)

© 黄光谷 余高智 主编

*

武汉测绘科技大学出版社出版发行

(武昌珞珈路 39 号)

新华书店湖北发行所经销

鄂南新华印刷厂激光照排

化四院印刷厂印刷

(武昌卓刀泉路 31 号)

开本 787×1092mm 1/32 印张 14.25 字数 358 千字

1991 年 5 月第 1 版 1993 年 5 月第 2 版第 3 次印刷

ISBN 7-81030-089-X/O·10

印数 14000—20000 定价 5.70 元

本书若有印装质量问题,可向承印厂调换

内 容 提 要

本书是为了帮助读者解决学习“微积分”的困难而编写的。全书共分十一章，包括了高等数学与数学分析的绝大部分内容。各节按内容提要、答疑辅导、题型归类三部分编写，每章有小结与综合题及自我测验题，书末附有测试题答案及提示、几套试题及答案。

本书由浅入深、书写精练，对大量的各类试题按题型与解法进行了“双向”归纳、便于自学。可供工科、理科、农林科、财经类各专业大、专学生、研究生，自学者作为学习高等数学方法的辅导书和备考、应试的指导书，也可供教师及科技工作者参考。

序 言

本书第一、二版问世后，不胫而走，很快就需要第三次印刷了，这在当前出版界是一个小小的“新闻”了。原因是，不论怎么说，凡是想掌握一点科学技术，就不能不学数学。因此，出版这样一本书，帮助广大的学习者，理应受到欢迎。

“高等数学”始终是一只“拦路虎”。它之所以成“虎”，因为它索要的“买路钱”确实有点分量：它要逼学习者有系统地、有条理地思考，有理有据地论证，准确无误、毫不含糊地回答问题。这不但是对从事科学技术工作者的最起码的要求，实际上也是对当代一切自认为有文化的人的最起码的要求。这一切都被认为“单向的”、“线性的”、“一维的”……“思维方式”，可是真正成为一种讽刺的是，这些“开拓家”还得从数学中“搞”来这些词，才能骂人。言归正传，要达到上述要求实非易事，因此需要这样一本书。

这书是作者们根据广大数学教师——当然，也包括他们自己——多年教学经验写成的。它适合于需要学习“高等数学”课程的大学生、函授生……（按我的“单向的”、“线性的”、“一维的”思维方式，不妨归纳为，“有志掌握最起码的高等数学知识而又苦于少人帮助的人们”）的需要。作者们共同的想法是“三十余载，辛勤耕耘，写成此书，留给后人”。我想，他们太“悲观”了，不论世上如何熙熙攘攘，下海也罢，上山也罢，当今社会上还有不少想读一点数学的人，为这些“今人”写一点书，同时相信，会有人写出更好的书给

“后人”——将来作者们的“今人”——总是很有意义的事。
是为序。

齐民友

1993. 5. 30

前 言

高等数学与数学分析（通常简称《微积分》）是各工科、理科、农林科与财经类高等院校各专业的必修课，其重要性是众所周知的，学生普遍反映微积分难学。本书就是为了指导读者解决学习微积分的困难而编写的。

全书共分十一章（详见目录），包括了高等数学与数学分析的绝大部分内容。为了配合教材、便于读者阅读，编写本书时，我们参照了国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》和教材的系统性。但又不完全受该系统的限制，对有些方法进行了适当的集中与归纳，以便读者全面地掌握有关方法。本书各节按内容提要、答疑辅导、题型归类三部分编写，力求叙述简明，提问确切，归类恰当。每章有一节综合题，各章后附有一套自我测验题，全书附有两套阶段考试题，书末附有测验、考试题答案及提示等。

本书收入了许多研究生入学、数学竞赛以及学科考试等试题。对于研究生入学试题，仅标注校名和年号；选编这些试题，是为了说明有关内容，不具有其它含意。我们在研究各类大量试题的基础上，对它们作了精选和双向归纳。一是对题型作了归纳；二是对同一题型的不同解法作了归纳。这样不仅使读者对微积分的主要方法有较全面和系统的了解，而且可以活跃思路，使读者灵活掌握有关方法。

为了节省篇幅、突出重点，书中对一些例题的推导过程

写的比较简略。读者在阅读这些内容时，不妨补充验算一下，会大有裨益。对于还未学到的内容，初学者可以暂时跳过这些内容往后看，回过头来再补学，体会将会更全面、更深刻。

本书内容新，观点新、针对性强，适用面广，由浅入深，便于自学。适宜各工科、理科、农林科与财经类各专业的大、专学生，研究生以及卫电、电大、函大、职大、夜大、自修大学员阅读，也可供教师及科技工作者参考。

本书由黄光谷和余尚智主编，编委是（按姓氏笔划）：

王世敬 冯兴山 刘一勋 刘代芳 宋占奎 余尚智
范允正 周长菊 张剑英 张祖发 杨 球 杨 谦 赵德
修 黄光谷 梅家斌 程孝先 曹宪武 詹前涌 穆汉林
戴定春。

编写本书得到武汉纺织工学院和纺院基础课部领导的关心和支持，在此我们对他们表示衷心的感谢。

本书第一至九章以及附录由黄光谷终审定稿，第十、十一章由余尚智终审定稿。由于我们水平有限，加上时间仓促，书中可能有不妥之处，恳请读者多提宝贵意见，以便再版时修改。

编 者

1991年4月

说明：本书第二次印刷前由黄光谷对全书作了修订，并且增加了1992年全国硕士研究生入学考试与湖北省高等数学联考的试题及答案等内容。第三次印刷又增加了两套试题。

目 录

序 言 前 言

第一章 函数与极限

§ 1.1	函数	(1)
§ 1.2	极限的概念与性质	(9)
§ 1.3	连续与间断	(16)
§ 1.4	求极限的主要方法	(21)
§ 1.5	小结与综合题	(31)
	自我测验题(一)	(36)

第二章 导数与微分

§ 2.1	导数概念与求导法	(38)
§ 2.2	微分概念与微分法	(47)
§ 2.3	高阶导数与高阶微分	(52)
§ 2.4	微分的应用	(59)
§ 2.5	综合题	(62)
	自我测验题(二)	(65)

第三章 中值定理与导数的应用

§ 3.1	中值定理	(66)
§ 3.2	导数的应用	(80)
§ 3.3	综合题	(91)

自我测验题(三).....	(95)
---------------	------

第四章 不定积分

§ 4.1 不定积分的概念与性质.....	(97)
§ 4.2 积分法	(103)
§ 4.3 小结与综合题	(125)
自我测验题(四)	(131)

第五章 定积分及其应用

§ 5.1 定积分的概念与性质	(133)
§ 5.2 计算定积分的方法	(144)
§ 5.3 定积分的应用	(163)
§ 5.4 小结与综合题	(176)
自我测验题(五)	(181)

第六章 空间解析几何与向量代数

§ 6.1 向量代数	(183)
§ 6.2 空间解析几何	(193)
§ 6.3 小结与杂例	(208)
自我测验题(六)	(216)
阶段考试题(1)	(218)

第七章 多元函数微分法及其应用

§ 7.1 多元函数	(220)
§ 7.2 偏导数与全微分	(226)
§ 7.3 隐函数、方向导数与梯度.....	(234)
§ 7.4 偏导数与全微分的应用	(244)

§ 7.5	小结与综合题	(251)
	自我测验题(七)	(256)
第八章 重积分		
§ 8.1	二重积分	(258)
§ 8.2	三重积分	(271)
§ 8.3	重积分的应用	(282)
§ 8.4	小结与综合题	(287)
	自我测验题(八)	(296)
第九章 曲线积分与曲面积分		
§ 9.1	曲线积分与曲面积分	(298)
§ 9.2	格林公式	(314)
§ 9.3	高斯公式与斯托克斯公式	(322)
§ 9.4	散度与旋度	(328)
§ 9.5	小结与综合题	(334)
	自我测验题(九)	(339)
第十章 无穷级数		
§ 10.1	数项级数	(343)
§ 10.2	幂级数	(351)
§ 10.3	傅立叶级数	(363)
§ 10.4	综合题	(371)
	自我测验题(十)	(376)
第十一章 微分方程		
§ 11.1	一阶方程	(377)

§ 11.2	高阶方程·····	(385)
§ 11.3	常系数线性微分方程组·····	(393)
§ 11.4	综合题·····	(401)
	自我测验题(十一)·····	(407)
	阶段考试题(Ⅰ)·····	(408)
附录 I	自测题与考试题答案及提示·····	(410)
附录 II	几套试题及答案·····	(429)
	(一) 1992 年全国硕士生入学考试数学(一)试题及答案	
	(二) 1992 年湖北省高等数学联考(下)试题及答案	
	(三) 1993 年全国硕士生入学考试数学(一)试题及答案	
	(四) 1993 年武汉纺织工学院高数(上)试题及答案	
参考文献	·····	(444)

后记

第一章 函数与极限

高等数学与数学分析研究的对象是函数.

研究函数的方法是极限方法.

函数的连续性是函数的一个重要属性. 连续函数具有很多特性, 它是最常用到的函数, 是高等数学与数学分析的主要研究对象. 因此, 函数、极限与连续是高等数学中最重要、最基本的概念, 是高等数学理论的基础.

本章学习的要求是:

1. 深入理解函数概念, 了解函数的类型和性质;
2. 正确理解极限概念, 熟练掌握求(证)极限的各种方法;
3. 理解函数连续与间断的概念, 了解连续函数的性质.

§ 1.1 函 数

一、内容提要

1. 函数定义

定义 1 用数集上的自变量与因变量间的对应关系来定义(略, 见书[1], P. 6 或[2], P. 5).

定义 2 (用点集与对应来定义) 设 D 是 x 轴(即一维空间 R) 上的一个点集, 如果对于每个点 P (或 x) $\in D$, 变量 y

按照一定的规则总有确定的值和它对应, 则称 y 是变量 x 的 (一元) 函数 (或点 P 的函数), 记为

$$y=f(x), \text{ 或 } x \rightarrow y, \text{ 或 } y=f(P).$$

函数又称为映射、映照、变换. 点集 D 称为该函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量, 数集 $\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为该函数的值域. 本书中的函数均指单值函数. 作为点函数, 很容易把函数概念推广到多元函数.

2. 函数性质简述

1) 有界性: $|f(x)| \leq M, \forall x \in X \subset D$ (符号“ $\forall$ ”读作“任给”);

2) 单调性: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(>)}{<} f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I \subset D$;

3) 奇偶性: $f(-x) = (\mp)f(x), \forall x, -x \in D$;

4) 周期性: $f(x \pm T) = f(x), \forall x, (x \pm T) \in D$;

5) 分析性质: 连续性、可微性、可积性等, 见本书有关部分 (此略).

3. 函数的分类 (略)

4. 复合函数. 简述为: $y=f[\varphi(x)]$, 其中 f 称为外函数, φ 称为内函数.

5. 反函数. 简记为 $x=f^{-1}(y)$ 或 $y=f^{-1}(x)$, 其中原来的函数 $y=f(x)$ 叫做直接函数.

6. 基本初等函数. 是常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数六类函数的统称. 它们的定义、性质与图象在中学数学里已学, 此略.

7. 初等函数. 是指由基本初等函数经过有限次的四则运算与复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.

8. 其它常见的一些函数

1) 分段函数: 在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子(或方式)表示的函数.

2) 符号函数(Signum).

$$y = \operatorname{sgn} x \triangleq \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

(其中符号“ $\triangleq$ ”读作“记为”, 下同.)

3) 取整函数: $y = [x], \forall x \in \mathbb{R}$, 表示不超过 x 的最大整数, 其图形是阶梯曲线. 如 $[3.5] = 3$. 显见

$$n > [x] \Rightarrow n > x \quad (n \in \mathbb{N}).$$

4) 幂指函数: $y = u(x)^{v(x)}$, 常变形为复合指数函数 $y = \exp[v(x) \ln u(x)]$ 进行研究(其中 $e^f \triangleq \exp f$, 下同).

5) 狄里赫勒(Dirichlet)函数:

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

6) 依赖于参变量的函数: $y = f(x, t)$, 一般地, x 表自变量, t 表参数.

7) 变上限的积分定义的函数:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (F'(x) = f(x), f \in C(I)).$$

(其中 $f \in C(I)$ 表示 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 下同.)

8) 用幂级数表达的函数(略. 见第十章).

9. 常用绝对值等式及不等式

$$|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon;$$

$$|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \quad |x^n| = |x|^n;$$

$$|x/y| = |x|/|y|;$$

$$a < x < b \Rightarrow |x| < |a| + |b|;$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

二、答疑辅导

1. 确定函数的定义域有哪些方法?

答 通常有如下方法:

- 1) 偶次根式的函数,被开方式的值非负;
- 2) 分式函数,其分母不为零;
- 3) 对数函数,其真数大于零,底数大于零且不等于1;
- 4) 幂的指数是零的函数,其底数不等于零.
- 5) 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 定义域是直接函数 $y=f(x)$ 的值域;
- 6) 由四则运算所构成函数的定义域为各成员函数定义

域的交集;

7) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $u=\varphi(x)$ 定义域的子集,此子集上函数 $u=\varphi(x)$ 的函数值,必属于 $y=f(u)$ 的定义域;

8) 具有实际意义的函数,其定义域是相应解析式表示函数定义域的子集,此子集兼顾实际意义来确定.

2. 函数的构造法主要有哪些?

答 函数的构造法主要有:

- 1) 拼接法(分段函数);
- 2) 叠加伸缩法(和、差、积、商、幂函数);
- 3) 重叠法(复合函数);
- 4) 逆表示法(反函数);
- 5) 由方程(或方程组)确定法(隐函数);

- 6) 镶嵌参数法(依赖于参变量的函数);
- 7) 增量之比极限法(导函数);
- 8) 导数之逆运算法(原函数);
- 9) 积分表示法(变上限积分函数);
- 10) 无穷级数表示法(和函数);
- 11) 求解微分方程法(解函数);

三、题型归类

1. 求函数的定义域与值域

例1 求 $y = \sqrt{\cos x} + \ln \sin x$ 的定义域.

$$\text{解 } \begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k\pi - \pi/2 \leq x \leq 2k\pi + \pi/2, \\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad (k \in J), \end{cases}$$

即 $2k\pi < x \leq 2k\pi + \pi/2$,

故所求定义域为 $(2k\pi, 2k\pi + \pi/2]$ ($k \in J$).

例2 求 $y = (3x^2 + 6x + 4)/(x^2 + 2x + 3)$ 的值域.

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{3x^2 + 6x + 4}{x^2 + 2x + 3} &= \frac{3(x^2 + 2x + 3) - 5}{x^2 + 2x + 3} \\ &= 3 - \frac{5}{(x+1)^2 + 2}, \\ \therefore (x+1)^2 \geq 0 &\Rightarrow 0 < \frac{5}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \\ 3 - \frac{5}{2} &\leq 3 - \frac{5}{(x+1)^2 + 2} < 3, \end{aligned}$$

故函数的值域为 $[1/2, 3)$.

2. 求函数的表达式

要正确理解函数 $f(x)$ 的符号 f , 建立函数关系.