

趣味的数学解题故事

(苏联) 杰普曼著

13.131
25



科学普及出版社

趣味的数学解题故事

〔苏联〕杰普曼著

王 一 之 译

科学普及出版社

本書提要

這是一本很有趣又很有意義的數學讀物。它使我們覺得數學是一門又嚴格而又生動有趣的科學，而不是像一些人們所想像那樣，既枯燥乏味，又艱深難學。它從一些很有趣的問題出發，不僅告訴我們這些問題的答案，而且告訴我們科學地思考、解決問題的方法。利用了這些方法，一些看上去幾乎不知道如何着手的難題，都迎刃而解了。因此這是一本中學生的有用的課外讀物，也是中學教師的很有啟發的參考書；對於數學愛好者和自學數學的人說來，這也是一本富於鼓勵性的書。

總號：846

趣味的數學解題故事

РАССКАЗЫ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

原著者：И. Д. ДЕПМАН

原出版者：ДЕТГИЗ, ЛЕНИНГРАД

譯者：王

出版者：科學普及出版

(北京市西便門外柳樹灣)

北京市書刊出版業營業許可證出字第091號

發行者：新華書店

印刷者：北京市印刷一廠

(北京市西便門外大街乙1號)

開本：787×1092 1/2 印張：4 1/2

1958年9月第1版 字數：76,000

1958年9月第1次印刷 印數：36,570

統一書號：13051·141

定價：(9)4角4分

目 次

前言	1
第一个故事	
1956年9月列宁格勒某中学在教室里解算题时的情形	5
第二个故事	
解算题时，必須細心地对待算题条件中的每一个字	20
第三个故事	
有时图形能帮助解算题	26
第四个故事	
怎样用图形帮助得出公式	37
第五个故事	
解某些自然数的問題	42
第六个故事	
关于方程和利用方程来解题	55
第七个故事	
如何运用与几何学無关的算题說明解几何作圖题的方法	67
第八个故事	
有时候五年級学生解算题比十年級学生解得还好	77
第九个故事	
不要任何計算，就能解算题	92
第十个，也是最后的一个故事	
解法与我們前面所研究的那些算题形式都不相同 的各种算题	107
結 語	126

前 言

每一个中学生都想能很好地解算题。这是一个正当的愿望。善于解算题，可以证明已经既巩固又自觉地掌握了理论，学校对每个学生的要求也正是如此。

讀者不要期望：我們這本書能教會你們解那些五年級至七年級算術課本、初等幾何和代數課本中所碰到的一切算題。要善於解各種算題，必須不斷地練習那種往往無法教會的機智才行。曾寫過昆蟲書籍的著名作者法布爾說過：“機智是一種花，它不是在任何土壤上都能生長，它是誰也不覺得就那樣開起花來的”。法布爾很重視數學，並在描寫昆蟲的生命時也常應用數學。往往有很多驟然看來非常簡單的問題，在解它時卻需要很大的機智。關於這一點，在學校四年級和五年級所讀的整數算術里，便有很多出色的例題。

在整數算術里有很多好像一看就懂的原理，但直到現在，科學還沒法證明，儘管幾世紀以來，一些卓越的學者一直都在不斷地尋求這些證明。偉大的俄羅斯數學家切貝雪夫(1821—1894)和維諾格拉多夫(生於1891年)，在解整數算術的問題上，獲得了名聞世界的聲譽。



切貝雪夫

普希金對葉甫蓋尼·奧涅金坐下讀書時的情況寫道：

“他怀着值得稱贊的目的坐下

把別人的才智據為己有”。

本書的讀者不應當僅僅記住書中現成的解，而應當力求自己獨立地解每個算題。如果自己解不出，再看書中所做的解釋，以便把已經掌握的推論方法運用到解其他的算題上去。在掌握書中的解後，試一試找出你自己的解法。這種方法對你來說，當是最易理解的，但有時這種方法也許還是新的，在這以前科學上還沒發現的方法。古時有句格言說：教會一個人解任何算題是不可能的，但學會解任何算題却是可能的。要達到這一點，就需要有獨立的克服似乎是困難算題的頑強性和勤勉。

听听老作家斯拉多夫拉茨基怎样弄懂他起初学得坏的数学这个故事是有益处的。斯拉多夫拉茨基的父亲总是接到



維諾格拉多夫

學校領導的通知，說他兒子的數學不及格。於是他便邀請了城里另外一個學校的、以嚴厲著名的數學教師教他兒子。下面便是斯拉多夫拉茨基自己的敘述：

“C 教師（就是他被送到這個教師那兒去的）就像平時那樣，嚴厲地但“像對待家里人”似地接待了我，而且一點也不管我是否知道些他所要教的課程以及程度如何，就直截了當地開始向我講解最基本的數學原理，就好像我從沒在中學里讀過，沒在那兒待過四年似的^①。當然，我不敢向他提出抗議。他一開始就極其簡單地，“合乎人情味道地”，的確是合乎人情味道地，向我講解數學，然後再一步步地解釋那些非常簡單而又合乎邏輯地一個個所推論出來的演算，而這些，我很早就覺得並不怎麼希奇……。一課，兩

① 系指革命前的八年制文科中學而言。——譯者注

課，三課，我每一次從他那兒出來，精神上好像越來越振作似的。兩個月過去了，一個沒有想到的啓示照徹了我的心靈。天呀！難道我真的不是傻子，不是笨漢，像那些英明的中學教師在談到我時所認為的那樣？……。看起來，C教師對我也還滿意，但是他並不表示出來，甚至他連我在中學里怎麼會得兩分和一分也不過問，雖然我在他那兒已能很隨意地解相當複雜的算術和幾何的算題了……。經過兩個月以後，C教師簡單地跟我父親說：“行了，够了……您的兒子現在用不着再到我這兒來……讓他去準備考試吧……”。我考試及格了，數學得了個“三分”，這使得我們那個還不肯給我優秀分數的老師也為之感到驚訝”^①。

斯拉多夫拉茨基還說，他以後無論在中學里，還是在大學里，都被認為是個“數學家”呢。

也讓我們來試試把數學的知識作為故事來敘述，我們無意模仿一般數學課本里所採用的方法。

作者時常怀着感激的心情回憶起自己的一位教師——彼得堡大學實驗室的實驗教員萊蒙托夫(1845—1918)，他是偉

大詩人(萊蒙托夫——譯者)的近親。這位著名的教育家，曾寫過有趣的書籍，如“應用代數教程”和“實驗基礎的應用幾何”，他經常提醒我們這些學生應當思考，應當“三思而後行”。

為了使讀者能養成獨立思考的習慣，作者收集了這樣的一些算題，即在解它們時，都需要稍加思考。

① 斯拉多夫拉茨基著，“回憶錄”，1956年版，第71頁。

讀者不必因为对于所讀到的，不能一下子就全明白或弄懂而感到不好意思。人們頭腦的運用各有不同。一些人对新的事物很容易一下子了解，但往往是膚淺的；另一些人接受新事物虽然慢些，但却深刻。

人們在講到20世紀偉大的數學家吉伯特（1862—1943）時，說他接受新的思想很慢，但一經接受，在運用和進一步發展這些思想上，就沒有人能和他比擬。

讀數學書，也包括我們這本，不是單純的一種消遣。讀這種書時，應當手拿着鉛筆，不時復習書中所敘述的計算。較長的推論，往往不是讀一次就能掌握的。數學的特点是：



吉伯特

每一個新的推論都是建立在以前的推論上的。在閱讀新的資料時，不會一下子就全部掌握和記住了這些新概念的。因而對於了解以後的概念，會造成一定的困難。應當復習以前所講的，而且，有時需要復習它好多次。如果你遇到這種情況，那就不用着急，要像作家斯拉多夫拉茨基當初那樣，把自己算做笨漢，頑強地繼續“苦心攻讀”。終究會了解的。18世紀大數學家和啓蒙家達拉姆別爾曾說過：“不可能把一切給予所有的人”，但“忍耐和勤勞能克服一切”。

第一个故事

1956 年 9 月列宁格勒某中学在教室里
解算题时的情形

求一个六位数:

$$N = \overline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1},$$

这个六位数如乘以 2、3、4、5、6 时，
其积数仍为这几个数目字所组成的
六位数，只是数目字的次序不同而
已。



教师：“请告诉我，你们在学校这几年当中，共解了多

附注： $\overline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$ 这个符号用来表示一个数目，在它右边的第一位是数字 a_1 ，第二位是 a_2 ，第三位是 a_3 ，等等。换句话说，在这个数目中， a_1 是个位数， a_2 是十位数， a_3 是百位数， a_4 是千位数， a_5 是万位数， a_6 是十万位数。 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 这些符号，如分开来看，都是表示个位数的数目，如合起来看，就表示个，十，百，千位数等。希腊人为表示这些分开的个位数，曾有一个专门的术语，把它们叫做“比夫曼”。希腊人读我们的算题是先从右起， $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 便是所求的“比夫曼”。

这里我们就可以看出：由于有了相适应的术语，便可简化例题的说明，并使它易于理解。

在你继续阅读以前，先试一试独自求出算题的解答。

以下是本书作者和刚刚升入八年级的学生所进行的一次谈话。

少个算题？”

学生（沉默了一会后）：“沒有計算过……总之很多。”

教师：“很多？有沒有1,000个？”

学生：“可能有1,000个。”

教师：“你們想过沒有，为什么要讓你們解这么多的算题？”

学生（躊躇了一会后）：“为了巩固理論。”

教师：“那又为什么讓你們学习理論呢？”

学生：“为了解算题。”

教师：“这么說，理論是为了解算题，算题是为了巩固理論的了。”

（教室里笑声四起）

这不就像我們常听的那个故事：“在海洋的某个地方有一个島，島上居民只从事一种行業，就是彼此互相洗衣服，你洗我的，我洗你的。”

（笑声）

学生：“数学对于实践是必需的，应当能解在生产上所發生的問題，应当能解物理和化学上所提出的問題。”

教师：“說得对，說得好。可是你怎样把数学应用到实践上去呢？把在学校里所解的全部算题写在練習簿上，編上號碼，在需要解某个应用算题时，你就回想回想，这个算题你編的是什麼號碼，打开練習簿再看看，它是怎样解的，是这样么？利用解算题到实践上的窍门，是不是就是这样的？”



学生：“不，这样做是不可能的。”

不可能把所有的算題解完，何況它們是那么多，記也記不清，我也找不到。”

教師：“對的，在實踐中會碰到各種不同的算題，它們是那樣多，在學校里不可能把它們全部都解完的。

讓你們在學校里解算題，是為了使你們學會一般地解算題。

為了解算題，又需要些什麼呢？”

學生：“應當懂得理論，應當懂得各種類型的算題的解法。”

教師：“對的。可是能不能預先知道算題的全部類型呢，能不能記住解它們的方法呢？”

學生：“能記住那些主要的方法……例如，解方程。”

教師：“對的。方程可以按照現成的定理來解。但是從算題的條件來列方程，有沒有什麼現成的方法呢？”

學生：“沒有。有時就不知要怎樣列方程。”

教師：“為了解任何一個算題，在不論列哪種方程時，需要些什麼呢？”

學生（思索了一會後）：“需要思考。”

教師：“現在我們好不容易才找到基本的真理。要解任何算題，就需要思考。你們在學校里解算題——很多的算題——就為的是學會思考。好，在你們已經解過的算題之外，今天我們再解一個算題。”

算題是这样的

求一個六位數，這個六位數如乘以 2、3、4、5、6 時，其積數仍為這幾個數字所組成的六位數，只是數字的次



序不同而已。

假設这六个数是这样表示的:

$$N = a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1,$$

这里, 从右起, $a_1, a_2, \dots, a_6$ 都是表示这个六位数的数字, 算題在下列表內

$$\begin{aligned} N &= a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 \\ 2N &= \dots\dots\dots \\ 3N &= \dots\dots\dots \quad (1) \\ 4N &= \dots\dots\dots \\ 5N &= \dots\dots\dots \\ 6N &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

应当求出 N 数的各个数字, 此外, 还应当确定这些数字在我們上表內画点的地方是怎样排列的。

怎样着手来解这个算題?

(沉默)

應該采用什么方法来解它?

(沉默。教师作了些鼓舞以后)

学生: “我們用方程解。”

教师: “采用方程来解算題是个有效的方法。你們知道, 采用方程可以怎样易于解算術題。”



爱因斯坦

最偉大的現代学者之一, 不久以前才逝世的爱因斯坦(1879—1955), 对这点曾作过下面的叙述。他在小学一年級时, 就听到高年級同学說他們在學習什么代数, 一年級生爱因斯坦就在家里問他的叔叔, 代数是怎么回事。叔叔告訴他說: “代数——

这是懒人的算术。懒人懒得思考，懒得用算术的方法解算题。”

著名的苏联物理学家约飞院士在学校低年级的时候也有过类似的事情，他写道：

“使我发生兴趣的，是这样丰富地散布在书本里的新事物，是巧妙地想出定理来，以代替那些用心算感到很困难的算题的计算方法……这些定理，我觉得不能算做正直的方法。因为利用这种方法不要经过思考就可以作出正确的答案来……以后，当我能‘按实质’来分析难解的算题时，而从教师那里知道这些算题的每一类型——如流域的算题，如旅人相对而行的算题，如分遗产的算题——都有现成的，不必思索便能得出正确答案的，机械式的死板公式，我就觉得好像很受委屈似的。”●

无论是解这些类型的算题的定理，还是教给我们一种容易的方法来解困难算术题的代数，我们对它们都不应当轻视。当然，代数的意义还不仅如此。它还教我们解很多算题，这些算题，如果用算术来解，不是不可能，就是解起来非常困难和复杂。当我们在实际生活中需要解数学问题，而这个答案又是可以用代数来找到时，我们总是采用代数的方法。

然而这种利用代数的可能性，并不使应用算术方法解算题失去意义。算术方法比机械式的方法和定理，更能使人思考。

还是回到我们的算题上来吧。

有人建议用方程解我们这个算题。这该怎么作呢？我们

① 约飞院士著，“我的生活和工作”，苏联国家技术理论书籍出版社，1933年版，第3页。

需要列几个方程呢？

学生：“六个。我們应当求出六个数字。”

教师：“如果我們知道这未知的六个数字，我們的这个算題是不是就算解出了呢？”

学生：“我們还应当知道，这六个数字，在六位数中是怎样排列的。”

教师：“要求出未知的六个数字，应当列几个方程呢？”

学生：“应当列六个方程，并解有六个方程的方程組。”

（笑声）

这是很困难的。

教师：“有六个方程的方程組还是可以解的。解这个算題的主要困难是：如何列这个能包括一切条件的方程組。

讓我們試用其他的方法来解。讓我們回想一下，为了解任何算題，需要做些什么。”

学生：“需要思考。”

教师：“那就讓我們試試这么做吧……”

（沉默）

“我們要是想一下，能求出这个六位数的全部六个数字是很困难的。我們不妨先从它們中間的任何一个数字开始。”

“先說数字 a_6 好么？”

（沉默）

“是不是任何数字都可以放在我們这个六位数的第一位？

（沉默）

教师：“数目字 0 可以放在那里么？”

学生：“不可以。如果是那样的話，我們就不会有六位数。”

教师：“那么， a_6 可不可以是 1 呢？”

学生：“可以的。”

教师：“那么，2呢？”

学生（稍停一刻后）：“ a_5 不能是2，因为如果是2， $5N$ 就会是七位数。”

教师：“对的，好小伙子！因此，我们这个未知数要是存在的话，那它里面的”

$$\boxed{a_5=1} \dots\dots\dots (1)$$

“放在 $2N$ 这个数的第一位是哪一个数字呢？那里也可以放上1么？”

学生：“不可以。如果我们把这个左边第一位是1的 N 数，乘以2的话，则积数的左边第一个数字将是2。”

教师：“那么第二个数的第一位就应当是数字2了，对么？”

学生：“第二个数的第一位或者是2，或者是3，这要看 a_5 是几来决定。如果 a_5 是5，或大于5，则 $2N$ 的第一位就会是3。”

教师：“我们还是暂时不必确定第二个数是从2起还是从3起的问题，我们要作出比这个更加重要的结论。关于六个未知数的左边的第一位这些数字，可以说明些什么呢？”

学生（思索了一会后）：“这些第一位的数字是逐步增加的，即左边第一位的数字是一个比一个大，下面的一个总比上面的一个要大。”

教师：“这是一个很重要的结论。这就是说，所有六个未知数的第一位，是从1起逐渐增加的……关于我们未知数的数字还能作出其他的重要结论么？”

（沉默）

“既然我們的六個數目字是逐漸增加的，那它們中間能不能有相同的數字呢？”

學生：當然不能。”

教師：「這是非常重要的結論：這六個數字是各不相同的……它們之中沒有相同的數字。」

「在十個數字中，哪一個數字能包括在這六個數字之中呢？」

學生（停息了一會後）：在這六個數字之中，不會有 0。”

教師：「這就可以看出，我們對於這個未知數的數字已經知道有多少了！在這個未知數里，和它用 2、3、4、5、6 乘後的積數里，即我們表內左邊第一位的那些數字里面，有六個不同的、從 1 起一個比一個大的數字。它們中間沒有 0。但在我們未知數里有幾個數字呢？」

學生：「六個。」

教師：「放在左邊第一位的那些數字，和未知數的 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 這些數字，有沒有什麼共同的地方呢？」

學生：「這些數字，也就是放在表內第一位上的數字，只是在 N 數內，它們變成另一種次序而已。」

教師：「現在讓我們總結一下我們這個未知數的數字。」

（經過某些改正以後）

答案：

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 這些數字是各個不同的……(2)

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 這些數字中沒有 0 ……………(3)

表內各未知數的第一位數字是一個比一個大……(4)

教师：“看来，我們已經确定了这个未知数。”

“讓我們来談談 a_1 这个数字吧。”

“是不是所有的数字都可以放在我們这个未知数的右边第一位上呢？”

学生：0 是不可以的，因为在我們未知数的数字中根本就没有 0。

另一学生：“1 也是不可以的，因为 1 是放在第六位上的，而未知数的各个数字又是完全不相同的。”

教师：“比方說， $a_1 = 5$ ，这可能么？”

学生：“不，不可能。如果 a_1 等于 5，則在 $2N$ 这个未知数內，最末一个数字將是 0。而在我們未知数的数字中是沒有 0 的。”

教师：“由于同样的原因，还有哪几个数字不能放在未知数的右边第一位呢？”

学生：“ a_1 不能是偶数，因为如果 a_1 是偶数时， $5N$ 的最末一个数字就会是 0。”

教师：“这就是說， a_1 不可能是 0、1、2、4、5、6、8 这些数字中的任何一个。剩下的只有 3、7、9 这三个数字，可能放在未知数 N 的右边第一位上。”

“能不能是 $a_1 = 3$ 呢？”

（思索，仍得不到肯定的結果。）

“这是解这个算題最困难的地方。”

“讓我們假定 $a_1 = 3$ 。在这种情况下，則在 N 、 $2N$ 、 $3N$ 、 $4N$ 、 $5N$ 、 $6N$ 这些未知数的个位数上是哪些数字呢？”

学生：“3、6、9、2、5、8。”

教师：“这可能么？”