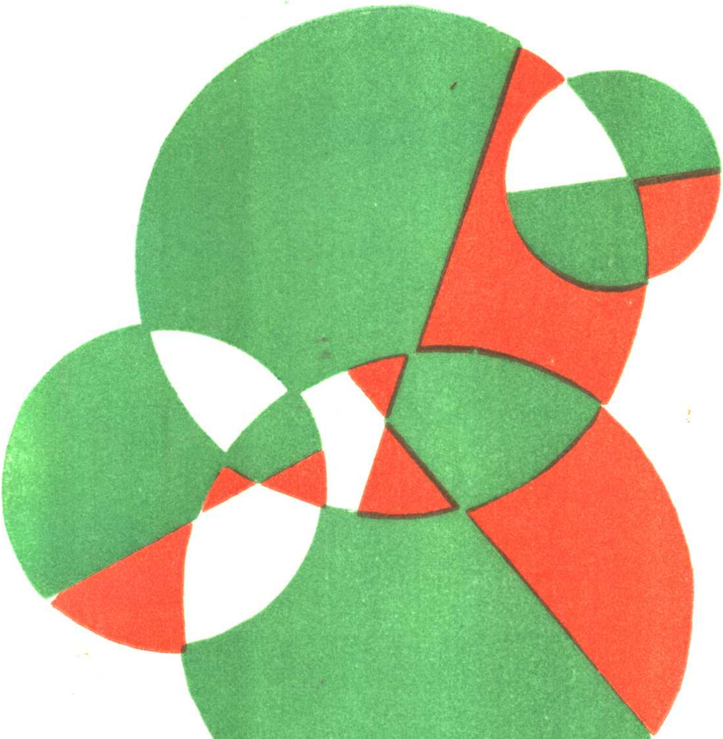
数学归纳法在几何中的应用

〔苏〕L.I.格拉维娜　I.M.雅格洛姆　著
姚时宗　童增祥　译



中国铁道出版社

数学归纳法在几何中的应用

〔苏〕L.I.格拉维娜
I.M.雅格洛姆 著

姚时宗
童增祥 译

中国铁道出版社

1989年·北京

内 容 提 要

本书介绍了数学归纳法在解决几何问题上的各种应用。全书包含38个完全解出的例题和15个附有简短提示的问题。内容独特，选例精巧，富有启发性，是具有中学以上程度的数学爱好者的一本有益读物。

INDUCTION IN GEOMETRY
L.I.GOLOVINA I.M.YAGLOM
Mir Publishers MOSCOW 1979

* * *

数学归纳法在几何中的应用
L.I.格拉维娜、I.M.雅格洛姆 著
姚时宗 童增祥 译
莫斯科米尔出版社 1979年出版
中国铁道出版社出版、发行
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092毫米 1/32 印张：4.25 字数：93千
1989年11月 第1版 第1次印刷
印数：1—2,500册 定价：2.10元
ISBN7-113-00568-3/O·20

译者的话

正如本书的引论中所写的："数学归纳法在几何上的应用显得特别美妙"。

对几何有强烈兴趣的中学生，必然对中学的几何课程感到不能满足，对他们来说，这是一本好书。本书内容独特，也涉及到高深的几何领域的一些概念。

本书选例精巧，富有启发性，使人回味不已。有些例题相当深奥，不经过一番努力思考是不能完全理解的，对于爱思考的读者来说，是很有益的。

本书根据1979年英文版译出，原书中有几个图显然错了，已作了更正。

译 者

1988.10

原作者为英文版写的前言

这本小书原先是为中学高年级学生、数学教师和师范学院中主修数学或物理的学生写的。其中论述了数学归纳法在解决几何问题上的各种应用，作者也有意将它作为I.S.索明斯基的小书“数学归纳法”（The Method of Mathematical Induction 英文本出版于1975年）的续篇。本书包含38个完全解出的例题和45个附有简短提示的问题。数学归纳法的各个方面在这里是以启发性的方式处理的。某些例题和问题本身也可看作为独立的有趣的问题。

本书是以I.M.雅格洛姆教授对莫斯科大学数学团体的两次讲座为基础的。

这个英文本与俄文原本的不同之处在于：它包含有更进一步的例题和问题，也加进了数学最新成就方面的一些有关信息。

L.I.格拉维娜

I.M.雅格洛姆

目　录

引论　数学归纳法

归纳法是从个别的论断归结出一般性结论的推理方法，一般性结论的正确性依赖于各个个别论断的正确性。数学归纳法是一种特殊的数学论证方法，它使我们能够在一些个别事例的基础上，对某个普遍规律做出论断。通过例子可以透澈领会数学归纳法的原理，我们来考察下面的例子。

例 1　求前 n 个奇数的和

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)。$$

解　用 $S(n)$ 表示这个和，令 $n=1,2,3,4,5$，则有

$$S(1)=1,$$
$$S(2)=1+3=4,$$
$$S(3)=1+3+5=9,$$
$$S(4)=1+3+5+7=16,$$
$$S(5)=1+3+5+7+9=25。$$

可见，对 $n=1,2,3,4,5$，前 n 个连续奇数的和等于 n^2。但是，我们不能由此马上断定，对任意 n，都有 $S(n)=n^2$。因为，由“类比”而得到的结论有时是错误的。我们用几个例子来说明这一点。

考虑形如 $2^{2^n}+1$ 的数。当 $n=0,1,2,3,4$ 时，这些数 $2^{2^0}+1=3$，$2^{2^1}+1=5$，$2^{2^2}+1=17$，$2^{2^3}+1=257$，$2^{2^4}+1=65537$ 都是素数。十七世纪一位著名的法国数学家P.费尔马由此猜想，凡是这种形式的数都是素数。然而，在十八世纪，另一位伟大的科学家，彼得堡科学院院士

L·欧拉发现

$$2^{2^5}+1=4294967297=641\times6700417$$

是一个合数。

这里还有一个例子。十七世纪著名的德国数学家，高等数学的创始人之一G.W.莱布尼兹证明了，对任意正整数n，n^3-n能被3整除，n^5-n能被5整除，n^7-n能被7整除。据此，他差一点提出猜想：对任意奇数k和任意自然数n，n^k-n能被k整除。幸亏他自己很快发现$2^9-2=510$不能被9整除。

著名的苏联数学家D.A.格莱夫也犯过同样的错误，他猜想对任一素数P，$2^{P-1}-1$不能被P^2整除。对小于1000的全部素数直接验证，结果都证实了这个猜想。然而，不久证实$2^{1092}-1$能被1093^2整除（1093是素数），也就是说，证明了格莱夫的猜想是错误的。

再研究一个更令人信服的例子。如果我们对$n=1$，2，…即依次对全部自然数n，计算$991n^2+1$的值，那么，即使我们在这个问题上花上许多天，甚至许多年，也得不到一个完全平方数。但是，如果我们由此断言所有这些数都不是完全平方数，那就错了；因为在形如$991n^2+1$的数中，实际上有平方数；不过使$991n^2+1$成为完全平方数的n的最小值非常大，它是：

$$n=12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767。$$

所有这些例子，都告诫读者，要谨防从类比中推出没有根据的结论。

现在我们回到求前n个奇数的和的问题。从上述可知，不管验证了多少个n，公式

$$S(n)=n^2 \qquad (1)$$

总不能认为已证明了，因为总有一种可能性，对某个未检验

过的 n，公式（1）不再成立。为了确信公式（1）对所有 n 正确，我们必须证明：无论在自然数列中走到多远，我们决不可能从使公式（1）成立的 n 值走到使（1）不再成立的数值。

于是，我们假设对某个确定的数 n，公式成立，而后试图证明，对下一个数 $n+1$，这公式也成立。

因此，我们假设

$$S(n)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2。$$

再计算

$$S(n+1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)。$$

由假定，上式右端前 n 项的和是 n^2，于是

$$S(n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2。$$

因此，如果假定了公式 $S(n)=n^2$ 对某个自然数 n 成立，我们就能证明它对下一个数 $n+1$ 也成立。上面已验证了，对 $n=1,2,3,4,5$，这公式是成立的。所以，对5后面的数 $n=6$，这公式也是成立的。而且，对 $n=7$，对 $n=8$，$n=9$ 等等，这公式也是成立的。现在可以认为，我们已证明了，公式（1）对任意数 n 都是成立的。这个证明方法就称为数学归纳法。

所以，数学归纳法的证明过程由以下两个部分组成：

1° 对于使论断有意义的 n 的最小值，直接验证论断是正确的*。

2° 证明如果论断对任一自然数 n 成立，它对 $n+1$ 也必然成立。

上面的一些例子使人确信，证明过程的第二部分是必要的。证明的第一部分显然也是必要的。证明过程中，以上两

* 无须说明，这个 n 值不一定是1，例如，关于任意 n 边形的性质的论断，仅当 $n\geq3$ 时才有意义——原注。

个部分是缺一不可的。

要是仅仅证明了：如果一个命题对某数 n 成立，它就必然对数 $n+1$ 也成立，那还是不够的。因为这个命题可能对任意整数 n 都不成立。例如，假定某个整数 n 等于它后一个整数，即 $n=n+1$，于是，在等式两边都加上1，便得 $n+1=n+2$，即数 $n+1$ 也等于它后一个数。但是，不能由此推出，这个论断对所有 n 都成立——恰恰相反，对任一整数，这论断都是错的。

当然，在应用数学归纳法的时候，并不一定要严格按照上述的框框，亦步亦趋。例如，我们有时可以假定，所考虑的猜想对两个连续整数 $n-1$ 和 n 成立，进而证明，在这种情况下，它对数 $n+1$ 也成立。此时，在开始证明的时候，我们必须验证，这猜想对最先两个 n 的值，譬如对 $n=1$ 和 $n=2$ 为真（见例17．18和19）。用数学归纳法进行证明的第二个步骤，有时也可以假定，在所述猜想对小于 n 的全部自然数 k 成立的条件下，来证明它对 n 也成立（见例7．8．9．16）。

现在再看一些应用数学归纳法的例子。这里所得到的公式以后还要用到。

例 2　证明前 n 个自然数的和 $S_1(n)$ 等于 $\frac{n(n+1)}{2}$，即

$$S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (2)$$

解　1°　　$S_1(1)=1=\frac{1(1+1)}{2}$

2°　设

$$S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

则

$$S_1(n+1)=1+2+3+\cdots+n+(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2},$$

命题证毕。

例3 证明前n个自然数的平方和$S_2(n)$是$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，即

$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (3)$$

解 1° $S_2(1)=1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$。

2° 设

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

则

$$S_2(n+1)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

问题1 证明前n个自然数的立方和$S_3(n)$是$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$即

$$S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{4}$$

例 4 证明

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+(n-1)n$$
$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{3} \tag{5}$$

解 1° $1\times 2=\frac{1\times 2\times 3}{3}$。

2° 假设

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+(n-1)n$$
$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

则

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+(n-1)n+n(n+1)$$
$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}+n(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}。$$

问题 2 试由公式（2）和（3）导出公式（5）。

提示：先证

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+(n-1)n$$
$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-(1+2+3+\cdots+n)。$$

由于数学归纳法本质上是与数的概念联系在一起的，所以它在算术，代数和数论中有非常广泛的应用。这方面许多有趣的例子可以在L.S.索明斯基的小书中找到。但是，整数不仅是数论——它研究的就是整数和整数的性质——中的基本概念，而且也是一切数学领域中的基本概念。因此，数学归纳法可用于许多不同的数学分支。但是它在几何中的应用显得特别美妙，而这正是本书的主题。本书分为六节，每节论述一类特殊的几何问题。

第一节　应用归纳法作计算

数学归纳法在几何中最自然的应用是用于解决几何计算问题。这很近似于它在数论和代数中的应用。

例 5　计算半径为R的圆的内接正2^n边形的边长a_{2^n}

解　1°　若$n=2$，正2^2边形就是正方形；它的边长$a_4=R\sqrt{2}$。按倍边公式：

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}}$$

可知正8边形的边长$a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$，正16边形的边长$a_{16}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，正32边形的边长$a_{32}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$。因此，可以假定对任意$n\geqslant 2$，内接正$2^n$边形的边长是：

$$a_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-2\text{次}}}\tag{6}$$

2°　假设内接正2^n边形的边长由式（6）表示，则按倍边公式得：

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-R^2\frac{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-2\text{次}}}{4}}}$$
$$=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{次}}},$$

由此可知：对所有n式（6）都成立。

由式（6）可知，半径为R的圆的周长（$c=2\pi R$）等于式$2^nR\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-2\text{次}}}$当$n$无限增大时的极限，所

以

$$\pi=\lim_{n\to\infty}2^{n-1}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-2\text{次}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{n}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-1\text{次}}}$$

问题3　利用式(6)证明，当下式分母中的因子（平方根）的个数无限增大时，下式的极限等于π（韦达公式*）

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots}$$

其中，因子组成的法则可由前三个因子（已给出）看出。

提示：用S_{2^n}表示半径为R的圆的内接正2^n边形的面积，h_{2^n}表示边心距。由式（6）可知

$$h_{2^n}=\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{\underbrace{2+\cdots+\sqrt{2}}_{n-1\text{次}}}}$$

$$S_{2^n}=\frac{1}{2}\left(2^n a_{2^n}\right)h_{2^n}$$

$$=2^{n-2}R^2\sqrt{2-\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-3\text{次}}}}$$

$$=2^{n-2}Ra_{2^{n-1}}$$

（这里假定$n\geqslant3$）因而

$$\frac{S_{2^n}}{S_{2^{n+1}}}=\frac{2^{n-1}a_{2^n}h_{2^n}}{2^{n-1}Ra_{2^n}}=\frac{h_{2^n}}{R}=\cos\frac{180^\circ}{2^n},$$

由此推知

$$\frac{S_4}{S_{2^n}}=\frac{S_4}{S_8}\cdot\frac{S_8}{S_{16}}\cdots\frac{S_{2^{n-1}}}{S_{2^n}}$$

---

* F·韦达（1540—1603）著名的法国数学家，代数符号的创造者之一。

$$=\cos\frac{180^\circ}{4}\cos\frac{180^\circ}{8}\cdots\cos\frac{180^\circ}{2^{n-1}}。$$

因$S_4=2R^2$和$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2^n}=\pi R^2$，所以$\frac{2}{\pi}$等于下式的极限

$$\cos45^\circ\cos\frac{45^\circ}{2}\cos\frac{45^\circ}{4}\cdots$$

最后，利用公式

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}。$$

例 6 寻找一个法则，以计算周长为P的正2^n边形的内切圆和外接圆的半径r_n和R_n。

解 1° $r_2=\frac{P}{8}$, $R_2=\frac{P\sqrt{2}}{8}$。

2° 已知周长为P的正2^n边形的内切圆和外接圆的半径分别是r_n和R_n，我们来计算同样周长的正2^{n+1}边形的内切圆和外接圆的半径r_{n+1}和R_{n+1}。如图 1，设AB是周长为P的正2^n边形的一边，O是中心，C是弧$\overset{\frown}{AB}$的中点，D是弦AB的中点，再设EF是三角形ABC的中位线，G是EF的中点。因为$\angle EOF=\angle EOC+\angle FOC=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB$，$EF$等于以$OE$为半径的圆的内接正$2^{n+1}$边形的边长，这个正$2^{n+1}$边形的周长等于

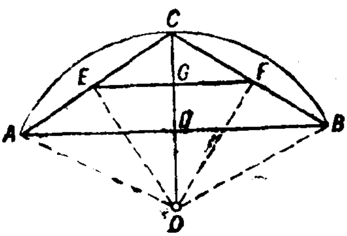


图 1

$$2^{n+1}EF=2^{n+1}\frac{AB}{2}=2^nAB=P$$

所以，$r_{n+1}=OG$，$R_{n+1}=OE$。而且，显然有$OC-OG=OG-OD$，即$R_n-r_{n+1}=r_{n+1}-r_n$，所以$r_{n+1}=\frac{R_n+r_n}{2}$。

最后，在直角三角形OEC中有$OE^2=OC\cdot OG$，即$R_{n+1}^2=R_n\cdot r_{n+1}$，也即$R_{n+1}=\sqrt{R_n\cdot r_{n+1}}$。因此，最后得到

$$r_{n+1}=\frac{R_n+r_n}{2} \text{ 和 } R_{n+1}=\sqrt{R_n\cdot r_{n+1}}$$

观察序列$r_2, R_2,\ r_3, R_3\cdots r_n, R_n\cdots$，这些项趋向于周长为$P$的圆的半径，即趋向于$\frac{P}{2\pi}$。特别，当$P=2$，我们有$r_2=\frac{1}{4}$，$R_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$。设$r_1=0$，$R_1=\frac{1}{2}$，可得以下定理：

如果构造下述数列：

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}+1}{8},\ \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{8},$$

$$\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}+\sqrt{2}+1}{16},\ \cdots$$

其中，最初两个数是0和$\frac{1}{2}$。其余的项交替等于它前面两个数的算术平均值和几何平均值，则这序列的一般项趋向于$\frac{1}{\pi}$。

例7　求任一n边形（不一定是凸多边形）的内角和。

解　1°　三角形的内角和等于$2d$。因为任一四边形都可分为两个三角形（图2），所以，四边形的内角和等于$4d$。

2°　假设对$k<n$已经证明，任一k边形的内角和是$2d(k-2)$。现考虑n边形$A_1A_2\cdots A_n$。

首先证明，在任一多边形中，必能找到一条对角线*，它将这个多边形分成两个边数较少的多边形（对凸多边形这是显然的）。设A，B，C是多边形中任意三个相邻的顶

* 在这里注明，一个凹多边形的对角线可以与它相交，或完全位于它的外部（例如图2.b的对角线BD）——原注。

点。通过顶点B，作一切可能的射线，以充满这多边形的内角ABC，直至与多边形的边界线相交。有两种可能情形：

A． 这些射线只与多边形的一边相交（图3.a）。此时，对角线AC就将n边形分割成一个（$n-1$）边形和一个三角形。

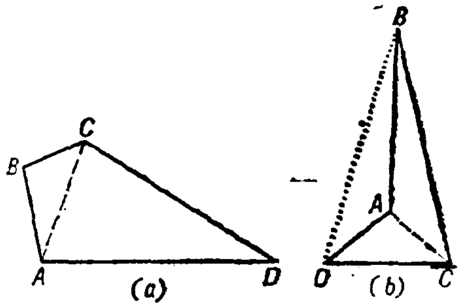


图 2

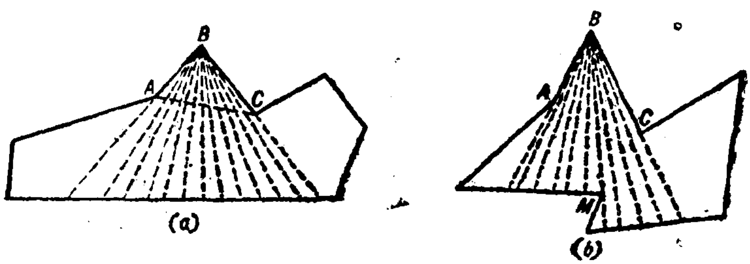


图 3

B． 这些射线与多边形相交于不止一条边（图3.b）。此时，必有一条射线通过多边形的某一顶点M，而且对角线BM将多边形分成两个边数都小于n的多边形。

现在来证明主要结论。在n边形$A_1A_2\cdots A_n$中作一条对角线A_1A_k，将它分为一个k边形$A_1A_2\cdots A_k$和一个（$n-k$