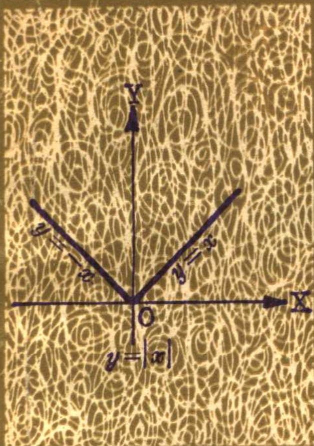

金向新　编著

数的概念

数 的 概 念

金向新 编著

黑龙江人民出版社
1982年·哈尔滨

责任编辑　田兆民　孙怀川
封面设计　蒋　明

数 的 概 念

金向新　编著

黑龙江人民出版社出版
（哈尔滨市道里森林街 42 号）
黑龙江新华印刷厂印刷　　黑龙江省新华书店发行
开本 787×1092 毫米 1/32・印张 5 8/16・字数 100,000
1982年11月第1版　　1982年11月第1次印刷
印数1—8,900

统一书号：13093・55　　　定价：0.46 元

出 版 说 明

为加速实现四个现代化，迅速培养和造就大批又红又专的建设人材的需要，我们将陆续出版一套《中学生课外读物》。

这套读物包括数学、物理、化学、语文、历史、地理等基础知识和典型题解答几十种。这本《数的概念》就是其中的一种。

本书以全国统编中学数学教学大纲为基础，适当扩大了知识范围，按着数产生的历史，逐步地由自然数讲到复数。其中介绍了自然数的基数理论和序数理论；分数的产生及分数与小数的关系；负数产生的意义及其符号运算法则的确定等。无理数的引进对中学的教学是困难的，这里是从几何的线段度量来说明无理数的意义；虚数对初学者来说，总觉得晦涩不解，我们这里采取从自然数到虚数统一的叙述，使读者认为虚数和其他数一样，是为适应人类生产斗争的实际需要而被提出来的。

本书可供中学生、知识青年自学之用，也可供中学数学教师参考。

目　录

一　自然数……………………………………………………………1

（一）自然数的基数理论………………………………………2

（二）自然数的序数理论………………………………………6

（三）数的整除性……………………………………………11

二　分数……………………………………………………………56

（一）分数的定义………………………………………………56

（二）分数的运算………………………………………………62

三　小数……………………………………………………………72

（一）小数的定义与写法………………………………………72

（二）小数化成分数……………………………………………75

（三）小数的大小………………………………………………75

（四）小数运算…………………………………………………76

（五）小数与普通分数…………………………………………79

四　有理数…………………………………………………………96

（一）负数的引进………………………………………………96

（二）有理数运算的实例………………………………………97

（三）有理数运算法则的理论证明……………………………101

（四）关于符号法则问题………………………………………105

五　实数……………………………………………………………115

（一）基本概念…………………………………………………115

（二）线段的十进度量…………………………………………121

（三）正实数……………………………………………………124

(四) 负实数 ……126
(五) 实数的比较 ……127
(六) 用有理趋近无理数 ……128
(七) 实数集合的稠密性 ……131
(八) 关于递增与递减序列的定理 ……132
(九) 实数的算术运算 ……137
(十) 开方 ……145
(十一) 根式及其运算法则 ……148
(十二) 所有实数集合的不可数性 ……151
六 复数 ……153
(一) 复数的定义 ……153
(二) 复数不能比较大小 ……158
(三) 在复数集合里的根式运算 ……159

一 自 然 数

数的概念经过了很长的历史发展的途径．作为计数工具的自然数，在很早的文化发展阶段，人类就已经知道了．在上个世纪曾经对某些原始部落的智力发展情况进行了考查，考查结果表明，几乎在所有的情况下都发现他们具有数到五的能力．同时，原始部落的这些数值的概念是非常原始的，自然数内容的增加是进行得极其缓慢的．这种情况，可以从现今的语言学中看出，语言学证实表示不大的数的字，具有较大的灵活性．在相当长的时间内，语言仅仅具有自然数列的头三个数的命名．在很多语言中，一、二、三的命名有着共同的字根．由此也可以看到，这些数的命名还是发生在方言的分化之前．也就是说，这些数的命名，发生在这样的时代，即现在说着各种不同语言的民族，当时还是一个部落．

自然数的产生和发展史在我们的面前描绘出了非常弯曲的途径，这种途径是人类在几千年中所经过的．譬如，我们现在都采用十进位制记数法，但是就进位制而言，比较理想的本来应该是十二进位制，因为十二的约数的个数是十的约数的个数的两倍，十二的约数有二、三、四、六，而十的约数只有二、五．这样就给人们在生活的各种活动中带来了很多麻烦．那么为什么人类偏偏要采用十进制呢？这主要是由于人的两只手有十个手指，最初人类在计算东西的数量时，

利用两手的手指最为方便，这样就形成了十进位制，从而延续使用直到今天。

（一）自然数的基数理论

首先让我们回忆一下，我们自己是如何教子女形成自然数的概念的。人们经常是伸出三个手指，问小孩这是多少？有时筐子里放着三个苹果，问孩子这是多少？若是孩子先答出部分手指的个数是三，而答不出筐子里的苹果是多少时，大人就会很生气的抢白孩子说："这怎么能不知道呢？它们不是一样吗？"其实，就这两样东西来说，它们根本就不一样，一个是手指头，另一个是苹果。大人所指的是这两个集合间的东西可以搭配成一个对一个的关系，由此得出两集合里东西的多少是相等的。就是因为这种需要，所以我们在数学里引进了集合等价的概念。

定义 如果两个集合的元素(或称东西)，可以这样搭配起来，使对于一个集合中的每一元素有另一集合中的一个确定的元素与之对应，而反过来说也是这样，则这两个集合叫作等价的集合。

太阳形成一个集合；一个人的嘴构成一个集合；教室里的一块黑板也形成一个集合等等，这些集合都是等价的，即每两个集合间的元素都可以建立一一对应关系。它们所含有东西的多少这个数量的共同特征，我们用符号 1 来表示。自然数 1 这个概念，就是这样抽象出来的。人体上耳朵构成的集合；两支粉笔构成的集合；两匹马所构成的集合等等，这些集合也是等价的，它们所含东西的多少这个共同的特征(称

为基数)，用符号 2 表示。自然数 2 这个概念，就是这样抽象出来的。自然数的产生就象上边所说的那样，是在人类的社会实践中逐渐形成起来的。

自然数的加法，儿童在学习二加三等于五时，常是这样作的：首先左手伸出两个手指头，接着右手伸出三个手指头，儿童知道一个是二，另一个是三。把两手伸出的手指头凑在一起形成一个集合，问这是多少？回答是五，由此得出二加三等于五。

这个例子说明，所谓加法就是两个集合 A 和 B (这两个集合里没有公共元素，即是集合 A 的元素都不是集合 B 的元素，而集合 B 的元素也都不是集合 A 的元素)并在一起组成一个新的集合 C，然后我们就说集合 C 的基数为集合 A 的基数与集合 B 的基数之和。

把上面的例子加以抽象化，我们就引进了自然数加法的定义。

定义 设 A 和 B 是两个不具有公共元素的集合，它们的基数分别为 a 与 b，把集合 A 和集合 B 的元素放在一起组成一个集合 C，集合 C 的基数 c 叫作 a 与 b 的和。记作

$$a+b=c.$$

a 与 b 都叫作加数，求两个数的和的运算，叫作加法。

自然数的乘法是加法的特殊情形，即若干个相等加数的相加。将自然数 a 乘以自然数 b，就是说求 b 个被加数的和，每一个被加数都等于 a。

显然，假使我们有 b 堆的东西，它们没有公共的东西，并且每一堆所构成的集合的基数都是 a，那么把它们全放在

一起，所形成的集合的基数 c 就叫作 a 与 b 的积，记为

$$a \times b = c.$$

数 a 叫作被乘数，数 b 叫作乘数，求得积的运算叫作乘法。

由于两个数的乘积也能够看作是和，因此这里发生了一个这种新运算的导入有没有必要的问题，因为它是加法的当各个被加数都彼此相等时的一种特殊情形。不过，把乘积看作是和来计算的方法有时候在事实上是行不通的。我们发现乘积可以用特别的方法来计算，计算起来十分省事。最后，数的概念继续的发展也说明了有必要把乘法看作是一种特别的运算，与加法区别开来。

上边建立的自然数的理论，我们称之为基数理论。它是在很大程度上反映出数的概念形成的历史过程，因为自然数的概念是从多少个的问题发展起来的。在有的原始部落里，数的某些名称实在就是集合的名称。例如，把数 2 叫作耳朵，把 5 叫作手。

这个理论，就它的论断可以推广到无限集合上来看，起着特别重要的作用，这能使我们更深入地研究无限这一概念。

例如，取全体自然数，用 100 乘其中的每一数，把乘积的结果排在原自然数列的下边

1，2，3，4，5，…

100，200，300，400，500，…

以上两个集合等价，而同时第二个集合是第一个集合的部分集合。从有限集合的观点看来，在每 100 个数中有第二个集合中的一个数，粗浅一点说，自然数的个数比 100 的倍

数的数的个数大100倍。

从无限集合的观点来看，这两个集合是等价的。根据以前所述的论断，我们应该说：凡与全体自然数集合等价的数的集合有同一个基数，用符号 $\aleph$（读作阿来夫零）来表示。

任何与自然数集合成等价的集合，叫作可数集合。显然，任何一个可数集合的基数都是$\aleph$，现在根据集合的运算，很容易证明

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0.$$

因为，自然数中一切偶数集合 A 和自然数集合等价，这由下列配合就可以看明白

1，2，3，4，5，…

2，4，6，8，10，…

同样，自然数中一切奇数的集合 B 又和集合 A 等价

2，4，6，8，10，…

1，3，5，7，9，…

所以集合 A 与 B 的基数都是 $\aleph_0$，现在把集合 B 的元素添加到集合 A 里边去，得到的是全体自然数的集合 C，它的基数也是$\aleph_0$。因此得

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0.$$

若m是自然数，则

$$\aleph_0+m=\aleph_0$$

也很好证明。

例如，假定 $m=1$。如果向自然数集合 C 添加一个文字 a，这个集合显然可与 C 的元素一一对应起来

1，2，3，4，5，…

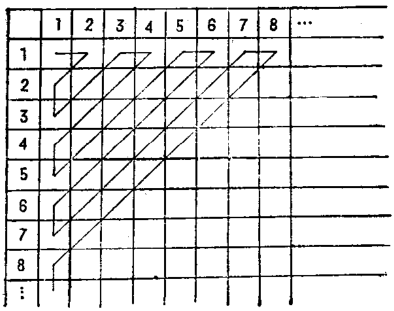

图 1

α，1，2，3，4，…

这就说明两个集合是等价的。因而两个集合的基数相等

$$\aleph_0+1=\aleph_0.$$

又 $\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0.$

可用左图来解释这两个基数的相乘。

但是，不要由此就认为所有的无限集合都是和自然数集合是等价的。的确存在这种数的集合，自然数集合是它的部分集合，而后者与前者不等价。

（二）自然数的序数理论

自然数概念的产生，一方面是为了回答一些东西有多少，即基数理论，另一方面人类还有顺序的概念，即回答某个东西是哪一个。例如，放牛娃常说，从前头的算起，某牛是第几头。为了回答这类问题人们就要数数，一、二、三、四、五，是第五头牛。我们再来研究一下数数的本质属性。当儿童计算自己的小石子的时候，他从其中移动一个的位置并且说一个，再将余下的移动一个位置并说两个，这样下去，一直到把全部都移动完了的时候，最后一个叫到的数就是数数的结果。总结以上各例，便得出下面所要遵守的要求：对于第一个指出的东西，使数 1 与它对应，每一次都指出一个以前所未被指出的对象，对于它使一个数与它对应，这个数紧挨

着已经叫过的数。数的过程可以任意继续下去，从而产生自然数列

1，2，3，4，5，6，…

我们现在研究怎样将自然数列刻划出来：

①自然数列开头的是1，因为数东西的时候必须先确定从哪个开始。

②每个自然数都有并且只有一个在它的后边。如果不是这样，有时就没办法确定某头牛是第几头，再者若是自然数列只有二十一个，那么第二十一个后边的那头牛的位置记号就没办法标记出来。这一条主要说明自然数列的无限性。

③除开头的1以外，其他的自然数能作一个自然数后边紧挨的一个自然数，且只能作这一个数的后边紧挨的自然数。不然的话，就可能出现称某头牛是第五头又是第七头的问题，这是人们生活中的常情必须遵守。如果没有这条限制，就会出现循环转圈现象

1，2，3，4，5，6，2，3，4，5，6，2，3，4，…

④为了确定整个自然数列，防止别的东西混入，所以还要求：如果开头的自然数1在集合M里，并且保证如果某一个自然数在里边，则它后边紧挨着的自然数也在集合M里，那么全体自然数就都在此集合中。若是对自然数列不加上这个条件，则就可能出现如下的情况，设N是所有自然数1，2，3，…和形如$n+\frac{1}{2}$(此处n为任意整数)的所有数的集合，并且对于自然数来说，2的后边是3，3的后边是4等等，而$5+\frac{1}{2}$后边的数是$6+\frac{1}{2}$，于是前三个条件都满足，不满足第四个条件，它不是自然数列。

将以上讨论的事实，写成自然数的定义：

我们把应用不定义的概念后继和四个公理所确定的符号叫作自然数列．这四个公理是：

①1是自然数，它不后继于任何自然数；

②对于任何自然数，必有且仅有一个自然数后继于它（后继数就是与该数紧挨着的后边数）；

③除1以外，任何自然数必定后继于且仅后继于一个自然数；

④假定若论断 s 对于任何自然数 m 为真，则能证明 s 对于 m 的后继数为真。在这个情形之下，若 s 对于1为真，则 s 对于任何自然数为真。

用上述这四个条件就完全刻划出来了自然数列，这就是说，自然数列满足这四个条件，反过来满足这四个条件的数列就是自然数列。

1．自然数的加法

我们还用二加三等于五的例子来说明．回忆一下大家常使用这样的方法，首先让小孩左手伸出三个手指头，同时叫他心里记住二，接着要求儿童从二开始向下数，问二完了接着是几？小孩回答是三，大人立刻用右手按倒一个手指头，督促小孩照此继续数下去，数四又按倒一个手指头，最后数到五又按倒了一个，三个手指头都按倒了，最后大人总结说，二加三等于五．我们把这个事实用数学的式子表示出来。

自然数的加法是由下列两个公理来定义的：

① 自然数 a 与1的和，是自然数列中 a 的后继数（a 的后继数用 a' 表示），这个论断表示为

$$a+1=a'.$$

②a 与 b 的后继数 b' 的和，是 a，b 二数的和的后继数，这一论断表示为

$$a+b'=(a+b)'$$

和是由公理定义的，而第二个公理是建立在 a，b 的和这一概念上。这种情况可能使我们觉得奇怪，因为由此造成一种印象，和的定义里还要求用到和的概念，即用和来定义和。事实上，这里出现的是循环推论法。

例如　证明　$2+3=5$。

$2+1=2'$（由第一个公理得）

　　$=3$（2 的后继数是 3）。

问二完了是几？向下数，小孩回答说是三，按倒一个手指头。

$2+2=2+1'$　（把 2 写成 1 的后继数）

　　$=(2+1)'$（由第二个公理得）

　　$=3'$　　（由前式知括号内得 3）

　　$=4$　　（3 的后继数是 4）。

督促小孩继续向下数，三完了是几？回答是四，又按倒一个手指头。

$2+3=2+2'$　（把 3 写成 2 的后继数）

　　$=(2+2)'$（由第二个公理得）

　　$=4'$　　（由前式知括号内得 4）

　　$=5$　　（4 的后继数是 5）。

四完了是五，又按倒了最后剩下的一个手指头。

这就证明了二加三等于五。

2. 自然数的乘法

自然数 a 被自然数乘的乘积由下列二个公理定义：

①$a\cdot 1=a$,

②$ab'=ab+a$.

这个自然数乘法的定义，和前边所讲的加法的定义是一样的，都是从自然数的序数理论的角度规定的。它与上边介绍自然数的基数理论时，所定义的加法与乘法是不同的。

证明： $2\times 3=6$

$2\times 1=2$ （由公理 1 得到）。

$2\times 2=2\times 1'$ （把 2 写成 1 的后继数）

$=2\times 1+2$ （根据公理 2 得）

$=2+2$ （由公理 1 得）

$=4$ （根据加法得）。

$2\times 3=2\times 2'$ （把 3 写成 2 的后继数）

$=2\times 2+2$ （根据公理 2 得）

$=4+2$ （由前式所得的结果）

$=6$ （根据加法得）。

以上就是用序数理论证明了 2 与 3 相乘得 6。

上面介绍的是关于自然数的序数理论。

零的产生是很晚的，因为人们的社会实践，使人类在实践中引起感觉和印象的东西反复了多次，于是在人们的脑子里生起了一个认识过程的突变，即飞跃，产生了概念。零是作为空集合的特征，当然它要在 2，3 等自然数的概念产生之后出现的。

对于它与自然数的运算，我们要特殊的规定为

$$a+0=a,$$
$$0+a=a,$$
$$a\times 0=0,$$
$$0\times a=0.$$

（三）数的整除性

1. 数的整除性

定义 假如有一个整数 b 存在，使 $c=ab$。我们则说，整数 c 能被自然数 a 整除，这里不拿零作除数。c 被 a 整除用记号 $a|c$ 表示。这时 a 叫作 c 的约数。

定理 1 若 $a|c$，$d|a$，则 $d|c$。

证明 由已知条件知存在 b_1 和 b_2 使

$$c=ab_1,\ a=db_2,$$

所以 $c=(db_2)b_1=d(b_2b_1)$。

因为 b_2b_1 是整数，所以由定义便得 $d|c$。

定理 2 若 $a|c_1$，$a|c_2$，则 $a|c_1+c_2$。

证明 由假设知存在 b_1，b_2，使

$$c_1=ab_1,\ c_2=ab_2,$$

所以 $c_1+c_2=ab_1+ab_2=a(b_1+b_2)$。

因为 b_1+b_2 是整数，故 $a|c_1+c_2$。

定理 3 若 $a|c_1$，$a|c_2$，则 $a|c_1-c_2$（这里 $c_1-c_2\geqslant 0$）

证明 由定理 2 证明中的记号得

$c_1-c_2=ab_1-ab_2=a(b_1-b_2)$（$b_1$，$b_2$ 是整数）。

因为 $c_1\geqslant c_2$，

所以 $ab_1\geqslant ab_2$，$b_1\geqslant b_2$。