解析集合论讲义及其应用

H. H. 鲁辛

科 学 出 版 社

解析集合論講義及其應用

Н. Н. Лузин 著

丁 石 孫 譯

科 學 出 版 社

1 9 5 8 年

Н. Н. Лузин

ЛЕКЦИИ ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Министерство культуры СССР-Главиздат
Государственное издательство
Технико-теоретической литературы
Москва—1953

內 容 提 要

描述集合論是隨着集合可測性問題而產生的一門學科，它是以點集的描述結構作爲研究的主要目的。Н. Н. Лузин 和他的學生們在這方面作了大量的極爲重要的工作。

本書是 Н. Н. Лузин 在 1930 年第一次在巴黎以法文出版。俄文版是 Н. К. Бари 根據法文本翻譯的，作了少許修改，並由 Л. В. Келдыш 與 П. С. Новиков 寫了序言，加了註釋，中文本是根據 1953 年的俄文本譯出的。

本書分成五章。第一章是基本概念，包括集合的一些基本定義，主要是給出了B可測集合的定義，第二章是關於B可測集合結構的研究，在這一章中包括了全部到寫書時爲止所知道的有關B可測集合的基本結果。第三章是解析集合，在這裏證明了可分離性的兩個原則，並介紹和討論了篩集的概念。第四章是隱函數，在這裏研究了隱函數的各種情形，並在每個情形下，回答了 Lebesgue 法則是否成立的問題。第五章是投影集合，這一方面問題比較多，因之除給出一些初步結果外，還提出不少問題。

此外，還有 Н. Н. Лузин 的兩篇文章作爲附錄，在註釋中包括了不少 1930 年以後的一些新的結果。

解析集合論講義及其應用

Н. Н. Лузин 著
丁 石 孫 譯

*

科 學 出 版 社 出 版（北京朝陽門大街 117 號）
北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

科學出版社上海印刷廠印刷　新華書店總經售

*

1958年4月第 一 版　　書號：1107　字數：227,000
1958年4月第一次印刷　　開本：850×1168 1/32
（滬）：0001–1,880　　印張：9 9/16

定價：(10) 1.80 元

編者序言

集合的描述理論是隨着集合可測性的問題產生的．在數學的不同部門中，特別是在分析中，經常發生關於某一個集合或某一個函數的可測性的問題．因之用來證明集合與函數的可測性的方法是極爲重要的．

事實上，所有到目前爲止所知道的集合可測性的證明都是給出一種方法，利用它可以作出這個集合，也就是給出這個集合的描述結構．關於某一個函數 $f(x)$ 的可測性的問題都可以歸結爲它的 Lebesgue 集合，即集合 $[f(x)>a]$ 的可測性問題．測度的最初幾個定義之一是 Borel 給出的．按 Borel 的意義，可測集合後來稱爲 B 可測集合或 B-集合，它們就是從區間出發，對可數多個集合作可數多次和與交所能得到的集合．後來，當 Lebesgue 引進了集合測度的新的定義時，可測集合的類就遠較 B 可測集合的類爲大．在這以後就產生了進一步發現更廣的可測集合與函數類的問題．

Baire 研究了最簡單的不連續函數．他指出了那些可以從連續函數出發，經過可數多次取極限的運算所能得到的不連續函數的超限分類，並且作出了前三類函數的例子． Lebesgue 證明了，B 可測集合就是 Baire 分類中函數的 Lebesgue 集合，並且它的類是與 Baire 分類中函數的類是一致的．他證明了所有的類 K_a 都是不空的，這裏 a 是自然數或第二類超限數，他並且可以不利用 Zermelo 公理作出了不屬於 Baire 分類的函數的例子，這也就是 B 不可測集合的例子．在這個時候，一方面在連續統問題上發現了極大的困難，另一方面却又發現了，藉助於 Zermelo 公理可以作出遠遠超出 B 可測集合的範圍的集合，特別是在 Lebesgue 意

義下的不可測集合．在這個情况下，詳細研究算術連續統與它的子集的性質，指出建立可測集合的過程以及分析不可測集合的給出方法就成爲必要的了．就是從這裏 Н. Н. Лузин 開始了他的工作．

Н. Н. Лузин 以他特殊的才能選擇了富有成果的方向，確當地提出問題並找出必要的定義，這樣，在他的周圍就集合了一大羣有才能的年青人，在他所提出的問題下進行工作．因此，Н. Н. Лузин 不祇是自己緊張地工作，他並且指導了一個年青科學家的集體去解决描述集合論中一些最迫切與最困難的問題，其中許多問題是在相當短的時間中解决了的．

描述集合論中一個基本的方向，這是 Н. Н. Лузин 與他的學派所從事工作的，就是能行集合（Эффективное множество）的研究，所謂能行集合就是不用 Zermelo 公理可以作出的集合．

現在這本書是 Н. Н. Лузин 1930 年第一次在巴黎出版的譯書，原書列入由 E. Borel 所編輯的一套函數論方面的叢書中，這本書包含着 Н. Н. Лузин 與他的學生在 1915—1929 年這段時間內在這方面所得到的基本結果．

Лузин 提出的第一個問題是：是否每一個不可數的 B 可測集合都包含一個完全子集？這個問題是 Lebesgue 所沒有解决的，他也研究過 B 可測集合．換句話說，這個問題就是：是否這樣的集合都有連續統的勢？П. С. Александров 在肯定的意義下解決了這個問題，爲了解决這個問題他給出了一種新的得出 B 可測集合的運算，稱爲 A-運算．П. С. Александров 證明了，從區間出發利用 A-運算可以得出任意的 B 可測集合，並且每一個這樣得出的集合都包含一個完全子集，然後 Н. Н. Лузин 提出了問題，對區間作 A-運算是否能得出 B 不可測集合？М. Я. Суслин 解决了這個問題，他證明了，在對區間作 A-運算所得的集合中，存在 B 不可測集合．對區間作 A-運算所得的集合稱爲 A-集合．在這

本書中 H. H. Лузин 稱 A-集合爲"解析集合". 不過這個名稱是不通用的. 在文獻中它們都是稱爲 A-集合或 Суслин 集合. 描述集合論更進一步的發展就是研究 B 可測集合與 A-集合以及發現 A-集合範圍以外的能行集合.

本書的第一與第二章是討論 B 可測集合的理論. 第一章具有入門的性質,其中介紹了幾種不同的用以得出 B 可測集合的運算,並建立了它們之間的關係. 第二章包含着 B 可測集合理論的詳細的闡述. 這裏介紹了全部到寫書時爲止所知道的有關這種集合的基本結果.

H. H. Лузин 考慮 Baire 空間 $\mathscr{I}_x$ 中的集合, $\mathscr{I}_x$ 即所有無理點的集合(或者 $\mathscr{I}_{x_1x_2\cdots x_n}$ 是 n 維歐氏空間中所有無理點的集合). 這樣, 描述集合論的敍述與說明具有特殊的單純性, 因爲所考慮的空間是零維的. H. H. Лузин 採取 Baire-Vallée-Poussin 的 B 可測集合的分類. 在這個分類中,屬於零類 K_0 的是空間 $\mathscr{I}_x$ 中所有的開閉集合. 集合 E 屬於 α 類,如果它是類 $<\alpha$ 的集合敍列的極限,且又不屬於任何小於 α 的類. α 類的集合分成幾種:素集或稱可上達的集合,它是類 $<\alpha$ 的集合的交; 可下達的集合,它是類 $<\alpha$ 的集合的和; 不可達的集合, 它既不是類 $<\alpha$ 的集合的和又不是交. 如果 α 是第二型的數, 那麼在類 K_α 中還有一種集合,即雙邊可達集合, 它同時是類 $<\alpha$ 的集合的交與和. 這樣的集合組成基 B_α. H. H. Лузин 證明了,每一個 α 類的集合都是類 $\leqslant\alpha$ 的素集的和. 在第二章中研究了有關 α 類的集合如何由類 $\leqslant\alpha$ 的素集構成的問題.

H. H. Лузин 引進了集合的可分離性這概念,它在描述集合論中佔有重要的地位: 兩個不相交的集合 E_1 與 E_2 稱爲用類 L 的集合可分離,如果存在兩個不相交的 L 類的集合 H_1 與 H_2, 一個包含 E_1 而另一個包含 E_2.

$$E_1\subset H_1,\quad E_2\subset H_2,\quad H_1H_2=0.$$

Лузин 證明了，兩個不相交的 α 類的素集總可以用類 $<\alpha$ 的集合或基 B_α 的集合(如果 α 是第二型的)分離開．在這個定理的基礎上得出了不提高類的判別法，即可數多個類 $\leqslant\alpha$ 的素集的和仍然是類 $\leqslant\alpha$ 的集合的判別條件．

因爲 B 可測集合是由素集構成的，所以 Н. Н. Лузин 提出了研究 α 類素集的結構以及低類素集的構造性的構造法問題．這裏他說明了 Baire 的 3 類素集的例子與 Л. В. Келдыш 的 4 類素集的例子．α 類素集的結構的研究後來是 Л. В. Келдыш 作的(參看註釋)．最後，在這一章的末尾，Н. Н. Лузин 介紹了 М. А. Лаврентьев 的關於按集合如何由素集構成分 α 類爲子類的工作．

爲了研究給出 B 可測集合的方法問題，Лузин 證明了關於 B 可測集合的正則參數表示的重要定理．他證明了，每一個 B 可測集合，如果除去不超過可數多個點，都是空間 $\mathscr{I}_x$ 的連續且是雙邊單值的映像．

這個定理在 A-集合的理論中有很大的價值，因爲 Лузин 證明了(第三章)，集合 E 表示爲 $\mathscr{I}_x$ 的連續映像的正則性，也就是雙邊單值性，是集合 EB 可測的充分條件．

第三章包含了 A-集合的理論．A-集合就是從空間 $\mathscr{I}_x$ 的區間(或空間 $\mathscr{I}_{x_1x_2\cdots x_n}$ 的平行體)出發可以用 A-運算得出的集合，而 A-運算是 П. С. Александров 在解決 B 可測集合的勢的問題時發現的．從 П. С. Александров 的定理直接推出，每一個不可數的 A-集合都含有完全子集，因而有連續統的勢．Н. Н. Лузин 證明了，每一個 A-集合都是可測的並具有 Baire 性質[1]．

Лузин 提出了關於找尋 A-集合是 B 不可測的判別條件的問題．М. Я. Суслин 找到了這樣的判別法，他證明了，A-集合 E 爲 B 不可測的充分而必要的條件是它的餘集 CE 不是 A-集合．

1) 所謂集合 E 具有 Baire 性質的就是指，在每一個完全集中都可以找到一個基份，在它上面或者 E，或者餘集 CE 都是第一類型的．

從這個定理就發現了一類新的集合，即所謂 CA-集合，它們是 B 不可測的 A-集合的餘集. CA-集合的研究在 Н. Н. Лузин 描述集合論方面的工作的進一步發展中佔有重要的地位. Суслин 定理原來的證明是非常複雜並且要用到第二類超限數的全體. Н. Н. Лузин 費了許多精力把 Суслин 定理的證明中的超限數去掉. 爲此，他找到了內容極爲豐富的關於集合的可分離性的概念，這一點我們在上面已經提到過，他並且證明了重要的定理，稱爲**可分離性第一原則**：任何兩個不相交的 A-集合都是 B 可分離的，這就是說，用 B 可測集合來分離. 從這個定理立即推出可作爲 Суслин 定理的推論.

П. С. Новиков 研究了關於 CA-集合的 B 可分離性的問題，他證明了，存在兩個 B 不可分離的 CA-集合. 這個結果說明了，用 CA-集合的可分離性不能歸結爲 B 可分離性，根據可分離性的第一原則，用 A-集合的可分離性是可以歸結爲 B 可分離性的. 後來，Лузин 提出並且證明了**可分離性的第二原則**：如果從兩個 A-集合 E_1 與 E_2 中除去它們的公共部分，那麼剩下的集合 $E_1 - E_2$ 與 $E_2 - E_1$ 是可以用 CA-集合分離開的.

爲了使 A-集合與 CA-集合的理論具有最大的幾何明顯性並使研究的問題變得容易，Н. Н. Лузин 對給出 A-集合的一些不同的方法作了很多研究. 基於此，在本書中 A-集合理論的講法就具有某些特殊的性質. 在這裏 Н. Н. Лузин 根本沒有講到 A-運算，它是 A-集合用以得到的運算，然而他發現並詳細地研究了另一些更爲幾何的 A-集合的工作方法. 這些方法的第一個是參數表示法，換句話說，A-集合 E 作爲空間 $\mathscr{I}_x$ 的連續映像. 上面我們已經指出過，Н. Н. Лузин 證明了，如果這個連續映像是雙邊單值的，那麼 E 是 B 可測的. 後來 П. С. Новиков 證明了，如果參數表示是可數多重的（這就是說，每一點的原像最多是可數多個），那麼集合 E 也是 B 可測的. 另一個在空間 $\mathscr{I}_{x_1x_2\cdots x_n}$ 中 A-

集合的給出方法是作空間 $\mathscr{I}_{x_1x_2\cdots x_ny}$ 中 B 可測集合的投影. 這個方法是基於 Суслин 的定理, 即空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_n}$ 中每一個 A-集合都是空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_ny}$ 中某一個 G_δ 型的集合的投影. 最後, Н. Н. Лузин 所引入的一個非常重要的 A-集合的給出方法是利用初等篩集(參看第三章).

所有這三種集合的給出方法都與在區間組上作 A-運算等價. 應該指出, 如果應用到更複雜的集合上, 特別是應用到 CA-集合上, 投影運算與連續映像比 A-運算與篩運算更爲有力. 如果給出一個初等篩集 C, 它定義 A-集合 E, 那麼在餘集 CE 的每一點 x 上這個篩集就確定一個超限數 α. 集合 E 爲 B 不可測的充分必要條件是它的這些超限指數是無界的. 集合 CE 中所有那些超限指數等於 α 的點的集合 $\mathscr{E}_\alpha$ 稱爲帶有指數 α 的篩集 C 的構成子集. 所有的構成子集 $\mathscr{E}_\alpha$ 是 B 可測的. 因之如果集合 E 是 B 不可測, 那麽篩集 C 就決定了一個劃分, 把 CA-集合 CE 分成 $\aleph_1$ 個 B 可測集合. 這個情況緊密地與 CA-集合的勢的問題聯系着.

如果 CA-集合包含一個完全子集, 那麼在它的構成子集中至少有一個是不可數的. 如果 B 不可測的 CA-集合所有的構成子集都不超過可數個點, 那麽這個集合就是由 $\aleph_1$ 個點組成並且不包含完全子集. Н. Н. Лузин 深刻地研究了與 CA-集合的勢這問題相聯系的困難. 爲此, 他研究了 CA-集合劃分成構成子集的結構. 在這本書的第一版後, 他的一系列的工作都是針對這個問題的. 在這本書中 Лузин 說出了這樣的想法, 即與 CA-集合的勢的問題相聯系的困難是原則性的, 從古典集合論的原則出發是不可能解決的. 最近 П. С. Новиков 作出了一個 CA-集合, 對於它, "它不包含完全子集" 這個命題是不矛盾的 (Труды инта им. Стеклова, т. **XXXVIII**, 1951). 並且又證明了, 每一個不可數的 CA-集合包含一個完全子集這一點是不可能證明的.

第四章是討論隱函數理論. 問題的提法是這樣的: 給出一組

方程

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_p) = 0, \\ F_2(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_p) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_q(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_p) = 0, \end{array}\right\} \tag{1}$$

其中 F_i 全是 Baire 分類中的函數. 要找出適合這組方程的函數

$$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_m), \tag{2}$$

並且研究這些函數的描述結構. 嚴格些說, 問題是這樣提出的: 當函數 F_j 屬於 Baire 分類時, 是否有 Baire 分類中的函數(2)適合方程組(1)?

Lebesgue 考慮過一個特殊情形,即空間 $\mathscr{I}_{x_1x_2\cdots x_m}$ 中的每一個點最多對應空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_m y_1\cdots y_p}$ 中的一個點 $M(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots y_p)$, 也就是說,隱函數是單值的. 在這個情形下, 組(1)有單值的解,並且組(2)的函數全屬於 Baire 分類. 在一般的情形下,當空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_m}$ 中的點對應着空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_m y_1\cdots y_p}$ 中不止一個坐標適合組 (1) 的點時, 問題就變得大為複雜了. 容易看出, 一般說來,組 (1) 可以有任意複雜的解. 問題就在於查明組 (1) 是否有形式為 (2)的解, 其中所有的函數 f_i 全屬於 Baire 分類? Н. Н. Лузин 使隱函數的問題有了極其清楚的幾何形式. 他指出了, 因為所有的函數 F_i 全屬於 Baire 分類, 所以空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_m y_1\cdots y_p}$ 中坐標適合組 (1) 的點所成的集合 E 是 B 可測的. 隱函數的存在區域 $\mathscr{E}$ 是集合 E 在空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_m}$ 中的投影, 一般地說, 它是一個 A-集合. 關於求出組(1)的解的問題就歸結為從集合 E 中分出一個單值曲面的問題, 也就是說, 分出一個集合 E', 它與通過 $\mathscr{E}$ 中的點 $M(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 的超平面 $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \cdots, x_m = x_m^0$ 恰好交於一點. Н. Н. Лузин 稱這個問題為關於集合 E 的單值化的問題. 於是關於隱函數的問題歸結為: 能否用一 B 可測集合來對 B 可測集合 E 作單值化?

П. С. Новиков 證明了，當集合 E 與每個超平面 $x_1 = x_1^0, \cdots, x_m = x_m^0$ 相交最多有可數多個點時，問題是正面解決的，也就是說，在 E 中含有一單值的 B 可測集合 E'，它在 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_m}$ 上的投影與 $\mathscr{E}$ 重合。由此推知，在隱函數的存在區域 $\mathscr{E}$ 是一 B 可測集合的情形時，組(1)可以用 Baire 分類中的函數來滿足。Н. Н. Лузин 證明了，如果 E 是空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_m y}$ 中一個 B 可測集合，它與每根平行於 OY 軸的直綫相交最多有可數多個點，那麼集合 E 的點全包含在可數多個兩兩不相交的，B 可測的，單值曲面 S_n 的和中，並且對其中任意兩個曲面 S_i 與 S_j 來說，總是一個在另一個之上。

在空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_m}$ 中的點 $M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 可以對應於不可數多個值 y_i 的情形，П. С. Новиков 證明了，組 (1) 可以沒有屬於 Baire 分類的解(2)。也就是他作出了一個在空間 $\mathscr{I}_{xy}$ 中連續的函數 $F(x, y)$，使方程

$$F(x, y) = 0$$

不被任何屬於 Baire 分類的函數 $y = f(x)$ 所滿足，雖然這個隱函數的存在區域就是整個空間 $\mathscr{I}_x$。

如我們所指出的，隱函數的問題與集合單值化的問題緊密地聯系着。不難看出，當平面 B 可測集合 E 在 OX 軸上的投影是一個 B 不可測的 A-集合時，集合 E 是不可能用 B 可測集合來單值化的，因為 Лузин 已證明了，單值的 B 可測集合的投影還是 B 可測集合。從 П. С. Новиков 關於隱函數的結果中推出，存在一平面 B 可測集合 E，它在 $\mathscr{I}_x$ 上的投影就是 $\mathscr{I}_x$，而它不可能用 B 可測集合來單值化。不久之後，Н. Н. Лузин 以及波蘭數學家 Sierpinski 相互獨立地證明了，每一個 B 可測集合都可以用 CA-集合來單值化。關於集合單值化的問題對於研究具有較複雜的結構的集合(例如投影集合)是很重要的。

本書的第五章，也就是最後一章所討論的投影集合是 Н. Н. Лузин 在研究與 CA-集合的勢相聯系的困難性時發現的。所謂

投影集合就是那些可以從空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_n}$ 中某一個 B 可測集合 E 經過施行下面兩個運算有限多次得出的集合：作空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_p\cdots x_q}$ $(p < q \leqslant n)$ 中一集合到空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_p}$ 上的投影，以及取空間 $\mathscr{I}_{x_1\cdots x_p}$ 中一集合對於這個空間的餘集．H. H. Лузин 說，對於投影集合，根據集合論的原則我們既不能證明也不能推翻以下的結論，即它們都是可測的，它們都具有 Baire 性質以及它們有連續統的勢．關於這些問題在集合論中不可解性的 Лузин 的斷言直到現在還完全沒有被證明．1950 年 П. С. Новиков 作出了一個投影集合，對於它以下的命題是不矛盾的，即它是不可測的，它是一 CA–集合，對於它下面的命題也是不矛盾的，即它不包含完全子集．由此推出，我們不可能證明所有投影集合的可測性以及在其中存在完全子集．但是這個還沒有否定用集合論的方法來證明投影集合的不可測性以及在其中不存在完全子集的可能性．

在本書的第五章 H. H. Лузин 提出了一系列的關於投影集合的問題，特別是可分離性的問題與單值化的問題．其中有一些後來是解決了（參看第五章與它的註釋），有一些直到現在還沒有解決，並且很多的問題明顯地是帶有原則性的困難．對第二類的投影集合[1]，可分離性的問題是 П. С. Новиков 解決的．

H. H. Лузин 應用投影集合來建立某些集合論中困難問題的解集．他說，如果對於問題(P)我們作出一個集合 E，使得由指出集合 E 中的點就得出問題(P)的正面的解決，而由集合 E 是空集的證明就推出問題(P)的反面的解決，那麼集合 E 就稱爲問題(P)的解集．H. H. Лузин 對於集合論的某些問題作出了解集．這些解集都是從完全確定的 B 可測集合作出的投影集合．特別是 H. H. Лузин 作出了關於 CA–集合的勢的問題的解集．從 П. С. Новиков 的關於存在一個不包含完全子集的 CA–集合這個命題

1) A-與 CA-集合是第一類的投影集合，第二類的投影集合是 CA-集合的投影以及這些投影的餘集．

的無矛盾性的結果中推出，不可能證明解集 E 是空的．關於指出 E 的點的可能性這個問題還沒有解決．

在第五章的最後，H. H. Лузин 對 Lebesgue 的論文 "Sur les fonctions représentables analytiquement"（關於可以解析表示的函數）作了詳細的分析．對於他有興趣的基本問題是關於 Lebesgue 的普遍曲面的描述結構的問題，這個曲面是爲了證明不在 Baire 分類中的函數的存在作出的．在這裏 H. H. Лузин 去掉許多復雜細節來闡述這個曲面的作法，並且給了它一個非常淸楚的幾何形式，這一點是 Lebesgue 原來所沒有的．基於在 Lebesgue 曲面的作法中非常特別地用到第二類超限數的全體，因爲這裏按第二類超限數的全體應用了超限歸納法，H. H. Лузин 預測 Lebesgue 曲面是一個超出投影集合範圍的集合．Лузин 認爲弄淸楚 Lebesgue 曲面的描述結構是非常重要的，因爲他預測在這裏可能得出超出投影集合的範圍的新的集合類．不過後來 Neumann 與 Kuratowski 證明了，Lebesgue 曲面是第二類的投影集合．

本書包括了到 1929 年爲止所得的描述集合論方面的基本結果．在最後一章中提出了一系列集合論的新的迫切問題，它們指向算術連續統結構的研究．基於此，這本書不僅在很大程度上確定了描述集合論的進一步發展，並且還確定了數理邏輯中以研究與集合論某些基本問題有關的困難性的部門的進一步發展．

這譯本是 H. K. Бари 作的．還在 H. H. Лузин 的生前 Бари 已經開始工作．然而 Лузин 沒有能看到最後的出版，因爲這書是在他死後才出版的．

依照 H. H. Лузин 的指示，俄譯本按照了法文本作了一些精簡．

在第三章中，在關於篩集的比較定理的證明之前，爲了糾正其

中一些不正確點添入了新的關於空間相似集合的一節．個別微小的不正確的地方也作了修正．此外，在俄文版中沒有包括法文版原有的 W. Sierpinski 的補充．作爲它的代替，在俄文版中收入 Н. Н. Лузин 的兩篇文章，它們的內容是本書的自然的補充．

目　　錄

第 一 章

關於 B 可測集合的一般概念

延伸 我們考慮綫性延伸 E. 在延伸 E 中我們首先區分出有理點;這就是那些與原點 O 的距離是有理數的點.

但是在延伸 E 中還有許多其他的點. 邊長爲 1 的正方形的對角綫給了我們這樣的點的一個直接的例子; 這是一個能用直接構造的辦法,而不必利用任何算術逼近得出的點.

但是除去有理點與可構造的點以外,延伸 E 還包含其他的點. 自然對數的底 e 是一個古典的例子; 所有這些點都可以用算術逼近來給出[1].

延伸 E 遠遠沒有被一種有理點所窮盡, 因而人們希望能有一個一致的方法來定義每一個無理點: 這就是 Dedekind 理論的具體意義.

集合論的目標 在科學的現代狀況下, 對 Dedekind 的無理數理論進行攻擊是太早了一些, 如果祇是希望這個攻擊是有成效的話,也就是說,在這個理論的範圍中能得出我們遺漏掉的正面的結果.

因此, 我們祇限於應用這個理論, 把它作爲一個過渡的工具, 以後在可能時指出這個理論的一些困難.

不過如果我們應用了 Dedekind 理論的無理數的一致定義, 在這裏無理數是被看作在有理數上所做的分割, 而與它的生成無

1) 我們碰到的第一個困難是關於沒有任何算術逼近的可構造的點的存在,以及無法構造的點的存在. 我們不打算深入討論, 祇限於指出有這樣的點, 它們首先是用構造得到的,也有些點,它們首先是用逼近得出的.